CONEXÕES MATEMÁTICAS

QUINZENA

13

28/07 a 01/08

SEDU - 2025

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES: APLICAÇÕES

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM
(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	• Reconhecer situações práticas que podem ser modeladas por funções definidas por partes, como tabelas de tarifas progressivas ou descontos condicionais. • Interpretar o significado das diferentes partes da função em relação às variáveis envolvidas no contexto. • Resolver problemas envolvendo funções definidas por partes, como cálculo de tarifas progressivas, impostos e contas de consumo. • Utilizar ferramentas digitais para representar e analisar graficamente funções definidas por partes de forma dinâmica.

Contextualização

Funções definidas por partes não são apenas um conceito abstrato – elas aparecem o tempo todo no nosso dia a dia. Sempre que uma situação envolve **regras diferentes para diferentes faixas de valores**, é provável que esse tipo de função esteja presente.

No **mercado financeiro**, por exemplo, os impostos variam de acordo com o valor do salário: quem ganha menos paga menos, enquanto quem tem rendimentos maiores paga mais. Não há uma única equação para calcular o imposto – ele depende da faixa de renda.

Da mesma forma, a **conta de luz** não aumenta proporcionalmente ao consumo. Há faixas de cobrança: até certo limite, o preço por kWh é mais barato; conforme o consumo sobe, o valor cobrado por unidade também cresce.

Na **natureza**, funções desse tipo aparecem no crescimento de populações, na previsão do clima e até mesmo na análise de velocidade de rios e ventos, onde diferentes condições ambientais alteram o comportamento dos fenômenos observados.

Assim, sempre que uma grandeza varia de forma diferente dependendo da situação, as funções definidas por partes entram em cena. Agora, vamos estudar mais sobre contextos práticos para funções definidas por partes!

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

INTRODUÇÃO

Depois de vermos as definições e algumas aplicações teóricas de **função definida por partes**, vamos explorar situações cotidianas em que essas funções são utilizadas para descrever e prever fenômenos do mundo real. Esses exemplos práticos nos ajudarão a entender como as funções definidas por partes podem ser aplicadas para modelar comportamentos que variam conforme determinadas condições, como no caso de tarifas de energia elétrica, impostos progressivos e outras situações que envolvem regras específicas para diferentes faixas ou cenários.

Imposto de renda progressivo

O imposto de renda é um dos exemplos mais comuns e práticos de funções definidas por partes. No Brasil, o sistema de imposto de renda para pessoas físicas é **progressivo** quando aplicado sobre **rendas provenientes de trabalho** (como salários, aposentadorias e pensões) **e algumas outras fontes de rendimento definidos por lei** (como aluguéis e rendas eventuais). Isso significa que a alíquota aplicada varia conforme a **base de cálculo** do contribuinte, que corresponde ao valor sobre o qual o imposto incide. A base de cálculo é obtida após deduções permitidas pela legislação, como despesas com saúde, educação, previdência privada e dependentes, que são subtraídas da renda bruta total. A partir de fevereiro de 2024, a tabela do imposto de renda para rendimentos mensais segue a seguinte estrutura:

VOCÊ SABIA?

O arco-íris é formado quando a luz solar atravessa gotículas de água na atmosfera. Cada gota funciona como um prisma natural, refratando e dispersando a luz em suas cores componentes. A dispersão acontece porque a luz branca é feita de várias cores, cada uma com um comprimento de onda diferente.

Base de cálculo	Alíquota	Dedução
Até R$ 2.259,20	-	-
De R$ 2.259,21 até R$ 2.826,65	7,5%	R$ 169,44
De R$ 2.826,66 até R$ 3.751,05	15,0%	R$ 381,44
De R$ 3.751,06 até R$ 4.664,68	22,5%	R$ 662,77
Acima de R$ 4.664,68	27,5%	R$ 896,00

Tabela 1: Valores das alíquotas e respectiva dedução, para cada faixa de base de cálculo. Fonte: https://www.gov.br/receitafederal

