Conexões Matemáticas

QUINZENA

11

16/06 a 20/06

SEDU - 2025

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO

Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

MODELO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º GRAU

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT302 Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	• Resolver problemas em contextos diversos utilizando modelos de funções polinomiais do 1º grau.	**D132_M** Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau.

Contextualização

No mundo real, muitas situações seguem padrões lineares de causa e efeito. Por exemplo, o custo de uma refeição pode aumentar proporcionalmente à quantidade de pessoas servidas; ou, o gasto com combustível pode ser diretamente influenciado pela distância percorrida em uma viagem. Sempre que uma variável depende de outra, de forma proporcional e previsível, estamos diante de uma relação que pode ser representada por uma função de 1º grau. Essas funções permitem modelar, entender e prever comportamentos, ajudando a planejar gastos, calcular lucros ou até mesmo tomar decisões rápidas e conscientes em situações cotidianas.

Agora, imagine como pode ser importante entender essas relações de forma mais profunda. A função de 1º grau não é apenas um conceito matemático isolado, mas uma chave para decifrar o funcionamento de diversos processos ao seu redor. Está em tudo: no aumento do preço de produtos com base na quantidade comprada, na maneira como as horas extras afetam o salário do trabalhador ou até mesmo nas mudanças de temperatura ao longo do dia. Compreender como essas funções funcionam é mais do que entender números e gráficos – é entender o mundo de forma mais clara e eficiente.

O estudo das funções de 1º grau oferece a você uma maneira de transformar situações cotidianas em problemas matemáticos que podem ser resolvidos com rapidez e precisão. Ao aplicar esse conhecimento, você começa a tomar decisões mais racionais e estratégicas, tanto no âmbito pessoal, quanto profissional. Não se trata apenas de aprender uma fórmula, mas de aprimorar a sua capacidade de analisar e prever comportamentos, otimizar processos e agir de maneira mais inteligente diante de desafios diários.

Este material foi elaborado para despertar essa capacidade em você. A cada exercício e aplicação prática, esperamos te ajudar a perceber as relações que existem no mundo ao seu redor e utilizá-las a seu favor.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

REVISÃO DE CONCEITOS BÁSICOS

Função polinomial de 1º grau

Sejam a, $b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Uma função polinomial de 1º grau é expressa na forma:

$$f(x) = ax + b$$

Em que:

- o coeficiente a, denominado de **coeficiente angular** ou **taxa de variação da função**, determina a inclinação da reta; e
- o coeficiente b, denominado de **coeficiente linear** ou **valor inicial da função**, determina onde a reta intercepta o eixo y.

O **gráfico de uma função polinomial de 1º grau é uma reta**, que pode ser crescente ou decrescente, a depender do valor de a.

VOCÊ SABIA?

Em regiões montanhosas, a temperatura diminui com o aumento da altitude de forma quase linear. A cada 100 metros de altitude, a temperatura pode cair cerca de 0,6°C. Isso significa que a relação entre a altitude x e a temperatura $f(x)$ pode ser modelada como uma função linear, com uma taxa de variação constante.

Na figura 1, temos o gráfico da função polinomial de $f(x) = 2x - 3$. O coeficiente linear -3 indica a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo y, ou seja, o ponto $(0, -3)$, que representa o valor de $f(x)$ quando $x = 0$. O coeficiente angular 2 expressa a taxa de variação da função, mostrando que, para cada aumento de uma unidade em x, o valor de $f(x)$ aumenta em 2 unidades. Esse comportamento reflete a inclinação ascendente da reta, característica de uma função crescente.

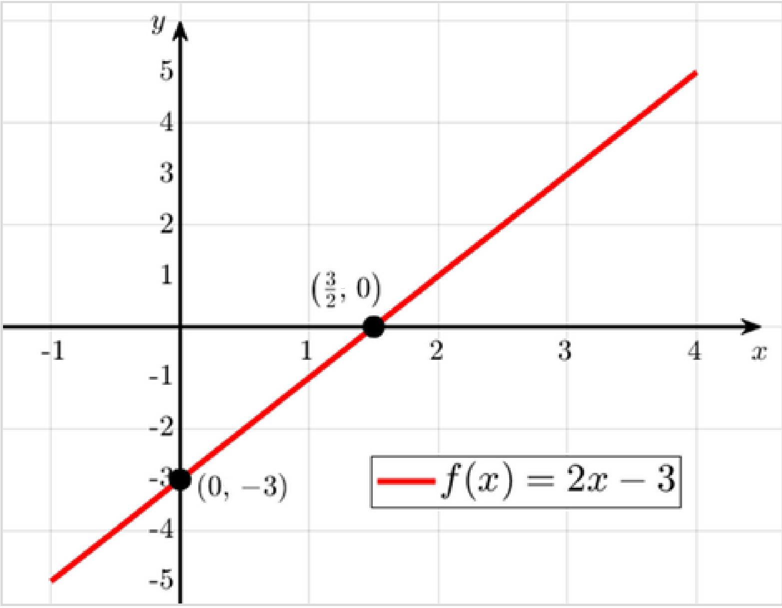


Figura 1: Gráfico de uma função de 1º grau com destaque às interceptações com os eixos.

Propriedades das funções de 1º grau

Crescimento e decrescimento

- Se $a > 0$, a função é **crescente**: à medida que x aumenta, $f(x)$ também aumenta.
- Se $a < 0$, a função é **decrescente**: à medida que x aumenta, $f(x)$ diminui.

Zero da função

O zero da função é o valor de x que satisfaz $f(x) = 0$. Para uma função de 1º grau, o zero da função é calculado por:

$$f(x) = 0 \rightarrow ax + b = 0 \rightarrow ax = -b \rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Portanto, o zero de uma função de 1º grau pode ser representado graficamente pelo par ordenado $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ no plano cartesiano. Esse ponto corresponde à interseção do gráfico da função com o eixo x.

Interseção com o eixo y

O ponto de interseção com o eixo y é o valor da função quando $x = 0$. Para uma função do 1º grau, esse ponto é dado por:

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

Portanto, a função de 1º grau intercepta o eixo y na coordenada $(0\,,\,b)$ no plano cartesiano.

VOCÊ SABIA?

A taxa de fotossíntese em uma planta pode aumentar de maneira proporcional à intensidade da luz, até um certo ponto. Isso significa que, em condições ideais, a quantidade de oxigênio liberado pela planta pode ser modelada por uma função linear, onde a luz disponível x afeta diretamente a taxa de fotossíntese $f(x)$.

Representações gráficas das propriedades elencadas

A figura 2 apresenta os gráficos das funções $f(x) = x - 3$ e $g(x) = -3x + 4$, ilustrando as propriedades de crescimento, decrescimento e os pontos de interseção com os eixos x e y.

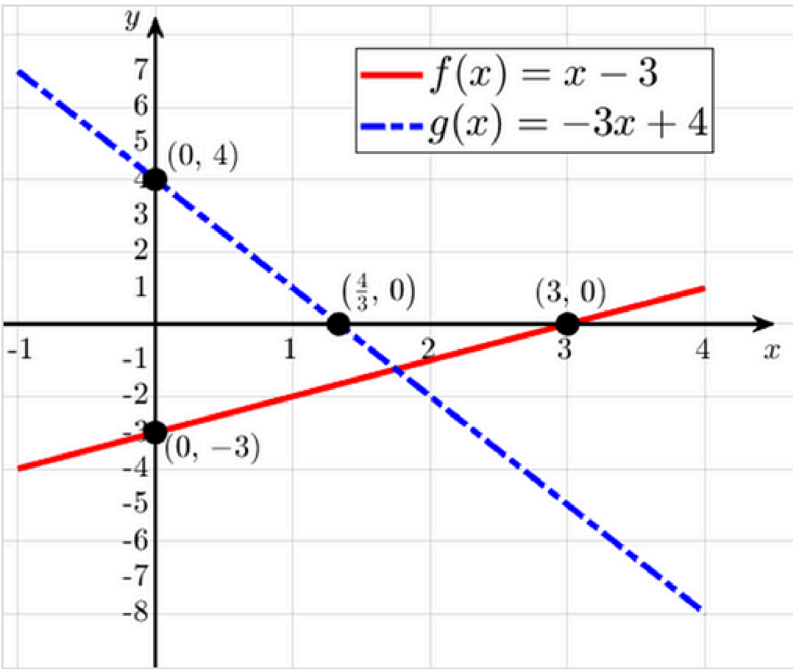


Figura 2: Gráficos comparativos entre duas funções de 1º grau distintas.

Na função $f(x) = x - 3$, o coeficiente angular $a = 1$ indica que a taxa de variação é de 1 unidade para cada aumento de 1 unidade em x, o que caracteriza a função como crescente. Por outro lado, para $g(x) = -3x + 4$, o coeficiente angular $a = -3$ representa uma taxa de variação de -3 unidades para cada aumento de 1 unidade em x, o que caracteriza a função como decrescente.

Para $f(x) = x - 3$, o zero é $-\frac{b}{a} \rightarrow -\frac{(-3)}{1} = 3$, o que indica que o gráfico cruza o eixo x na coordenada $(3\,,\,0)$. Para $g(x) = -3x + 4$, o zero é $-\frac{b}{a} \rightarrow -\frac{4}{(-3)} = \frac{4}{3}$, indicando que o gráfico cruza o eixo x na coordenada $\left(\frac{4}{3}\,,0\right)$.

Como vimos, a interseção do gráfico de uma função de 1º grau com o eixo y ocorre em $(0\,,\,b)$. Portanto, na função f ocorre no ponto $(0\,,\,-3)$ e na função g ocorre no ponto $(0\,,\,4)$.

Obtenção dos coeficientes da função de 1º grau a partir de dois pares ordenados conhecidos

atenção

Professor(a), *aqui elencamos uma das várias metodologias para se obter os coeficientes de uma função polinomial de 1º grau. Caso tenha interesse em usar outra qualquer por questão de afinidade ou por conta do perfil da turma, sinta-se à vontade para tal.*

Em alguns casos, é necessário descobrir a lei de formação de uma função linear a partir das informações sobre seus **pares ordenados, que podem ser apresentados em gráficos, tabelas ou fornecidos de forma explícita**. Para tal, uma das formas de fazer isso em funções de 1º grau seria obtendo o valor de seus coeficientes através de dois pares ordenados conhecidos.

Dado dois pares ordenados conhecidos, $(x_1\,,\,y_1)$ e $(x_2\,,\,y_2)$, de uma função de 1º grau desconhecida, podemos seguir os seguintes procedimentos para obter seus coeficientes:

1. Cálculo do coeficiente angular

O coeficiente angular representa a taxa de variação da função, ou seja, quanto y varia em relação a x. Ele pode ser obtido pela razão entre a variação de y e a variação de x:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. Cálculo do coeficiente linear

Isolando b na equação $y = ax + b$, obtemos:

$$b = y - ax$$

Portanto, para calcular b basta utilizar o valor obtido de a e um dos pares ordenados fornecido.

Exemplo 1

Dados os pares ordenados $(1\,,\,2)$ e $(3\,,\,6)$ de uma função de 1º grau, podemos determinar sua lei de formação calculando seus coeficientes.

Calculando a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow a = \frac{6-2}{3-1} = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}^{1}} = 2$$

Utilizando $a = 2$ e um dos pares ordenados, por exemplo o $(1\,,\,2)$, para calcular b:

$$b = y - ax \rightarrow b = 2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0$$

Portanto, a função tem a lei de formação $f(x) = 2x$.

Na figura 3 temos o gráfico da função obtida. Perceba que a reta passa pelos pontos $(1\,,\,2)$ e $(3\,,\,6)$, conforme esperado, e intercepta o eixo y em (0 , 0), validando o valor de b = 0. Além disso, a inclinação da reta, correspondente a a = 2, indica que para cada unidade adicional em x, y aumenta em duas unidades, refletindo a taxa de variação calculada.

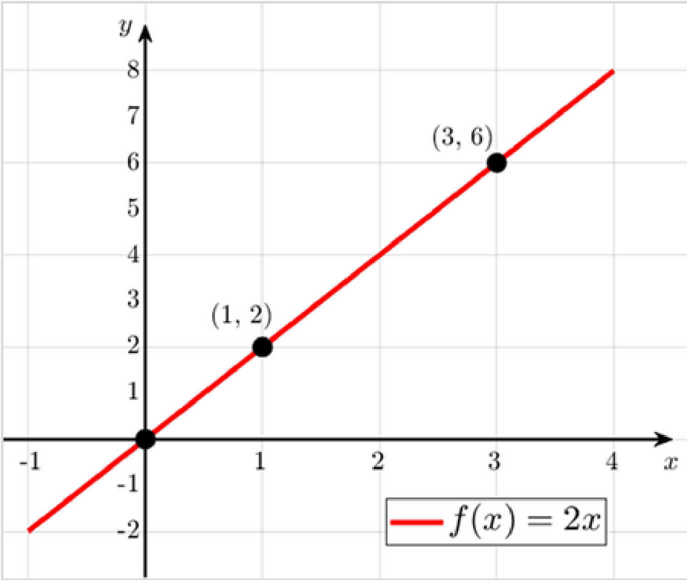


Figura 3: Gráfico da função obtida no exemplo com seus pontos conhecidos evidenciados.

Exemplo 2

Considere a seguinte tabela que relaciona valores de x a y de uma função de 1° grau.

x	y
1	5
2	8
3	11

Podemos determinar sua lei de formação calculando seus coeficientes extraindo dois pares ordenados desta tabela como, por exemplo, $(1\,,\,5)$ e $(2\,,\,8)$.

Calculando o coeficiente angular a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow a = \frac{8-5}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

Utilizando $a = 3$ e um dos pares ordenados, por exemplo, o $(1\,,\,5)$, para calcular b :

$$b = y - ax \rightarrow b = 5 - 3 \cdot 1 = 5 - 3 = 2$$

Portanto, a função tem a lei de formação $f(x) = 3x + 2$.

MODELOS MATEMÁTICOS PARA RELAÇÕES LINEARES

Um modelo matemático é uma representação simplificada de uma situação do mundo real, construída a partir de conceitos e ferramentas matemáticas, com o objetivo de compreender, analisar e fazer previsões sobre fenômenos ou processos.

Funções de primeiro grau são ideais para modelar situações que apresentam relação linear entre as duas variáveis, pois podem representar relações proporcionais e diretas entre elas. Com a forma $f(x) = ax + b$, essas funções são usadas em diversas situações práticas, como cálculos de custos, lucros e distâncias, onde há variação constante entre as grandezas envolvidas.

Dado um problema de comportamento linear, podemos construir um modelo utilizando uma função de 1º grau com os seguintes passos:

1. **Entenda o problema:** procure compreender bem o problema apresentado e identificar as variáveis envolvidas.
2. **Defina as variáveis:** atribua letras para representar as grandezas variáveis, por exemplo, a quantidade de pinceis que uma escola compra seria a variável independente (por exemplo, x), e o custo total dessa compra seria variável dependente (por exemplo, *y* ou *f(x)*).
3. **Determine os coeficientes:** identifique ou calcule o valor fixo (coeficiente *b*) e a taxa de variação (coeficiente a).
4. **Monte a função.**

Exemplo

Um fornecedor de resmas de papel cobra da escola uma taxa fixa mensal de R$ 50,00, além de R$ 20,00 por cada resma utilizada no mês. O custo total, em função do número de resmas *x* utilizadas, pode ser representado pela seguinte fórmula:

$$C(x) = 20x + 50$$

Esse modelo permite calcular o custo para qualquer quantidade de unidades.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Uma empresa tem um custo fixo mensal de R$ 1200,00 e vende, exclusivamente, camisetas por R$ 120,00 cada. Qual é o modelo matemático que descreve o lucro financeiro mensal da empresa? Quantas camisetas, no mínimo, ela precisa vender para cobrir seu custo fixo?

Resolução

Para modelar o lucro, devemos observar os seguintes pontos:

- vamos representar com *x* o número de camisetas vendidas;
- *L(x)* será a função de lucro em função do número de camisetas vendidas (*x*);
- a cada camiseta vendida, a empresa recebe R$ 120,00, o que significa que o coeficiente angular a = 120; e
- o custo fixo mensal da empresa é de R$ 1200,00. Esse valor representa uma despesa constante, ou seja, um valor negativo no modelo. Logo, *b* = -1 200.

Portanto, o modelo matemático que descreve o lucro mensal *L(x)* da empresa será:

$$L(x) = 120x - 1200$$

onde *L(x)* é o lucro em função do número de camisetas vendidas, *x*.

Agora, para determinar quantas camisetas são necessárias para cobrir o custo fixo de R$ 1200,00, devemos calcular o valor de *x* para o qual o lucro é zero:

$$L(x) = 0 \rightarrow 120x - 1200 = 0 \rightarrow x = \frac{\cancelto{10}{1200}}{\cancelto{1}{120}} = 10$$

Portanto, para cobrir o custo fixo de R$ 1 200,00 a empresa precisa vender no mínimo 10 camisetas.

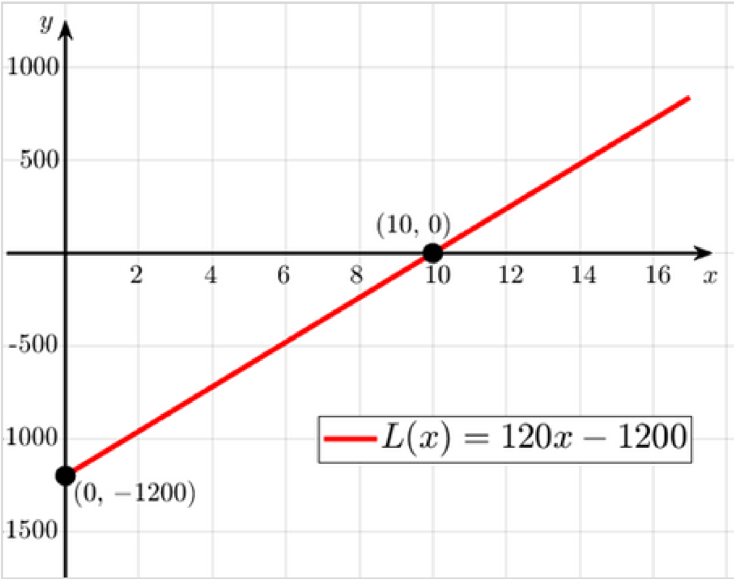


Figura 4: Gráfico da função de lucro da empresa.

No gráfico do lucro da empresa, que pode ser visto na figura 4, a reta intercepta o eixo y no ponto (0 , −1200), que é o custo fixo mensal. A reta tem uma inclinação positiva, refletindo que, à medida que o número de camisetas vendidas aumenta, o lucro da empresa cresce proporcionalmente. A interseção da reta com o eixo x mostra que, para que o lucro seja zero (ou seja, a empresa cubra apenas o custo fixo), a empresa precisa vender 10 camisetas. Esse comportamento linear indica uma relação direta e constante entre o número de camisetas vendidas e o lucro.

EXERCÍCIO 2

Um trem parte de uma estação a 585 km de distância da cidade de destino e viaja a uma velocidade constante de 90 km/h. Defina o modelo matemático que descreve a posição do trem em relação à cidade de destino e calcule em quanto tempo o trem chegará à cidade.

Resolução

Para modelar a distância do trem à cidade destino, devemos observar os seguintes pontos:

- vamos representar com *x* o tempo decorrido, em horas, a partir da saída da estação inicial;
- S*(x)* representará a função que indica a distância, em quilômetros, do trem até a cidade de destino, em função do tempo decorrido, em horas, desde a saída da estação inicial;
- à medida que o tempo passa, a distância entre o trem e a cidade diminui a uma taxa de 90 km a cada hora, então temos a = -90; e
- a distância inicial é de 585 km, logo *b* = 585.

Assim, o modelo matemático para a posição *S(x)* do trem em função das horas decorridas *x* será:

$$S(x) = 585 - 90x$$

Para determinar em quanto tempo o trem chegará ao destino, devemos calcular o *x* para o qual *S(x) = 0:*

$$S(x) = 0 \rightarrow 585 - 90x = 0 \rightarrow 90x = 585 \rightarrow x = \frac{\cancel{585}^{13}}{\cancel{90}^{2}} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

Portanto, o trem chegará à cidade de destino após 6 horas e meia, ou seja, 6 horas e 30 minutos.

Figura 5: Gráfico do movimento retilíneo uniforme.

O gráfico esboçado na figura 5 representa o movimento de um trem que parte de uma estação a 585 km da cidade de destino. A reta, com inclinação negativa, reflete que, à medida que o tempo passa, a distância entre o trem e a cidade diminui de forma constante. A interseção da reta com o eixo *x* indica que, após 6,5 horas, o trem chega ao destino, ou seja, a distância entre o trem e a cidade é zero. Esse gráfico demonstra a diminuição linear e constante da distância ao longo do tempo.

EXERCÍCIO 3

Um forno industrial resfria a uma taxa constante de 15°C por hora. Após 3 horas de resfriamento, a temperatura do forno é de 120°C. Determine o modelo matemático que descreve a temperatura do forno em função do tempo e calcule qual era a temperatura inicial.

Resolução

Para modelar a temperatura do forno, podemos observar os seguintes pontos:

- vamos representar com *x* o tempo decorrido, em horas, após o desligamento do forno;
- T*(x)* representará a função que descreve a temperatura do forno em função do tempo;
- a temperatura do forno diminui a uma taxa constante de 15°C por hora, logo a = -15; e
- a temperatura inicial do forno é desconhecida, portanto, o valor de *b* deve ser calculado.

Portanto, temos o seguinte modelo:

$$T(x) = b - 15x$$

Sabemos que, após 3 horas, a temperatura é de 120°C, ou seja, *T(3)* = 120. Substituindo esse valor no modelo, podemos calcular *b*:

$$T(3) = 120 \rightarrow b - 15 \cdot 3 = 120 \rightarrow b - 45 = 120 \rightarrow b = 120 + 45 = 165$$

Portanto, a temperatura inicial do forno era de 165°C, e o modelo que descreve a temperatura do forno ao longo do tempo é:

$$T(x) = 165 - 15x$$

O gráfico da figura 6 ilustra a queda da temperatura de um forno industrial ao longo do tempo. A reta, com inclinação negativa, mostra uma redução constante de 15°C por hora.