Essa tabela representa uma **função definida por partes**, onde a alíquota aplicada depende da faixa de renda em que o contribuinte se enquadra. Matematicamente, a função pode ser expressa da seguinte forma:

$$IR(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } x \leq 2\,259{,}20 \\ 0{,}075 \cdot x - 169{,}44 & , \quad \text{se } 2\,259{,}20 < x \leq 2\,826{,}65 \\ 0{,}15 \cdot x - 381{,}44 & , \quad \text{se } 2\,826{,}65 < x \leq 3\,751{,}05 \\ 0{,}225 \cdot x - 662{,}77 & , \quad \text{se } 3\,751{,}05 < x \leq 4\,664{,}68 \\ 0{,}275 \cdot x - 896{,}00 & , \quad \text{se } x > 4\,664{,}68 \end{cases}$$

Onde:

- *IR(x)* é o valor do imposto a ser pago, em reais; e
- *x* é base de cálculo do contribuinte, em reais.

Esse sistema de taxação por faixas é chamado de **imposto progressivo** e tem como objetivo promover maior justiça fiscal. Pessoas com **menor base de cálculo pagam menos imposto** (ou são isentas), enquanto aquelas com **maior base de cálculo contribuem mais**. Esse princípio reflete a ideia de que quem tem maior capacidade financeira deve arcar com uma parcela maior dos custos públicos.

O gráfico da função IR(x), que pode ser visto na figura 1, é composto por **segmentos lineares**, onde cada faixa de base de cálculo corresponde a uma reta com inclinação diferente. A inclinação de cada segmento é determinada pela alíquota aplicada naquela faixa. Quanto maior a alíquota, mais íngreme será a reta no gráfico. Além disso, as deduções que ocorrem em cada faixa garantem que o gráfico seja contínuo, sem saltos bruscos ao mudar de uma faixa para outra.

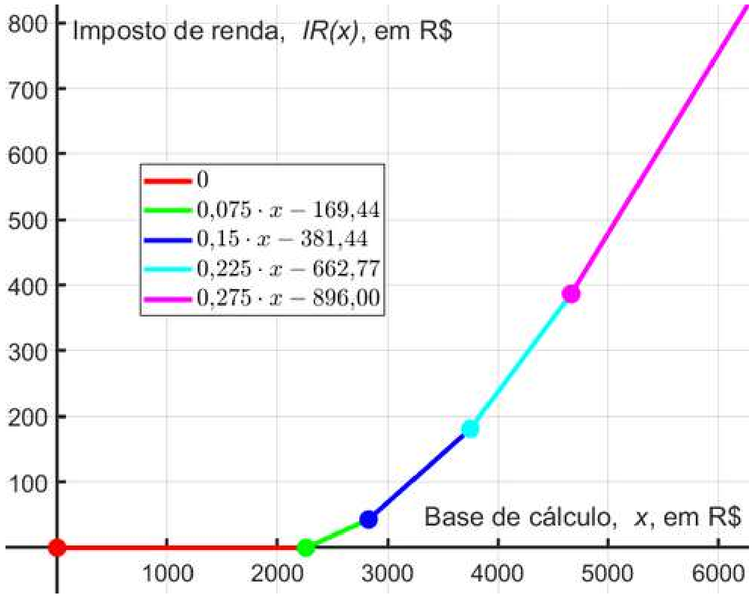


Figura 1: Valor do imposto pago em função da base de cálculo.

Exemplo 1 - Alíquota progressiva

Imagine dois contribuintes, João e Maria, com bases de cálculo mensais diferentes. João tem uma base de cálculo de R$ 2 500,00, enquanto Maria tem uma base de cálculo de R$ 5 000,00. Vamos analisar como o imposto de renda é calculado para cada um.

Cálculo para João (base de cálculo = R$ 2 500,00):

João se enquadra na segunda faixa da tabela do imposto de renda, onde a alíquota é de 7,5% e a parcela a deduzir é de R$ 169,44. Aplicando a fórmula da função definida por partes para essa faixa, temos:

$$IR(2\,500) = 0{,}075 \cdot 2\,500 - 169{,}44 = 187{,}50 - 169{,}44 = 18{,}06$$

Portanto, João pagará R$ 18,06 de imposto de renda.

Cálculo para Maria (base de cálculo = R$ 5 000,00):

Maria se enquadra na quinta faixa da tabela do imposto de renda, onde a alíquota é de 27,5% e a parcela a deduzir é de R$ 884,96. Aplicando a fórmula da função definida por partes para essa faixa, temos:

$$IR(5\,000) = 0{,}275 \cdot 5\,000 - 896{,}00 = 1\,375 - 896{,}00 = 479{,}00$$

Portanto, Maria pagará R$ 479,00 de imposto de renda.