A interseção da reta com o eixo y revela a temperatura inicial do forno, que era de 165°C, e, conforme o tempo avança, essa temperatura diminui. No entanto, é importante destacar que a linearidade deste modelo é válida apenas dentro de uma faixa específica de temperatura. Na prática, quando a temperatura se aproxima da temperatura ambiente, o modelo linear deixa de ser adequado e modelos mais complexos são necessários para descrever o comportamento do sistema.

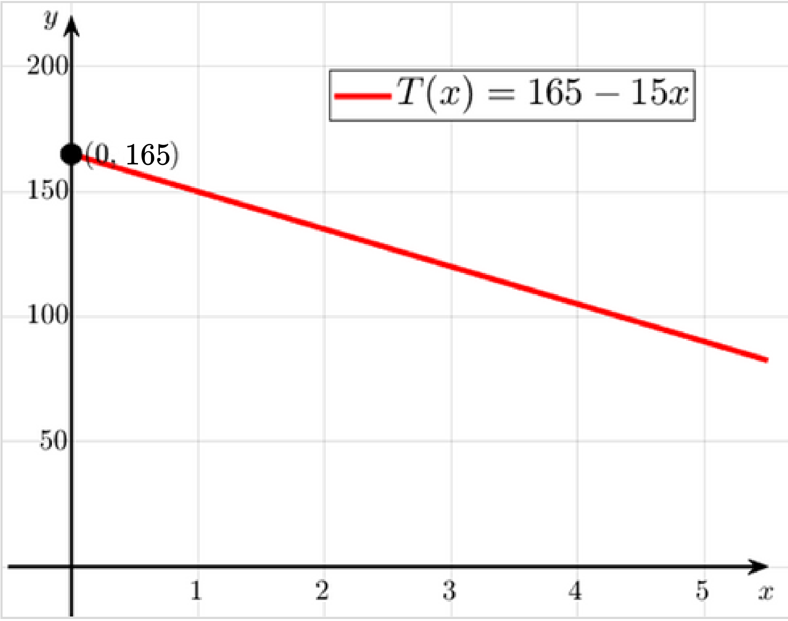


Figura 6: Gráfico da temperatura do forno.

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função afim e função quadrática. (DANTE)

Capítulo 1: função afim.

- A função afim (p. 20 - 56).

Prisma Matemática: conjuntos e funções. (BONJORNO)

Capítulo 2: função afim.

- Função afim (p. 82 - 89).
- Gráfico da função afim (p. 93 - 99).
- Crescimento e decrescimento da função afim (p. 100).

Atividades

ATIVIDADE 1

Confira o anúncio com o preço do quilograma de carne no açougue de Carlos.

Imagem elaborada com o Canva

Sabemos que o valor pago por um cliente é diretamente proporcional à quantidade de carne adquirida.

a) Quanto pagará um cliente que comprar 1,5 kg de carne neste açougue?

b) Com R$ 245,00 disponíveis, qual é a quantidade máxima de carne (em quilos) que o cliente pode comprar nesse açougue?

c) Qual é a expressão matemática que relaciona o preço (*P*) a ser pago, em reais, em função da quantidade (*x*) de carne comprada, em quilos, neste açougue?

ATIVIDADE 2

Lucas é garçom em um restaurante e recebe um salário fixo mensal de R$ 2 500,00. Além disso, ele tem direito a uma comissão de 10% sobre o consumo dos clientes que escolhem pagar gorjeta. Supondo que todos os clientes atendidos por Lucas durante o mês decidiram pagar a gorjeta e que o total de consumo no mês pode ser representado por *x* reais, qual é a expressão que permite calcular o valor total *V(x)* recebido por Lucas no final do mês?

a) $V(x) = 2\,500 + 0{,}1x$
b) $V(x) = 2\,500 \times 0{,}1x$
c) $V(x) = 2\,500 + x$
d) $V(x) = 2\,500 + 0{,}01x$
e) $V(x) = 2\,500 + 10x$

ATIVIDADE 3

(SAEPE 2009) Carlos e Ricardo estão fazendo uma brincadeira, em que Carlos diz um número e Ricardo transforma esse número em outro. O resultado das 5 primeiras rodadas está apresentado no quadro abaixo.

CARLOS	1	2	3	4	5
RICARDO	-3	-1	1	3	5

Chamando de x o número dito por Carlos e de y o resultado encontrado por Ricardo, qual a expressão que permite encontrar o resultado fornecido por Ricardo?

a) $y = x$

b) $y = 3x$

c) $y = x + 2$

d) $y = x + 4$

e) $y = 2x - 5$

ATIVIDADE 4

Na academia de ginástica, o valor da mensalidade $M(x)$, em reais, pode ser calculado pela função $M(x) = 120 + 8x$, onde x representa o número de dias de atraso no pagamento da mensalidade. Em um determinado mês, Fernanda pagou R$ 152,00 pela mensalidade da academia.

Com base nessas informações, pode se dizer que Fernanda atrasou o pagamento dessa mensalidade em quantos dias?

ATIVIDADE 5

Luciano contraiu um empréstimo no valor de R$ 2 000,00, com uma taxa de juros simples de 3% ao mês. A função que descreve o montante total $M(t)$, em reais, após t meses de empréstimo é dada por $M(t) = 2\ 000 + 60t$, onde t representa o número de meses que se passaram desde a contratação do empréstimo.

Com base nessa função, responda:

a) Qual será o montante total que Luciano deverá pagar após 12 meses?

b) Justifique a presença do coeficiente angular $a = 60$, que multiplica t na função, levando em consideração que o valor inicial do empréstimo é de R$ 2 000,00 e a taxa de juros é de 3% ao mês, aplicada a juros simples.

ATIVIDADE 6

Considere duas empresas, A e B, que oferecem o serviço de aluguel de patinetes elétricos. O custo do aluguel pela empresa A é composto por uma taxa de R$ 4,00 e R$ 0,80 por hora de aluguel. Já a empresa B cobra uma taxa de R$ 6,00 e R$ 0,50 por hora de aluguel.

Com base nessas informações, qual afirmação está correta?

a) O custo do aluguel pela empresa A é calculado pela função $f(x) = 0{,}80 + 4x$, onde x é o número de horas de aluguel.

b) O custo do aluguel pela empresa B é calculado pela função $g(x) = 0{,}50 + 6x$, onde x é o número de horas de aluguel.

c) Para o aluguel de 4 horas, o custo pela empresa B é de R$ 9,00.

d) Para o aluguel de 4 horas, o custo pela empresa A é de R$ 8,00.

e) O aluguel de 8 horas é mais econômico se feito pela empresa B.

ATIVIDADE 7

Uma empresa de transporte de equipamentos de construção cobra uma taxa de frete que varia conforme a distância entre o local de entrega e o armazém central da empresa. A tabela a seguir mostra os preços cobrados para diferentes distâncias:

Preço da Entrega por Distância	
Distância	**Preço**
2 km	20,80
5 km	22,00
10 km	24,00

Esses valores podem ser representados por uma função de 1º grau que calcula o valor $V(x)$, em reais, a ser pago pelo frete para a entrega de equipamentos em um local que fica a x quilômetros de distância do armazém central.

Qual é a função que descreve essa tarifa de frete?

a) $V(x) = 0{,}4x + 20$

b) $V(x) = 2x + 20{,}80$

c) $V(x) = 3x + 1{,}20$

d) $V(x) = 10{,}4x + 18{,}80$

e) $V(x) = 20x + 0{,}4$

ATIVIDADE 8

(ENEM 2024 - PPL) Uma escola analisou as propostas de cinco empresas para alugar uma máquina fotocopiadora que atenda à demanda de 12 000 cópias mensais. Cada empresa cobra um valor fixo pelo aluguel mensal da máquina, mais um valor proporcional ao número de cópias realizadas, ambos em real. Assim, o custo total C, do aluguel de uma máquina, que atenda a uma demanda de x cópias mensais, em cada uma das cinco empresas, pode ser dado pelas expressões:

- empresa I: $C = 500 + 0{,}40x$;
- empresa II: $C = 800 + 0{,}50x$;
- empresa III: $C = 2\ 000 + 0{,}20x$;
- empresa IV: $C = 1\ 100 + 0{,}25x$;
- empresa V: $C = 600 + 0{,}30x$.

A escola escolheu a empresa que apresentou a proposta que fornecia o serviço necessário pelo menor custo mensal. A empresa escolhida foi a:
a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

ATIVIDADE 9

Em uma clínica, o preço do tratamento com um medicamento específico é definido por uma taxa fixa de R$ 50,00 para o fornecimento de 10 doses. Caso o paciente precise de doses adicionais, será cobrado R$ 2,00 por cada dose extra. Marcos começou o tratamento e, ao final do período, precisou de 40 doses extras.
Qual foi o valor total, em reais, que Marcos pagou pelo tratamento?

a) R$ 50,00
b) R$ 80,00
c) R$ 110,00
d) R$ 130,00
e) R$ 150,00

ATIVIDADE 10

Maria possui uma loja no bairro especializada na venda de salgadinhos sortidos de diversos sabores. O custo fixo mensal da loja, que inclui aluguel, energia, água e outros gastos, é de R$ 2 400,00. Cada salgadinho é vendido por R$ 8,00, mas o lucro líquido de Maria por unidade vendida é de R$ 5,00, considerando o desconto de todos os custos envolvidos na produção e venda de cada unidade.

a) Qual é a expressão matemática que permite calcular o lucro de Maria em função do número de unidades de salgadinhos vendidos no mês?

b) Quantas unidades de salgadinhos Maria precisará vender no mês para cobrir suas despesas fixas de R$ 2 400,00 e começar a obter lucro?

c) Para que no final do mês Maria tenha um lucro líquido de pelo menos um salário mínimo, no valor de R$ 1 518,00, quantas unidades de salgadinhos ela precisará vender no mês?

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

(ENEM - 2024) Uma empresa produz mochilas escolares sob encomenda. Essa empresa tem um custo total de produção, composto por um custo fixo, que não depende do número de mochilas, mais um custo variável, que é proporcional ao número de mochilas produzidas. O custo total cresce de forma linear, e a tabela apresenta esse custo para três quantidades de mochilas produzidas.

Quantidade de mochilas	30	50	100
Custo total (R$)	1 050,00	1 650,00	3 150,00

O custo total, em real, para a produção de 80 mochilas será:

a) 2400,00.
b) 2520,00.
c) 2550,00.
d) 2700,00.
e) 2800,00

Gabarito

QUESTÃO 02: A
QUESTÃO 03: E
QUESTÃO 06: E
QUESTÃO 07: A
QUESTÃO 08: D
QUESTÃO 09: D

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

Para responder às questões devemos observar o anúncio com o preço do quilograma da Carne.

a) Considerando que o preço do kg da alcatra é R$ 49,00, para calcular o valor a ser pago por 1,5 kg, basta multiplicar: $P = 49 \cdot 1,5 = R\$\ 73,50$. Portanto, o cliente pagará R$ 73,50 por 1,5 kg de carne.

b) Para determinar a quantidade de carne que pode ser comprada, basta dividir o total de R$ 245,00 pelo preço do kg da carne, que é R$ 49,00:

$x = \frac{245}{49} = 5\ kg$ Assim, o cliente pode comprar 5 kg de carne com R$ 245,00.

c) Sabendo que o valor unitário do kg da carne alcatra está sendo vendida a R$ 49,00, podemos estabelecer a expressão matemática para calcular o preço (*P*) a ser pago em função de x quilograma de carne por: $P = 49x$

ATIVIDADE 2

Vamos analisar a situação:

- O salário fixo de Lucas é R$ 2 500,00.
- A comissão dele é 10% sobre o total de consumo dos clientes que pagaram gorjeta, que pode ser expresso por $10\% = \frac{10}{100} = 0,1$ de *x*.

A expressão que representa o valor total *V(x)* que Lucas recebe no final do mês é a soma do seu salário fixo e da comissão: *V(x) = 2 500 + 0,1x*
Portanto, a resposta correta é a **Letra A**.

ATIVIDADE 3

Vamos observar a relação entre os números que Carlos diz (representados por *x*) e os resultados que Ricardo dá (representados por *y*):

- Quando x = 1, y = −3
- Quando x = 2, y = −1
- Quando x = 3, y = 1
- Quando x = 4, y = 3
- Quando x = 5, y = 5

Percebendo a diferença entre os valores de *y* e *x*, podemos observar que, para cada valor de *x*, Ricardo multiplica por 2 e subtrai 5 unidades. Portanto, a relação entre *x* e *y* é dada por: **y = 2x - 5**. Logo, a resposta correta é a **LETRA E**.

ATIVIDADE 4

Sabemos que o valor da mensalidade *M(x)* pode ser calculado pela função: *M(x)* = 120 + 8*x*, onde *x* é o número de dias de atraso.

No caso, Fernanda pagou R$ 152,00 pela mensalidade. Então, podemos substituir esse valor na função e resolver a equação para x:

$$M(x) = 120 + 8x \Rightarrow 152 = 120 + 8x \Rightarrow 152 - 120 = 8x \Leftrightarrow 8x = 32$$

$x = \frac{32}{8} = 4$ Portanto, Fernanda atrasou o pagamento da mensalidade em 4 dias.

ATIVIDADE 5

A função que descreve o montante total *M(t)* após *t* meses de empréstimo é dada por: *M(t)* = 2 000 + 60*t*.

a) Para calcular o montante após 12 meses, basta substituir *t* = 12 na função:

$$M(x) = 2\,000 + 60t \Rightarrow M(12) = 2\,000 + 60 \cdot 12 \Rightarrow M(12) = 2\,000 + 720$$

$$M(12) = 2\,720$$

Portanto, o montante total que Luciano deverá pagar após 12 meses será R$ 2 720,00.

b) Considerando que o valor inicial do empréstimo, ou seja, o capital, é de R$ 2 000,00, esse valor é representado pela constante na função. O coeficiente angular *a* = 60 corresponde ao valor adicional que representa os juros simples acumulados a cada mês.

Agora, vamos entender por que o coeficiente é 60: a taxa de juros simples é de 3% ao mês, logo: 3% de R$ 2 000,00 é: $3\% \cdot 2\,000 \Rightarrow \frac{3}{100} \cdot 2\,000 \Rightarrow \frac{6\,000}{100} = 60$

Portanto, o coeficiente angular 60 representa **o valor dos juros acumulados a cada mês**, que é de R$ 60,00, correspondendo a 3% do valor inicial do empréstimo de R$ 2 000,00.

ATIVIDADE 6

Vamos analisar cada alternativa com base nas informações dadas sobre o custo do aluguel dos patinetes elétricos pelas empresas A e B.

a) **Errado**. A função correta para o custo da empresa A é *f(x) = 4 + 0,80x*, e não *f(x) = 0,80 + 4x*.

b) **Errado**. A função correta para o custo da empresa B é *g(x) = 6 + 0,50x* , e não *g(x) = 0,50 + 6x.*

c) Vamos calcular o custo do aluguel do patinete por 4 horas pela empresa B, usando a função *g(x) = 6 + 0,50x*: *g(4) = 6 + 0,50 . 4 = 6 + 2 = 8*, portanto **Errado**. O custo é R$ 8,00, e não R$ 9,00.

d) Vamos calcular o custo do aluguel do patinete por 4 horas pela empresa A usando a função *f(x) = 4 + 0,80x*: *f(4) = 4 + 0,80 . 4 = 4 + 3,2 = 7,20*, portanto **Errado**. O custo é R$ 7,20, e não R$ 8,00.

e) Vamos calcular o custo de um aluguel por 8 horas para ambas as empresas.

- Para a empresa A: *f(8) = 4 + 0,80 . 8 = 4 + 6,40 = 10,40*.
- Para a empresa B: *g(8) = 6 + 0,50 . 8 = 6 + 4 = 10,00.*

Um aluguel de 8 horas é mais econômico pela empresa B, que custa R$ 10,00, enquanto a empresa A cobra R$ 10,40, Portanto, **Correto**. A alternativa correta é a **LETRA E**.

ATIVIDADE 7

Como a relação entre preço e distância é linear (uma função de 1º grau), a fórmula da função será da forma: $V(x) = ax + b$, onde *x* é a distância, em quilômetros; *V(x)* é o preço do frete; *a* é a taxa de variação do preço por quilômetro (o coeficiente angular da reta); e *b* é valor inicial do preço quando a distância é 0 (o coeficiente linear da reta).

Determinando a lei de formação calculando seus coeficientes *a* e *b*, extraímos dois pares ordenados da tabela, por exemplo (5, 22) e (10, 24).

Calculando *a*: $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow a = \dfrac{24 - 22}{10 - 5} \Rightarrow a = \dfrac{2}{5} = 0,4$

Sabendo que na expressão acima *V(x)* está representando *y*. Utilizando *a* = 0,4 e um dos pares ordenados, por exemplo, o (5, 22), para calcular *b*, teremos:

$$y = ax + b \Leftrightarrow b = y - ax$$

$$b = 22 - 0,4 \cdot 5 \Rightarrow b = 22 - 2 = 20$$

Portanto, a lei de formação é *y = 0,4x + 20*, ou seja, *V(x) = 0,4x + 20*.

Alternativa correta é a **LETRA A**.

Professor(a), a seguir, apresentamos uma alternativa para determinar a lei da função do 1º grau por meio de dois pares ordenados, utilizando o método de sistemas de equações. Fique à vontade para utilizar qualquer um dos dois métodos apresentados em sala de aula, conforme julgar mais adequado.

Sabemos que a relação entre preço e distância pode ser representado por uma função do 1º grau, dado pela expressão $V(x) = ax + b$.

Para determinar *a* e *b*, usamos dois pontos da tabela e calculamos a equação da reta, por exemplo, substituindo os valores de *x* e *y* na função, onde *V(x)* será representado por *y.*

- Ponto (5, 22): $y = ax + b \Rightarrow 22 = a \cdot 5 + b \Leftrightarrow 5a + b = 22$
- Ponto (10, 24): $y = ax + b \Rightarrow 24 = a \cdot 10 + b \Leftrightarrow 10a + b = 24$

Agora, com o resultado da equação, iremos montar e resolver um sistema de equações: $\begin{cases} 5a + b = 22^{\times(-1)} \\ 10a + b = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a - \cancel{b} = -22 \\ 10a + \cancel{b} = 24 \end{cases}$ $\overline{5a = 2}$ $\quad a = \dfrac{2}{5} = 0,4$

Agora, a partir do valor de *a = 0,4* é possível substituir na equação para determina o valor de b: $10a + b = 24 \Rightarrow 10 \cdot 0,4 + b = 24 \Rightarrow 4 + b = 24 \Rightarrow b = 24 - 4 = 20$

Logo, se *a = 0,4* e *b = 20*, teremos a função *V(X)*, representada por $V(x) = 0,4x + 20$.

Alternativa correta é a **LETRA A**.

ATIVIDADE 8

Para encontrar qual empresa apresenta o menor custo mensal para realizar 12 000 cópias, basta substituir *x* = 12 000 nas expressões fornecidas para cada empresa e calcular o valor do custo *C* para cada uma delas.

Vamos fazer os cálculos:

Empresa I: $C = 500 + 0,40x \Rightarrow C = 500 + 0,40 \cdot 12\,000 \Rightarrow C = 500 + 4\,800 = 5\,300$

Empresa II: $C = 800 + 0,50x \Rightarrow C = 800 + 0,50 \cdot 12\,000 \Rightarrow C = 800 + 6\,000 = 6\,800$

Empresa III: $C = 2\,000 + 0,20x \Rightarrow C = 2\,000 + 0,20 \cdot 12\,000 \Rightarrow C = 2\,000 + 2\,400 = 4\,400$

Empresa IV: $C = 1\,100 + 0,25x \Rightarrow C = 1\,100 + 0,25 \cdot 12\,000 \Rightarrow C = 1\,100 + 3\,000 = 4\,100$

Empresa V: $C = 600 + 0,30x \Rightarrow C = 600 + 0,30 \cdot 12\,000 \Rightarrow C = 600 + 3\,600 = 4\,200$

Analisando os resultados obtidos, é possível identificar que a empresa IV apresenta o menor custo mensal para realizar 12 000 cópias, com um custo de R$ 4 100,00. Portanto, a empresa escolhida foi a empresa IV. Alternativa correta **LETRA D**.

ATIVIDADE 9

Vamos calcular o valor total que Marcos pagou pelo tratamento.

1º Sabemos que há uma taxa fixa para o fornecimento de 10 doses no valor de R$ 50,00 e um custo extra de R$ 2,00 por cada dose extra caso seja necessário. Considerando que Marcos precisou de 40 doses extras, o valor das doses extras será: *V* = 40 . 2 = 80 reais.

2º Calcular o valor total do tratamento: Valor total = 50 + 80 = 130 reais, portanto, Marcos pagou **R$ 130,00 pelo tratamento**. Alternativa correta **LETRA D**.

ATIVIDADE 10

Vamos resolver as questões passo a passo com base nas informações fornecidas:
a) Considerando que há um custo de fixo mensal de R$ 2 400,00 e que o Lucro liquido com a venda de cada unidade de salgadinho é de R$ 5,00, teremos a seguinte expressão: *L(x) = 5x - 2 400*, sendo que *x* representa o número de unidades de salgadinhos vendidos. Logo a resposta é ***L(x) = 5x - 2 400*.**

b) Para cobrir as despesas fixas e começar a obter lucro, o lucro líquido *L(x)* deve ser zero (sem prejuízo e sem lucro). Então, precisamos resolver a equação, onde *L(x)* = 0:

$$L(x) = 5x - 2\,400 \Leftrightarrow 5x - 2\,400 = 0 \Rightarrow 5x = 0 + 2\,400 \Rightarrow 5x = 2\,400 \Rightarrow x = \frac{2\,400}{5} = 480$$

Portanto, Maria precisará vender 480 unidades de salgadinhos para cobrir suas despesas fixas e começar a obter lucro.

c) Para que o lucro líquido seja de pelos menos R$ 1 518,00, precisamos resolver a equação para *L(x)* = 1 518,00, determinando o valor de *x*.

$$L(x) = 5x - 2\,400 \Leftrightarrow 5x - 2\,400 = 1\,518 \Rightarrow 5x = 1\,518 + 2\,400 \Rightarrow 5x = 3\,918 \Rightarrow x = \frac{3\,918}{5} = 783,6$$

Como o número de unidades vendidas precisa ser um número inteiro, Maria precisará **vender 784 unidades** de salgadinhos para atingir um lucro líquido de, pelo menos, R$ 1 518,00.