Observamos que, apesar de Maria ganhar o dobro de João, o imposto pago por ela é mais de vinte seis vezes maior, ilustrando o princípio da progressividade.

Imposto de renda regressivo

Diferente do imposto progressivo sobre rendimentos do trabalho, alguns investimentos financeiros seguem um modelo de tributação **regressiva**, ou seja, quanto **maior o tempo do investimento**, **menor a alíquota** aplicada sobre os rendimentos.

Esse sistema é aplicado a investimentos de **renda fixa**, como **Tesouro Direto**, **LCI/LCA**, **debêntures**, **CDBs**, entre outros. A cobrança ocorre no momento do resgate do investimento ou no pagamento de juros, dependendo do tipo de aplicação.

Segundo a Instrução Normativa RFB nº 1585/2015, a tributação sobre os rendimentos das aplicações financeiras segue a seguinte regra:

- Até 180 dias: 22,50% dos rendimentos;
- De 181 a 360 dias: 20% dos rendimentos;
- De 361 a 720 dias: 17,50% dos rendimentos; e
- Acima de 720 dias: 15% dos rendimentos.

Podemos expressar esse sistema como uma **função definida por partes**, onde a alíquota ***A(t)*** varia conforme o tempo ***t*** (em dias) da aplicação:

$$A(t) = \begin{cases} 22{,}5\% & , \quad \text{se } 0 < t \leq 180 \\ 20\% & , \quad \text{se } 180 < t \leq 360 \\ 17{,}5\% & , \quad \text{se } 360 < t \leq 720 \\ 15\% & , \quad \text{se } t > 720 \end{cases}$$

O gráfico da função f(t) pode ser visto na figura 2. Ele representa a variação da alíquota do imposto de renda conforme o tempo de aplicação. Nota-se que a alíquota diminui em degraus à medida que o tempo avança, incentivando o investidor a manter seu dinheiro aplicado por mais tempo da progressividade.

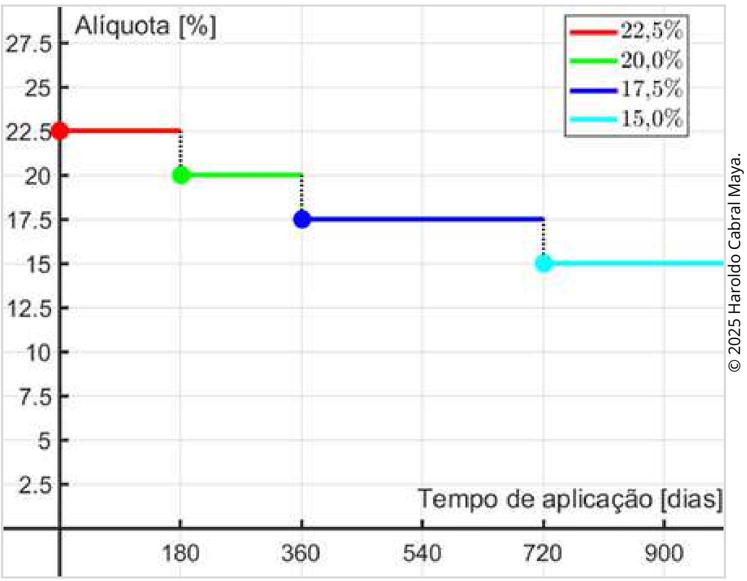


Figura 2: Alíquota do imposto de renda em função do tempo para uma aplicação financeira de renda fixa.

VOCÊ SABIA?

Países como Suécia, Dinamarca, e Finlândia têm algumas das alíquotas de imposto de renda mais altas do mundo, com impostos que podem ultrapassar 50%, mas esses impostos financiam extensos serviços públicos e sistemas de bem-estar social. Já os Emirados Árabes Unidos, Catar, Bahamas, Bermudas, e Mônaco são exemplos de países que não cobram imposto de renda pessoal, oferecendo benefícios fiscais substanciais para residentes e empresas.