RESPOSTA DA ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Para resolver essa questão, precisamos utilizar a informação de que o custo total da produção cresce de forma linear e utilizar a tabela fornecida que mostra as quantidades de mochilas e os respectivos custos.
Por ser um crescimento linear, podemos presumir que o custo total pode ser representado na seguinte forma: *C(x)* = custo fixo + o custo variável por mochila, ou seja, *C(x)* = *b* + *ax*, onde *a* e *b* são os coeficientes angular e linear, respectivamente.
Para determinar a lei de formação calculando seus coeficientes *a* e *b*, extraímos dois pares ordenados da tabela, por exemplo (30, 1050) e (50, 1650).

Calculando *a*: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow a = \frac{1650 - 1050}{50 - 30} \Rightarrow a = \frac{600}{20} = 30$

Sabendo que na expressão C*(x)* será representado por *y*. Utilizando *a* = 30 e um dos pares ordenados, por exemplo (50, 1650) para calcular *b*, teremos:

$$y = ax + b \Leftrightarrow b = y - ax \qquad b = 1\,650 - 30 \cdot 50 \Rightarrow b = 1\,650 - 1\,500 = 150$$

Logo, a função tem a lei de formação *y = 30x + 150*, ou seja, C*(x) = 30x + 150*.

Portanto, para determinar custo de produção de 80 mochilas, podemos substituir na função: $C(80) = 30 \cdot 80 + 150 \Rightarrow C(80) = 2\,400 + 150 = 2\,550$
A alternativa correta é a **LETRA C**.

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: conjuntos e funções.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante Matemática, 1º ano: ensino médio.** São Paulo: Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: função afim e função quadrática.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: Ática, 2020.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções.** 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: conjuntos e funções.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Função Afim e Função Quadrática.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

GOV.BR. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Inep. **Provas e Gabaritos. 2024**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 08/02/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico da Escola**. SAEPE – 2009 / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2009/BOLETIM_SAEPE_VOL3_3EM_MAT_2009.pdf>. Acessado em: 08/02/2025.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Conjuntos e função afim** Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL — GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

MODELO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 2º GRAU

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT302 Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	• Resolver problemas em contextos diversos utilizando modelos de funções polinomiais do 2º grau.	**D133_M** Resolver problema envolvendo uma função do 2º grau.

Contextualização

Depois de entender as funções de 1º grau e as relações lineares simples, chegou o momento de dar um passo adiante. Muitas situações no mundo real não seguem um padrão reto ou constante, mas sim uma curva chamada parábola. Esse comportamento é exatamente o que as funções de 2º grau conseguem modelar. Elas estão presentes quando as mudanças não são proporcionais, mas sim influenciadas por fatores que provocam aumento e diminuição, como na trajetória de um objeto lançado ao ar ou o impacto de uma promoção no volume de vendas.

Essas funções nos ajudam a entender situações mais complexas, como a maximização de lucros ou a previsão de eventos que têm um ponto de equilíbrio. Por exemplo, a altura de um projétil em sua trajetória ou o ponto ótimo para investir em um produto antes que a demanda comece a cair. Funções de 2º grau são representações perfeitas para analisar situações onde existe um valor máximo ou mínimo, algo que as funções lineares não conseguem modelar.

Estudar essas funções é aprender a identificar padrões mais sofisticados no comportamento dos fenômenos ao nosso redor. Elas permitem que você antecipe o futuro, tome decisões mais informadas e até mesmo resolva problemas de otimização em diversos contextos, como na economia, no planejamento de recursos ou na análise de desempenho de projetos.

Neste material, você vai explorar como as funções de 2º grau funcionam e como podem ser aplicadas em situações práticas do cotidiano. Ao dominar esse tipo de função, você estará preparado para lidar com desafios mais avançados e aumentar sua capacidade de entender, analisar e solucionar problemas mais complexos.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

REVISÃO DE CONCEITOS BÁSICOS

Função polinomial de 2º grau

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Uma função polinomial de 2º grau, também conhecida como função quadrática, é expressa na forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Em que a, b e c são constantes reais chamadas de **coeficientes da função**.

O gráfico de uma função polinomial de 2º grau é uma curva chamada de **parábola**, em que a concavidade depende do valor do coeficiente a (esse aspecto será analisado em detalhes em um tópico posterior deste material).

Propriedades da função de 2º grau

Concavidade

- Se $a > 0$, a função tem **concavidade voltada para cima.**
- Se $a < 0$, a função tem **concavidade voltada para baixo.**

Na figura 1, podemos observar que a função $f(x) = x^2 - 2$ apresenta uma parábola com concavidade voltada para cima, pois seu coeficiente é positivo ($a = 1$). Por outro lado, na figura 2 temos o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 2$, onde a concavidade está voltada para baixo devido ao coeficiente ser negativo ($a = -1$).

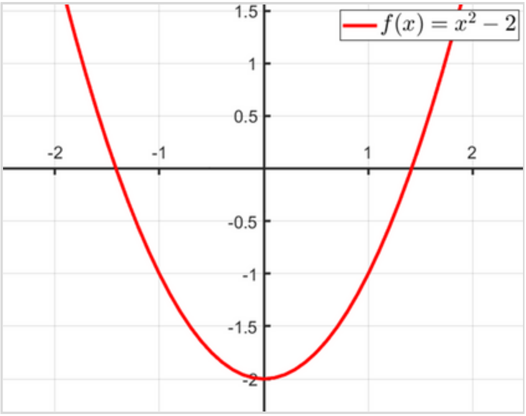


Figura 1: Gráfico de uma função polinomial de 2º grau com a concavidade voltada para cima.

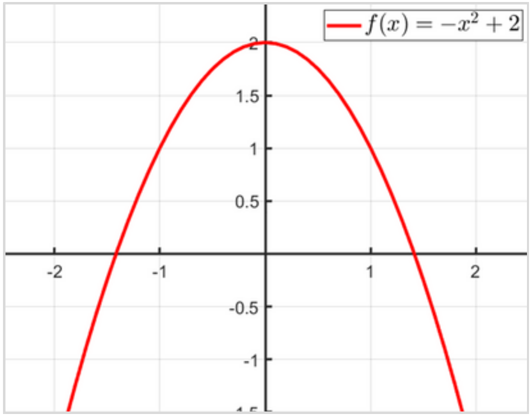


Figura 2: Gráfico de uma função polinomial de 2º grau com a concavidade voltada para baixo.

Zeros da função

Os **zeros** da função, também conhecidos como **raízes**, são os valores de x que satisfazem $f(x) = 0$. Em funções de 2º grau, os zeros podem ser obtidos por meio da fórmula de **Bhaskara**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Optamos pelo termo **"fórmula de Bhaskara"**, considerando as referências utilizadas neste material. Mas, o termo **"fórmula resolutiva"** também é utilizado e, por alguns autores, considerado mais adequado.

Em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

O valor de Δ determina o número de zeros reais da função quadrática de forma que:

- quando $\Delta > 0$, a função tem **duas raízes reais**;
- quando $\Delta = 0$, a função tem **uma raiz real**; e
- quando $\Delta < 0$, a função **não tem raiz real**.

VOCÊ SABIA?

Em ecologia, o crescimento de populações de organismos pode ser modelado por equações quadráticas, especialmente quando há fatores limitantes que afetam o crescimento, como recursos limitados ou competição entre espécies.

Exemplo 1

Calcule as raízes da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Para esta função, temos $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$.

Disto, calculamos as raízes por Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

Denotando as raízes como x_1 e x_2, temos

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}^{1}} = 1$$

$$x_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}^{1}} = 3$$

Portanto, o conjunto solução é $\{1, 3\}$.

Na figura 3 temos o gráfico desta função. Como $a > 0$, a concavidade está voltada para cima. Além disso, como $\Delta > 0$, existem de duas raízes reais distintas, representadas pelos pontos onde a parábola intercepta o eixo x.

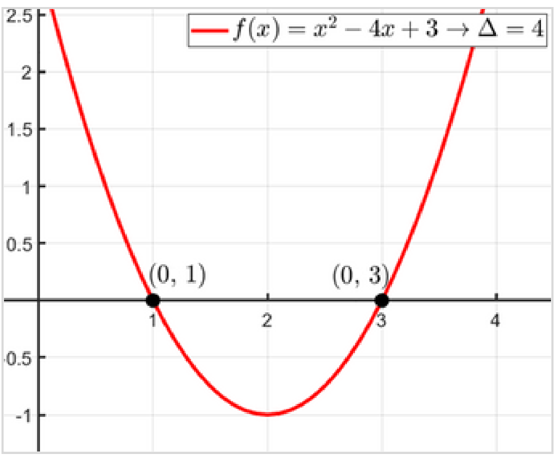


Figura 3: Gráfico de uma função polinomial de 2º grau com duas raízes reais.

Exemplo 2

Calcule as raízes da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Para esta função, temos $a = 1$, $b = -4$ e $c = 4$.

Disto, calculamos as raízes por Bhaskara :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}^{1}} = 2$$

Portanto, o conjunto solução é $\{2\}$.

Na figura 4 temos o gráfico desta função. Como $a > 0$, a concavidade está voltada para cima. Além disso, como $\Delta = 0$, a parábola toca o eixo x em um único ponto, resultando em uma única raiz real.

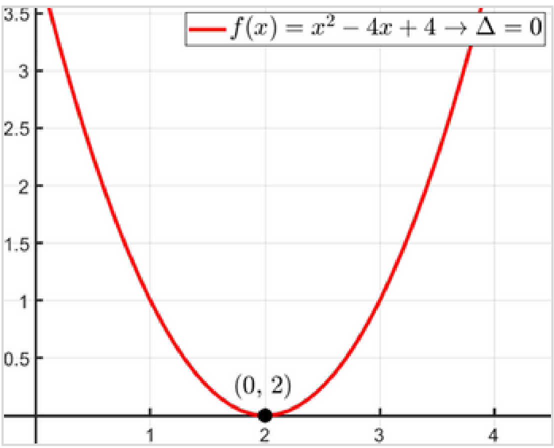


Figura 4: Gráfico de uma função polinomial de 2º grau com um raiz real.

Exemplo 3

Calcule as raízes da função $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Para esta função, temos $a = 1$, $b = -4$ e $c = 5$.

Disto, calculamos Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$$

Como $\Delta < 0$, não há raiz real para essa função.

Na figura 5 temos o gráfico desta função. Como $a > 0$, a concavidade está voltada para cima. Além disso, como $\Delta < 0$, não existem raízes reais nesta função, pois o discriminante negativo indica que a parábola não cruza o eixo x, permanecendo completamente acima dele (caso $a < 0$, o gráfico de uma função com $\Delta < 0$ estaria abaixo do eixo x).

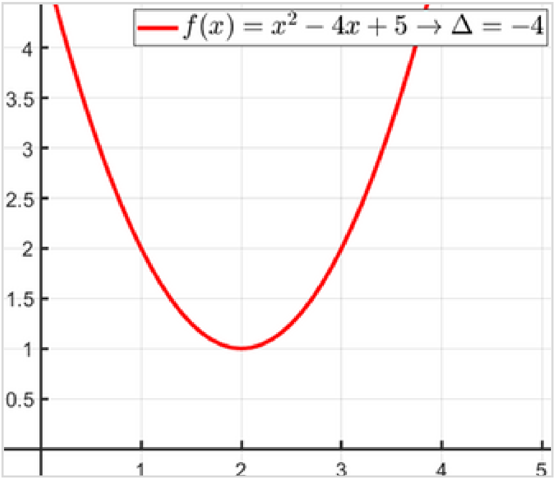


Figura 5: Gráfico de uma função polinomial de 2º grau sem raízes reais.

Vértice da parábola

O vértice da parábola é o ponto que corresponde ao máximo (se $a < 0$) ou mínimo (se $a > 0$) da função. Suas coordenadas, x_v e y_v, são dadas por:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Exemplo 4

Calcule o vértice da função $f(x) = x^2 + 4x + 2$.

Para esta função, temos $a = 1$, $b = 4$ e $c = 2$.

Calculando as coordenadas do vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}^{1}} = -2$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = -\frac{16 - 8}{4} = -\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}^{1}} = -2$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(-2, -2)$.

Na figura 6 temos gráfico desta função com o vértice em destaque. Neste caso, o vértice representa um ponto de mínimo, pois $a > 0$, indicando que o vértice é o menor valor que a função pode alcançar.

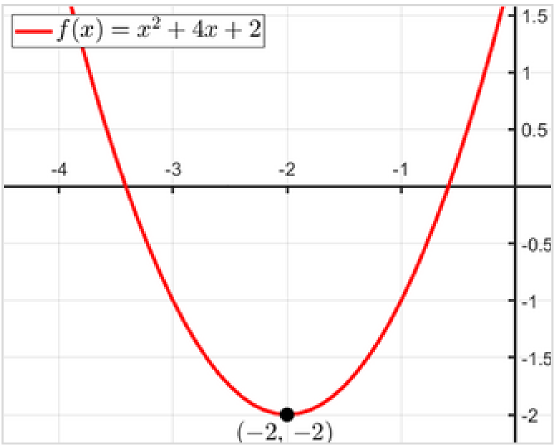


Figura 6: Gráfico de uma função polinomial de 2º grau com seu ponto de mínimo em evidência.

Exemplo 5

Calcule o vértice da função $f(x) = -x^2 + 4x - 2$.

Para esta função, temos $a = -1, b = 4$ e $c = -2$.

Calculando as coordenadas do vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot(-1)} = -\frac{4}{-2} = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}^{1}} = 2$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-2)}{4\cdot(-1)} = -\frac{16-8}{-4} = -\frac{8}{-4} = \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{4}^{1}} = 2$$

Portanto, as coordenadas do vértice são $(2, 2)$.

Na figura 7 temos o gráfico desta função com o vértice em destaque. Neste caso, o vértice representa um ponto de máximo, pois $a < 0$, indicando que o vértice é o maior valor que a função pode alcançar.

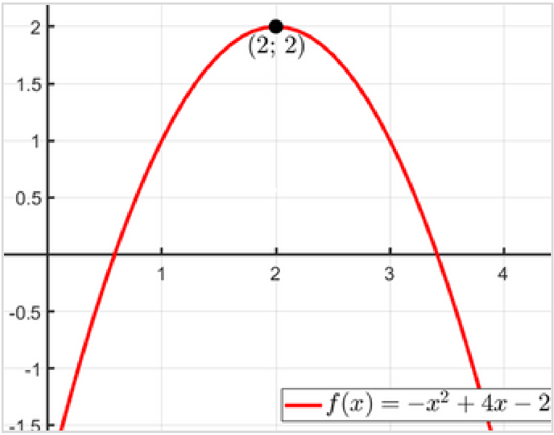


Figura 7: Gráfico de uma função polinomial de 2º grau com seu ponto de máximo em evidência.

Outra possibilidade para determinar o vértice da parábola

Considere a função representada por $f(x) = x^2 - 4x$

Na representação gráfica desta função é possível observar que suas raízes são 0 e 4 e que, passando pelo vértice (2, - 4), temos um eixo de simetria. Dessa maneira, a abscissa do vértice pode ser determinada como a média das raízes.

$$x_v = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Para determinar a ordenada do vértice:

$$f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 = 4 - 8 = -4$$

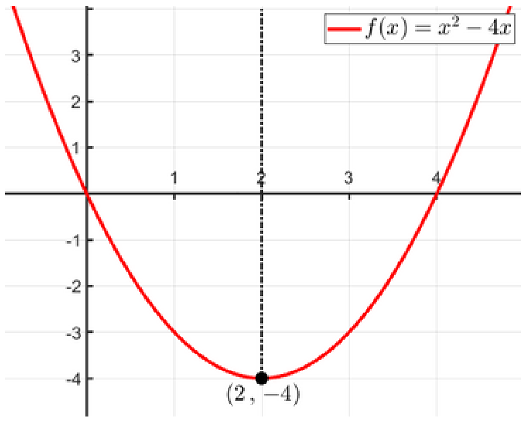


Figura 8: Gráfico de uma função polinomial de 2º grau destacando o eixo de simetria que passa pelo vértice

MODELOS MATEMÁTICOS UTILIZANDO FUNÇÃO QUADRÁTICA

Assim como as funções de primeiro grau, que modelam situações lineares, as funções de segundo grau são uma ferramenta poderosa para representar fenômenos mais complexos no mundo real, onde as relações entre as variáveis não são proporcionais e variam de maneira não-linear na forma de uma parábola.

Em diversos problemas práticos do mundo real, as funções quadráticas ajudam a descrever fenômenos em que uma grandeza atinge um valor máximo ou mínimo em algum ponto, como o custo de produção, a área de um terreno ou a altura de um objeto em movimento.

Procedimentos para resolver problemas modelados por função quadrática

1. Compreenda o problema

Leia atentamente o enunciado e identifique as informações fornecidas e o que precisa ser determinado. Pergunte-se:

- Quais são as variáveis envolvidas?
- Qual delas é a variável independente (geralmente x) e qual é a variável dependente (geralmente y ou $f(x)$)?
- A situação pode ser descrita por uma função do segundo grau?

2. Identifique a função quadrática

Verifique qual função do segundo grau representa o problema. Caso a função não seja fornecida diretamente, deduza-a a partir das informações disponíveis.

VOCÊ SABIA?

A trajetória da luz refletida em superfícies parabólicas, como algumas folhas ou estruturas naturais, pode ser descrita por equações de segundo grau. Isso é fundamental para entender como a luz se propaga e interage com o ambiente natural.

3. Defina a estratégia de resolução

Determine qual cálculo é necessário para responder à questão, por exemplo:

- **Cálculo do valor da função para um dado** x → Substitua x na equação e calcule $f(x)$.
- **Problema de otimização (máximo ou mínimo)** → Utilize a fórmula do vértice da parábola para encontrar o ponto de máximo ou mínimo, a depender da concavidade.
- **Cálculo dos zeros da função** → Resolva as raízes da função utilizando a fórmula de Bhaskara.

4. Determine os coeficientes (se necessário)

A partir da equação quadrática no formato $f(x) = ax^2 + bx + c$, identifique os valores de cada um de seus coeficientes.

5. Aplique as fórmulas e resolva o problema

Substitua os valores adequados na equação correspondente, resolva os cálculos e interprete a resposta dentro do contexto do problema.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Uma bola é arremessada para cima e sua altura, em metros, após x segundos é dada pela função:

$$\boldsymbol{h(x) = -2x^2 + 8x + 3}$$

Qual será a altura da bola após 3 segundos do seu arremesso?

Resolução

1. Compreender o problema:

- A variável independente é o tempo x, em segundos.
- A variável dependente é a altura da bola *h(x)*, em metros.

2. Identificar a função:

- Já fornecida como $h(x) = -2x^2 + 8x + 3$.

3. Definir a estratégia:

- O problema pede a altura da bola em um instante específico x = *3 segundos*.
- Para encontrar esse valor, basta calcular a função para x = *3*, ou seja, *h(3)*.

4. Determinar os coeficientes:

- Não há necessidade de determinar os coeficientes, pois basta substituir o valor de x diretamente na função para encontrar a altura correspondente.

5. Aplicar a fórmula:

$$h(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 + 3 = -2 \cdot 9 + 24 + 3 = -18 + 24 + 3 = 9$$

Portanto, a bola atingirá 9 metros de altura após 3 segundos do seu lançamento, conforme ilustrado na figura 8, onde o ponto destacado representa essa altura no instante correspondente.

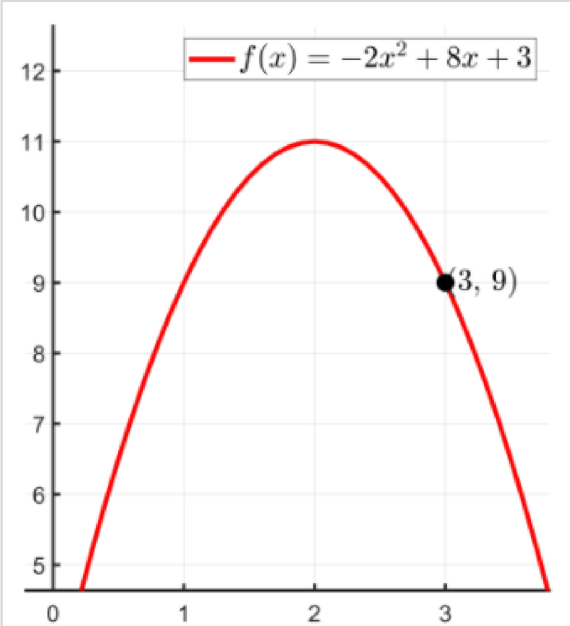


Figura 9: Gráfico da função que representa a trajetória da bola.

EXERCÍCIO 2

Uma fábrica de móveis está analisando o custo total de produção de mesas. Esse custo, em reais, depende da quantidade x de mesas produzidas e é modelado pela função:

$$\boldsymbol{C(x) = x^2 - 160x + 12\,800}$$

Onde *C(x)* é o custo total de produção em função da quantidade de mesas produzidas. Quantas mesas a fábrica deve produzir para minimizar os custos? E qual será o custo mínimo?

Resolução

1. Compreender o problema:

- A variável independente é a quantidade de mesas produzidas x.
- A variável dependente é o custo total de produção *C(x)*, em reais.

2. Identificar a função:

- Já fornecida como $C(x) = x^2 - 160x + 12\,800$

3. Definir a estratégia:

- O gráfico dessa função é uma parábola com a concavidade voltada para cima, pois $a > 0$.
- O vértice dessa parábola representa o mínimo da função, ou seja, o menor custo possível.
- Assim, basta calcular as coordenadas do vértice, onde x_v indica a quantidade de mesas que devem ser produzidas para minimizar o custo e y_v representa o custo mínimo.

4. Determinar os coeficientes:

- $a = 1,\ b = -160$ e $c = 12\,800.$

5. Aplicar as fórmulas:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-160}{2 \cdot (1)} = -\frac{-160}{2} = \frac{\cancel{160}^{80}}{\cancel{2}^{1}} = 80$$

Podemos calcular pela fórmula do vértice $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, porém o cálculo fica mais simples aplicando x_v à função, ou seja

$$y_v = C(x_v) = C(80) = 80^2 - 160 \cdot 80 + 12\,800 = 6\,400 \cancel{-12\,800} \cancel{+12\,800} = 6\,400$$

Portanto, para minimizar os custos, a fábrica deve produzir 80 unidades, resultando em um custo de R$ 6 400,00, conforme ilustrado na figura abaixo, onde o ponto destacado representa esse valor mínimo no gráfico da função.