Exemplo 2 - Alíquota regressiva

Suponha que uma pessoa investiu **R$ 10 000,00** em um título de renda fixa e, após **18 meses**, recebeu de volta o montante de **R$ 12 500,00**. Vejamos qual o valor devido do imposto de renda para este caso.

O lucro obtido é a diferença entre o valor resgatado e o valor inicialmente investido:

$$12\,500 - 10\,000 = 2\,500$$

O tempo de aplicação foi de **18 meses**, o que equivale a aproximadamente **548 dias**. Como esse período se enquadra na **faixa entre 361 e 720 dias**, a alíquota aplicável é de **17,5%**. Calculando o imposto devido, temos:

$$A(548) = 0{,}175 \cdot 2\,500 = 437{,}50$$

Portanto, o imposto de renda devido para esta operação é de R$ 437,50.

Esse modelo de tributação favorece investimentos de longo prazo, pois a alíquota reduz gradualmente à medida que o tempo de aplicação aumenta, incentivando os investidores a manterem seu capital investido por períodos maiores.

Conta de energia

As empresas distribuidoras de energia elétrica podem adotar diferentes modalidades de cobrança para seus clientes, dependendo de fatores como o padrão de consumo ao longo do dia, o consumo médio mensal ou a participação em programas de auxílio para famílias de baixa renda. No caso do Espírito Santo, em 2025, a EDP (distribuidora de energia que atende à maioria dos municípios do estado) oferece duas modalidades tarifárias para clientes residenciais atendidos em baixa tensão:

1. **Tarifa convencional:** cobrança de um valor único de **R$ 0,69813 por kWh** consumido, independentemente do horário ou dia da semana.
2. **Tarifa branca:** valores **variáveis ao longo dos dias úteis**, com tarifas mais altas nos períodos de maior demanda da rede elétrica e mais baixas nos períodos de menor consumo.

Nos dias úteis, os valores da tarifa branca são definidos por faixas horárias, que podem ser vistas na tabela 2.

Modalidade Tarifária	Horários	Valor por kWh (R$)
Intermediário 1	17h às 18h	0,84504
Ponta	18h às 21h	1,27097
Intermediário 2	21h às 22h	0,84504
Fora de Ponta	22h às 17h	0,58673

Tabela 2: Valores da tarifa branca em dias uteis (2025).
Fonte: wwww.edp.com.br

Aos finais de semana e feriados, a tarifa aplicada é a mesma do período **fora de ponta**, ou seja, **R$ 0,58673 por kWh**.

Podemos modelar essa situação por meio de uma **função definida por partes** para os dias úteis, onde o valor a ser pago depende do horário. A função matemática correspondente é:

$$C(h) = \begin{cases} 0{,}58673 & , \quad \text{se } h \geq 22 \text{ ou } h < 17 \\ 0{,}84504 & , \quad \text{se } 17 \leq h < 18 \text{ ou } 21 \leq h < 22 \\ 1{,}27097 & , \quad \text{se } 18 \leq h < 21 \end{cases}$$

Onde:

- *C(h)* é o custo do kWh no instante *h*; e
- h é a hora do dia $0 \leq h < 24$.

O gráfico da figura 3 mostra como o custo da energia varia conforme o horário, refletindo o incentivo ao consumo de energia nos horários fora de ponta.

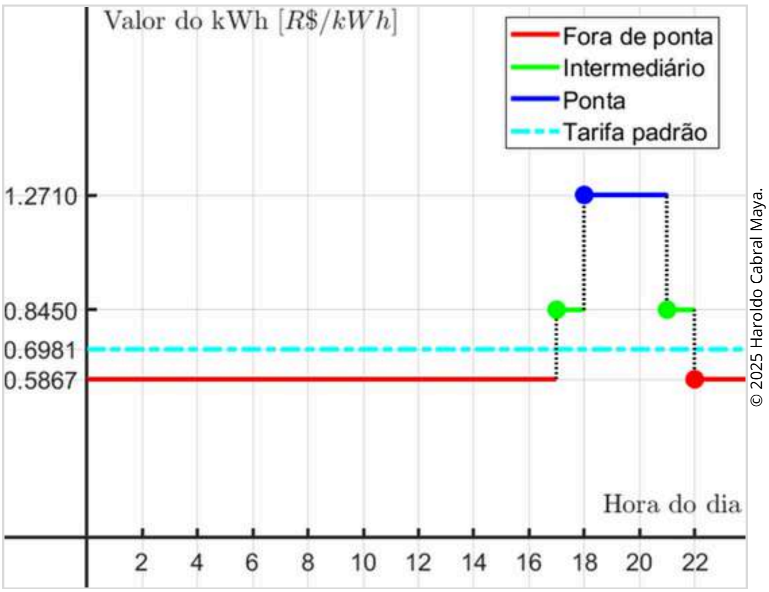


Figura 3: Gráfico da tarifa branca em função das horas de um dia útil.

Exemplo 3 - Cálculo tarifa branca da conta de energia

Um cliente consumiu:

- **50 kWh** no horário **fora de ponta**;
- **10 kWh** no horário **intermediário**; e
- **5 kWh** no horário **de ponta**.

O custo total da conta será calculado aplicando as tarifas correspondentes a cada período:

$$50 \cdot 0,58673 + 10 \cdot 0,84504 + 5 \cdot 1,27097 = 29,34 + 8,45 + 6,35 = 44,14$$

O valor total da conta será de R$ 44,14.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

A família de Tito está avaliando qual modalidade de cobrança de energia elétrica é mais vantajosa para sua casa. A distribuidora de energia oferece duas opções:

1. Tarifa Convencional: R$ 0,7 por kWh consumido, independentemente do horário.
2. Tarifa Branca:
   - Fora de ponta: R$ 0,5 por kWh;
   - Intermediário: R$ 0,7 por kWh; e
   - Ponta: R$ 1,3 por kWh.

No último mês, o consumo da família foi distribuído da seguinte forma:

- 180 kWh no horário fora de ponta;
- 40 kWh no horário intermediário; e
- 30 kWh no horário de ponta.

Com base nesses dados:

a) Calcule o valor da conta de energia da família considerando a tarifa convencional.
b) Calcule o valor da conta considerando a tarifa branca.
c) Qual opção a família deve escolher visando uma maior economia? Quantos reais será economizado?

Resolução

a) A família consumiu, no total, 180 + 40 + 30 = 250 kWh. Para a tarifa convencional, o custo total é:

$$250 \cdot 0{,}7 = 175$$

b) Para a tarifa branca, o custo é:

$$(180 \cdot 0,5) + (40 \cdot 0,7) + (30 \cdot 1,3) = 90 + 28 + 39 = 157$$

c) Ao comparar os custos das duas modalidades, temos:

- Custo com a tarifa convencional: R$ 175
- Custo com a tarifa branca: R$ 157

Portanto, a tarifa branca é mais vantajosa para a condição dada.
A economia seria de 175 - 157 = 18 reais.

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função afim e função quadrática. (DANTE)

Capítulo 1: função afim.

- Funções definidas por mais de uma sentença (p. 57- 67).

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

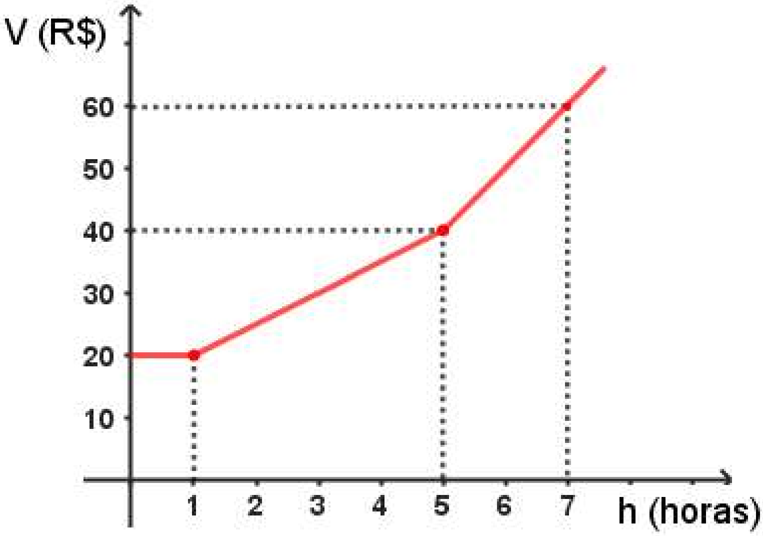
Capítulo 1: função definida por mais de uma sentença.