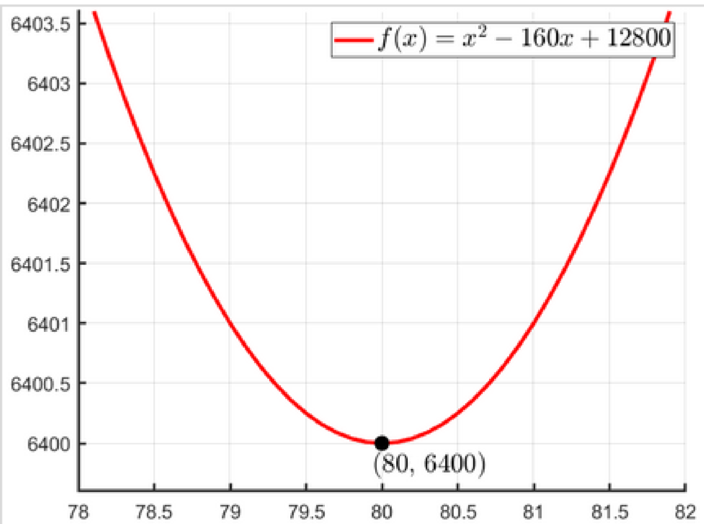


Figura 10: Gráfico da função que representa o custo de produção em função da quantidade de mesas produzidas.

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função afim e função quadrática. (DANTE)

Capítulo 2: função quadrática.

- A função quadrática (p. 78 - 83).
- Zeros de uma função quadrática (p. 84 - 96).
- Análise algébrica e gráfica da função quadrática (p. 97 - 124).

Prisma Matemática: conjuntos e funções. (BONJORNO)

Capítulo 2: função afim.

- Função afim (p. 82 - 89).
- Gráfico da função afim (p. 93 - 99).
- Crescimento e decrescimento da função afim (p. 100).

Atividades

ATIVIDADE 1

A função do 2º grau, também conhecida como função quadrática, é uma função polinomial da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde *a*, *b* e *c* são constantes, com *a* ≠ 0. Esta função é amplamente utilizada para modelar diversos fenômenos e situações do mundo real.

Considerando a definição e as características de uma função do 2º grau, analise as afirmações abaixo e indique a que está **incorreta**:

a) O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada de parábola. Se *a* > 0, a concavidade da parábola está voltada para cima; se *a* < 0, a concavidade está voltada para baixo.

b) O ponto mais alto ou mais baixo da parábola, dependendo do valor de *a*, é chamado de vértice. Esse ponto pode ser representado pelo par ordenado $(x_v;\ y_v)$, e o valor de y_v (máximo ou mínimo) pode ser calculado pela fórmula $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

c) O eixo de simetria de uma parábola é uma reta que divide a parábola em duas metades simétricas, interceptando o eixo *x* em um ponto equidistante das raízes da função, quando ela apresenta duas raízes reais.

d) Os valores de *x* que tornam *f(x)* = 0 são chamados de raízes ou zeros da função. As raízes podem ser encontradas pela fórmula resolutiva ou pela fatoração da equação quadrática.

e) A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor do discriminante delta ($\Delta = b^2 - 4ac$) e se Δ < 0, há duas raízes reais e distintas.

ATIVIDADE 2

De acordo com dados recentes, o Espírito Santo abriga uma população indígena de aproximadamente 14 441 pessoas, o que corresponde a 0,38% da população total do estado. Os povos indígenas locais têm se esforçado para manter vivas suas tradições culturais, por meio de práticas como a produção de artesanato, música, dança e rituais espirituais. A produção e venda de artesanato, como cestarias, cerâmicas e tecidos, não só desempenham um papel importante na preservação dessas tradições, mas também representam uma fonte significativa de renda e uma forma de resistência cultural.

Fonte: GOVERNO DO ES. Disponível em: <https://www.es.gov.br/Noticia/populacao-que-se-declara-indigena-cresce-50-no-espirito-santo>.

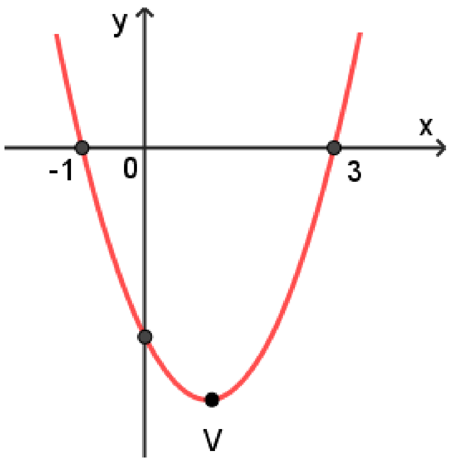
Uma associação de artesãos indígenas, por exemplo, produz e comercializa suas peças de artesanato em feiras locais. O lucro *L(x),* em reais, gerado pela venda de suas peças, pode ser modelado por uma função quadrática dada por $L(x) = -x^2 + 16x + 36$, onde *x* representa o número de peças vendidas em um dia.

a) Determine o número de peças de artesanato que maximiza o lucro da associação por dia.

b) Calcule o lucro máximo que a associação pode obter por dia com a venda dessas peças.

ATIVIDADE 3

O gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ está representado abaixo:

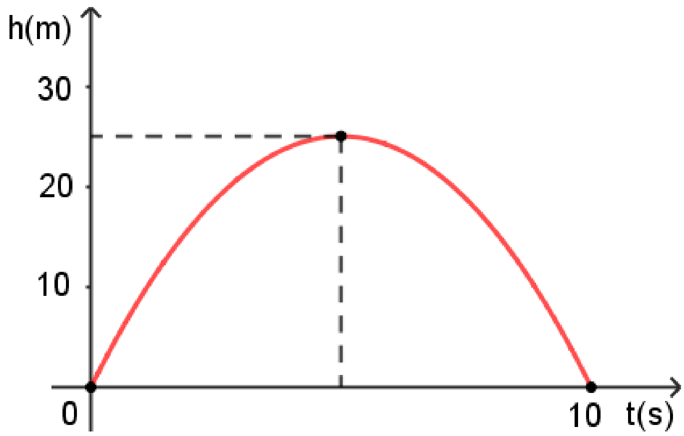


Classifique as afirmações abaixo como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) (   ) O número real *c* é negativo.
b) (   ) O número real *a* é positivo.
c) (   ) a abscissa do vértice *V* é negativa.
d) (   ) A ordenada do vértice *V* é positiva.
e) (   ) O discriminante (Δ) da função quando f(x) = 0 é nulo.
f) (   ) As raízes ou zeros da função são -1 e 3.

ATIVIDADE 4

(SAEPE - 2016) Uma pedra é atirada para cima e sua altura (*h*), em metros, é descrita pelo gráfico abaixo, que está em função do tempo *t*, dado em segundo.



Qual foi o instante em que essa pedra atingiu a altura máxima?

a) 25 s
b) 20 s
c) 10 s
d) 5 s
e) 4 s

ATIVIDADE 5

Um carro está em movimento por uma importante avenida da capital de Vitória, respeitando o limite de velocidade da via, a 10 m/s (equivalente a 36 km/h). Repentinamente, o semáforo à sua frente fica vermelho e, ao perceber que precisa parar, o motorista aciona o freio, provocando uma desaceleração constante de -4 m/s², o que faz o veículo reduzir sua velocidade até parar completamente. Sabendo que o carro parte de uma posição inicial $s_0 = 0$, podemos representar a posição do veículo durante a desaceleração por meio da função da posição *S(t)*, que descreve a posição, em metros, em função do tempo *t*, em segundos, dado através da expressão: $S(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, onde $0 \leq t \leq 2,5.$

a) Utilizando os dados da questão, modele a equação, substituindo os valores de s_0, v_0 e a, dados no problema, na expressão de *S(t)* do Movimento Uniformemente Variado.

b) Utilizando a função quadrática modelada no item a, determine a posição do carro no instante *t* = 2 segundos, após o início da frenagem.

ATIVIDADE 6

(SAEPE - 2016) O custo diário de uma produção de potes de sorvetes em uma empresa é dada pela função $C(x) = x^2 - 40x + 500$, na qual, *C(x)* é o custo em reais e *x* é o numero de unidades de potes de sorvete produzidos por essa empresa.
Quantos potes de sorvetes devem ser produzidos, diariamente, por essa empresa para que o custo da produção seja mínimo?

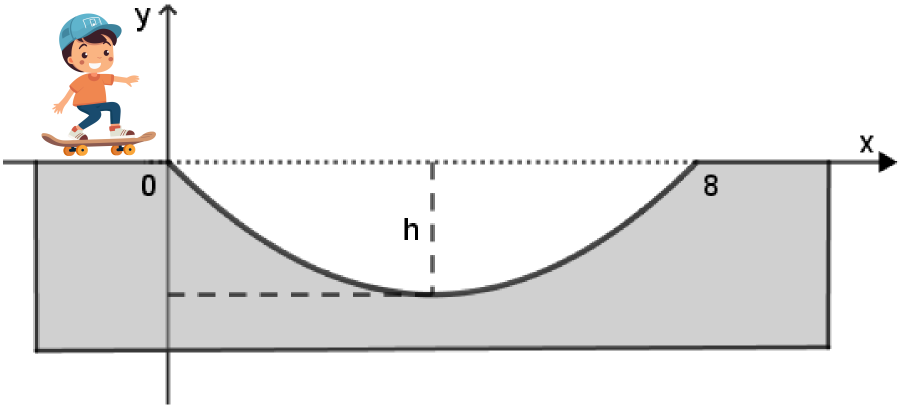
a) 13
b) 20
c) 40
d) 100
e) 500

ATIVIDADE 7

Em uma fábrica de vidro, o supervisor acompanha a temperatura do forno entre 0h e 8h de um dia, a fim de garantir que a produção ocorra dentro da faixa de calor ideal. A temperatura do forno, *T*, é descrita pela função $T(h) = -37,5h^2 + 300h$, onde *h* representa o número de horas decorridas, desde a meia-noite, e *T(h)* a temperatura, em graus Celsius. O supervisor precisa identificar a temperatura máxima registrada no forno durante esse intervalo de tempo. Qual foi a temperatura máxima, em graus Celsius, registrada entre 0h e 8h?

ATIVIDADE 8

Em uma pista de skate, uma das rampas foi projetada com o formato de uma parábola, que reflete o trajeto dos skatistas ao subirem e descerem, conforme ilustrado no sistema de eixos abaixo.



De acordo com esse sistema de eixos, h é a altura, em metros, dessa rampa, e essa parábola pode ser descrita pela função $f(x) = \frac{x^2}{8} - x$, com $0 \leq x \leq 8$.

Qual será a medida da altura h, em metros, dessa rampa?

a) 1 m
b) 2 m
c) 4 m
d) 6 m
e) 8 m

ATIVIDADE 9

(ENEM - 2016) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número *f* de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que *t* é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização começou no

a) 19° dia.
b) 20° dia.
c) 29° dia.
d) 30° dia.
e) 60° dia.

ATIVIDADE 10

(ENEM - 2020 digital) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I: R$ 2,00;
- Barra II: R$ 3,50;
- Barra III: R$ 4,00;
- Barra IV: R$ 7,00;
- Barra V: R$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate.

A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro.
Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra
a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

Gabarito

QUESTÃO 01: E
QUESTÃO 04: D
QUESTÃO 06: B
QUESTÃO 08: B
QUESTÃO 09: B
QUESTÃO 10: D

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

Considerando a definição e as características de uma função do 2º grau, podemos dizer que a alternativa incorreta é a **LETRA E**.

Justificativa: A quantidade de raízes reais de uma função quadrática realmente depende do valor do discriminante Δ, mas a explicação sobre o número de raízes está incorreta. A regra correta é:

Se $\Delta > 0$, a equação quadrática tem duas raízes reais e distintas.

Se $\Delta = 0$, a equação quadrática tem uma raiz real dupla (ou seja, duas raízes coincidentes).

Se $\Delta < 0$, a equação quadrática **não tem raízes reais**, mas sim raízes complexas (ou imaginárias).

Portanto, quando $\Delta < 0$, não há raízes reais. A parte da afirmação que diz "se $\Delta < 0$, há duas raízes reais e distintas" é **incorreta**.

ATIVIDADE 2

Vamos analisar o problema passo a passo, utilizando a função quadrática fornecida.

a) Para uma função quadrática da forma $L(x) = ax^2 + bx + c$, o número de peças que maximiza o lucro é dado pelo vértice da parábola. O valor de x que maximiza (ou minimiza) a função é calculado pela fórmula: $x_v = \dfrac{-b}{2a}$

No caso da função $L(x) = -x^2 + 16x + 36$, temos: $a = -1$, $b = 16$ e $c = 36$. Substituindo os valores na fórmula: $$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-16}{2 \cdot (-1)} = \frac{-16}{-2} = 8$$

Portanto, o número de peças que maximiza o lucro é 8.

b) Para uma função quadrática da forma *L(x)* = *ax²* + *bx* + *c*, para calcular o valor do lucro máximo (ou mínimo) de uma função podemos utilizar a fórmula: $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

Logo, precisaremos definir o valor discriminante Δ (Delta) atraves da expressão:

$\Delta = b^2 - 4ac$

No caso da função *L(x)* = −*x²* + *16x* + *36*, temos: *a* = −1, *b* = 16 e *c* = 36. Substituindo os valores na fórmula: $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 16^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 36 \Rightarrow \Delta = 256 + 144 = 400$

Agora calculando o lucro máximo, teremos: $y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-400}{4 \cdot (-1)} = \frac{-400}{-4} = 100$

Portanto, o lucro máximo que a associação pode obter por dia com a venda de 8 peças é R$ 100,00.

Professor(a), anteriormente, utilizamos a fórmula do y_v para determinar o Lucro máximo de venda no dia. No entanto, sabemos que o vértice da parábola é o ponto onde ocorre o valor de máximo ou de mínimo da função. Como já definimos que $x_v = 8$ peças, poderíamos, substituir esse valor de *x* = 8 na função *L(x)* para encontrar o lucro máximo.

$L(x) = -x^2 + 16x + 36 \Rightarrow L(8) = -(8)^2 + 16 \cdot 8 + 36$

$L(8) = -64 + 128 + 36 \Rightarrow L(8) = -64 + 164 = 100$

Portanto, o lucro máximo que a associação pode obter por dia com a venda de 8 peças é R$ 100,00.

ATIVIDADE 3

Considerando a representação gráfica da função quadrática, podemos afirmar que:

a) **Verdadeiro**. O número real c é negativo, pois, como característica de uma função quadrática da forma *y* = *ax²* + *bx* + *c*, a parábola sempre intercepta o eixo *y* no valor de *c*.

b) **Verdadeiro.** Como a parábola tem a concavidade voltada para cima, sabemos que *a* > *0*, ou seja, o coeficiente *a* é positivo.

c) **Falso.** A abscissa do vértice é um número positivo e está no ponto médio entre -1 e 3 que são as raizes da função, logo: $x_v = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

d) **Falso.** Ao analisar a representação gráfica, é possível identificar que y_v é um número menor que zero, ou seja, negativo.

e) **Falso**. Se o discriminante da equação *f(x)* = 0 fosse nulo, teríamos uma única raiz real para a função. Neste caso, é possível identificar -1 e 3 como raízes reais, o que implica que o discriminante Δ da equação *f(x)* é maior que zero.

f) **Verdadeiro.** As raízes ou zeros da função são os pontos onde a parábola intercepta o eixo *x*, ou seja, para a função f(x) = 0 tem-se: $x_1 = -1 \ e \ x_2 = 3$.

ATIVIDADE 4

Para determinar o instante em que a pedra atinge a altura máxima, é necessário calcular o valor de x_v, que corresponde ao ponto médio entre as raízes x_1 e x_2. Sabemos que $x_1 = 0$ e $x_2 = 10$, então o valor de x_v será dado pela média dessas raízes:

$$x_v = \frac{0+10}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Portanto, a pedra atinge a altura máxima em 5 segundos. A alternativa correta é a **LETRA D**.

ATIVIDADE 5

Vamos resolver a questão considerando as informações do enunciado, utilizaremos a equação da posição representada por $S(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

a) Para modelar a equação devemos substituir na expressão *S(t)* os valores de:

$s_0 = 0$

$v_0 = 10\ m/s$

$a = -4\ m/s^2$

$$S(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$S(t) = 0 + 10 \cdot t + \frac{1}{2}(-4) \cdot t^2$$

$$S(t) = 10t - 2t^2$$

Portanto, a equação *S(t)*, modelada resulta em uma função do 2º grau representada por: $S = 10t - 2t^2$

b) Para determinar a posição do carro no instante 2s, iremos substituir *t* = 2 na equação *S(t)*:

$$S(t) = 10t - 2t^2 \Rightarrow S(2) = 10 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 \Rightarrow S(2) = 20 - 2 \cdot 4 = 20 - 8 = 12$$

Portanto, a posição do carro após 2 segundos é **12 metros do ponto inicial da frenagem.**

ATIVIDADE 6

Para determinar o número de potes de sorvete que devem ser produzidos para que o custo seja mínimo, precisamos encontrar o x_v dessa parábola. A função de custo diária *C(x)* = x² − 40x + 500 é uma função quadrática, portanto teremos:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-40)}{2 \cdot 1} = \frac{40}{2} = 20$$

Portanto, o número de potes de sorvete que deve ser produzido para que o custo seja mínimo é 20 potes. A alternativa correta é a **LETRA B.**

ATIVIDADE 7

Queremos encontrar a temperatura máxima registrada durante o intervalo de 0h a 8h e, portanto, sabemos que para determinar esse valor teremos que definir o valor de y_v máximo. Considerando a função *T(h)* = -37,5h² + 300h, que descreve a temperatura do forno, teremos *a* = −37,5; *b* = 300 e *c* = 0:

Logo, precisaremos definir o valor discriminante Δ (Delta) atráves da expressão:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 300^2 - 4 \cdot (-37,5) \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 90\,000 - 0 \Rightarrow \Delta = 90\,000$$

Agora calculando a temperatura máxima registrada, teremos:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-90\,000}{4 \cdot (-37,5)} = \frac{-90\,000}{-150} = 600$$

Portanto, a temperatura máxima registrada durante o intervalo de 0h a 8h foi de 600°C.

ATIVIDADE 8

Para determinar o valor de *h*, precisamos encontrar o valor de y_v, que corresponde ao ponto mínimo da função. Considerando que x_v é o ponto médio entre $x_1 = 0$ e $x_2 = 8$, temos:

$$x_v = \frac{0+8}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Agora, substituindo $x_v = 4$ na função $f(x) = \frac{x^2}{8} - x$, podemos determinar o valor de h, que representa a altura da rampa em relação ao eixo horizontal *x*.

$$f(x) = \frac{x^2}{8} - x \Rightarrow f(4) = \frac{4^2}{8} - 4 = \frac{16}{8} - 4 = 2 - 4 = -2$$

Sabendo que h não pode ser uma medida negativa, consideraremos que o valor mínimo de −2 corresponde a uma profundidade de 2 metros, ou seja, abaixo da linha horizontal *x*. Portanto, o valor de h é de 2 metros.
A alternativa correta é a **LETRA B**.

ATIVIDADE 9

Para determinar o dia em que o número de infectados chegou a 1 600 pessoas, devemos considerar a função $f(t) = -2t^2 + 120t$, onde *f(t)* representa o número de infectados no dia *t*.
Vamos encontrar o valor de *t* para o qual *f(t)* = 1 600, logo:

$$f(t) = -2t^2 + 120t \Rightarrow -2t^2 + 120t = 1\,600 \Rightarrow -2t^2 + 120t - 1\,600 = 0$$

Agora, para simplificar, podemos dividir todos os termos por -2 e resolver a equação quadrática usando a fórmula de Bhaskara:

$$-2t^2 + 120t - 1\,600 = 0 \overset{(\div 2)}{\Rightarrow} -t^2 + 60t - 800 = 0$$

$$a = -1 \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$
$$b = 60 \qquad \Delta = 60^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-800)$$
$$c = -800 \qquad \Delta = 3\,600 - 3\,200 \Rightarrow \Delta = 400$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow t = \frac{-60 \pm \sqrt{400}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow t = \frac{-60 \pm 20}{-2}$$

$$t_1 = \frac{-40}{-2} = 20$$

$$t_1 = \frac{-80}{-2} = 40$$

Portanto, a solução válida é $t_1 = 20$ e $t_2 = 40$. Como estamos procurando o dia em que o número de infectados chega a 1 600, podemos dizer que a segunda dedetização começou no 20º dia após a 1º dedetização realizada. Resposta correta **LETRA B**.

ATIVIDADE 10

Para determinar qual barra de chocolate a empresa deve produzir para obter o maior lucro, precisamos analisar a função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, definindo qual é o preço *x* que maximiza o lucro. Portanto, basta calcularmos o valor de x_v da função: Sabendo que *a* = -1 e *b* = 14, teremos:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{2 \cdot (-1)} = \frac{-14}{-2} = 7$$

Portanto, o preço *x* que maximiza o lucro é R$ 7,00. A barra que custa R$ 7,00 é a Barra IV, logo a resposta correta é a **LETRA D**.

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: conjuntos e funções.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante Matemática, 1º ano: ensino médio.** São Paulo: Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: função afim e função quadrática.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: Ática, 2020.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções.** 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: conjuntos e funções.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Função Afim e Função Quadrática.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO. **População que se declara indígena cresce 50% no Espírito Santo.** 09/08/2023. Disponível em: <https://www.es.gov.br/Noticia/populacao-que-se-declara-indigena-cresce-50-no-espirito-santo>. Acessado em: 24/02/2025.

GOV.BR. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - Inep. **Provas e Gabaritos**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 08/02/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico da Escola**. SAEPE – 2016/Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2016/PE%20SAEPE%202016%20RP%20MT%20WEB.pdf>. Acessado em: 08/02/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico da Escola**. SAEPE – 2019/Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2016/PE%20SAEPE%202016%20RP%20MT%20WEB.pdf>. Acessado em: 08/02/2025.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Conjuntos e função afim.** Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.