- Introdução (p. 12).
- Função definida por mais de uma sentença (p. 12 - 24).

Atividades

ATIVIDADE 1

Em um aeroporto, o valor a ser pago pelo uso do estacionamento varia de acordo com o tempo de permanência do veículo. O gráfico a seguir representa a função *f*, que expressa o valor a ser pago (*V*) em reais, conforme o número de horas *x* de permanência no estacionamento do aeroporto.



a) Com base no gráfico, identifique qual das alternativas (I, II, III ou IV) representa corretamente a equação que descreve a função *f* para cada intervalo de horas *h*, correspondente ao valor a ser pago em reais.

$$I)\quad f(h) = \begin{cases} 20, & \text{se } 0 < h \leq 1 \\ 5h + 15, & \text{se } 1 < h \leq 5 \\ 10h - 10, & \text{se } h > 5 \end{cases}$$

$$III)\quad f(h) = \begin{cases} 20, & \text{se } 0 \leq h \leq 1 \\ 5h + 15, & \text{se } 1 < h < 5 \\ 10h - 10, & \text{se } h \geq 5 \end{cases}$$

$$II)\quad f(h) = \begin{cases} 20, & \text{se } 0 < h \leq 1 \\ 5h + 15, & \text{se } 1 < h \leq 7 \\ 10h - 10, & \text{se } h > 7 \end{cases}$$

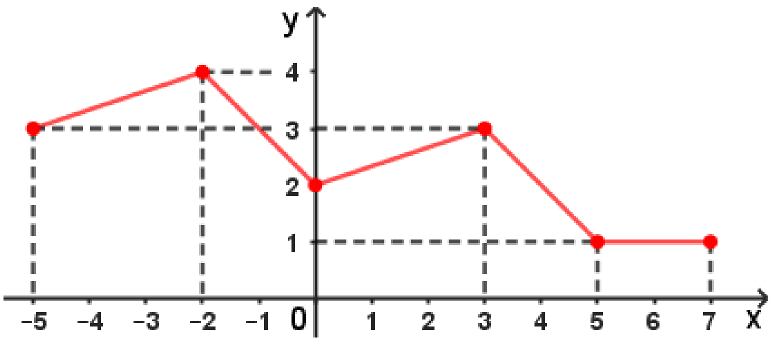
$$IV)\quad f(h) = \begin{cases} 20, & \text{se } 0 < h \leq 1 \\ 5h + 20, & \text{se } 1 < h \leq 7 \\ 10h + 40, & \text{se } h > 7 \end{cases}$$

b) Qual é o valor a ser pago para estacionar o veículo por 6 horas?

c) Qual foi o tempo de permanência de um veículo cujo valor pago foi R$ 30,00?

ATIVIDADE 2

Observe abaixo o gráfico de uma função real definida no intervalo [− 5, 7].



Essa função é estritamente decrescente:

a) no intervalo [– 5, 2] e no intervalo [0, 3].
b) no intervalo [– 5, 0].
c) no intervalo [– 2, 0] e no intervalo [3, 5].
d) no intervalo [1, 4].
e) no intervalo [5, 7].

ATIVIDADE 3

Vila Velha volta a ter aluguel de patinete elétrico

O equipamento, que será mais uma alternativa de transporte, poderá circular apenas em uma área delimitada.

Já estão à disposição para aluguel 320 patinetes elétricos espalhados em 142 pontos da cidade. As tarifas variam de acordo com o horário e os dias da semana.

De segunda a sexta-feira, no horário entre 5h e 17h o valor da ativação será de R$ 2,00 e R$ 0,40 por minuto utilizado. Entre 17h e 5h o valor da ativação será de R$ 3,00 e R$ 0,70 por minuto de utilização. Sábados e domingos o valor da ativação será de R$ 3,00, com o preço da minutagem variando entre R$ 0,70 das 5h às 17h e R$ 0,90 entre 17h e 5h.


Fonte: Divulgação/ Prefeitura de Vila Velha

O pagamento será feito de forma digital, via aplicativo, com utilização do cartão de crédito ou Pix.

Fonte: Kariny Baldan, de Jornal A Tribuna. Disponível em:https://tribunaonline.com.br/cidades/vila-velha-volta-a-ter-aluguel-de-patinete-eletrico-178329?home=esp%C3%ADrito+santo. Adaptado.

Com base na reportagem acima, calcule o valor total a ser pago por uma pessoa que utilizar o patinete elétrico por 30 minutos, no horário das 20 horas de uma quarta-feira.

ATIVIDADE 4

Uma empresa de transporte cobra diferentes valores de frete dependendo da distância percorrida. A tabela de preços da empresa é a seguinte:

- Para distâncias até 100 km, o valor do frete é R$ 150,00.
- Para distâncias maiores que 100 km e até 300 km, o valor do frete é R$ 2,00 por quilômetro.
- Para distâncias acima de 300 km, o valor do frete é R$ 1,50 por quilômetro.

A função que descreve o valor do frete *f(x)*, dependendo da distância percorrida *x* (em km), é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 150, & \text{se } 0 < x \leq 100 \\ 2x, & \text{se } 100 < x \leq 300 \\ 1,5x, & \text{se } x > 300 \end{cases}$$

Com base nessa função:

a) Represente a função *f(x)* graficamente no plano cartesiano e observe como a função se comporta para as diferentes distâncias.

b) Se uma entrega for feita a uma distância de 250 km, qual será o valor total do frete? Analise o gráfico e observe essa relação entre a distância percorrida e o valor pago.

ATIVIDADE 5

Uma rede de supermercados do estado do Espírito Santo comercializa o Óleo de Soja 900ml, tanto no atacado quanto no varejo. Os preços estipulados para este produto são os seguintes:

- Preço no varejo: R$ 8,98 por unidade.
- Preço no atacado: R$ 7,90 por unidade, na compra de 3 ou mais unidades.

Observe a diferença de valores a ser paga em cada uma das modalidades e responda às questões a seguir:

a) Qual será o valor total a ser pago pela compra de 2 unidades do Óleo de Soja 900ml, nesta rede de supermercados?

b) Qual será o valor total a ser pago pela compra de 3 unidades do Óleo de Soja 900ml, nesta rede de supermercados?

ATIVIDADE 6

O Imposto de Renda (IR) é um tributo cobrado pelo governo sobre os rendimentos e a renda de pessoas físicas e jurídicas, com o objetivo de arrecadar recursos para o financiamento das atividades do Estado e dos serviços públicos. O valor a ser pago é determinado com base na renda recebida, sendo o imposto progressivo — ou seja, quanto maior a renda, maior a alíquota (percentual) aplicada.

Fonte: Redação B3 Bora Investir. Disponível em: https://borainvestir.b3.com.br/glossario/imposto-de-renda-ir/. Adaptado.

A tabela a seguir apresenta as alíquotas a serem aplicadas para cada faixa de renda de forma progressiva.

Base de cálculo (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IRPF (R$)
Até R$ 2 259,20	-	-
De R$ 2 259,21 até R$ 2 826,65	7,5%	R$ 169,44
De R$ 2 826,66 até R$ 3 751,05	15%	R$ 381,44
De R$ 3 751,06 até R$ 4 664,68	22,5%	R$ 662,77
Acima de R$ 4 664,68	27,5%	R$ 896,00

Fonte: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2024.

Considerando a tabela apresentada e sabendo que o cálculo do imposto devido é realizado aplicando-se a alíquota sobre o salário base, seguido do desconto da parcela deduzida correspondente a cada faixa de renda, é possível estabelecer uma expressão definida por mais de uma sentença, que descreve o valor a ser pago de Imposto de Renda em função do rendimento base *x*, representado por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 2\,259,20 \\ 0,075x - 169,44, & \text{se } 2\,259,20 < x \leq 2\,826,65 \\ 0,15x - 381,44, & \text{se } 2\,826,65 < x \leq 3\,751,05 \\ 0,225x - 662,77, & \text{se } 3\,751,05 < x \leq 4\,664,68 \\ 0,275x - 896,00, & \text{se } x > 4\,664,68 \end{cases}$$

Com base no que foi apresentado, resolva as situações propostas:

a) Uma pessoa teve um rendimento mensal base de R$ 1 518,00 (um salário mínimo). Qual será o valor devido de Imposto de Renda?

b) Bruno obteve um rendimento mensal de R$ 3 750,00 em um determinado mês. Qual será o valor do Imposto de Renda devido por ele?

c) Marcos obteve um rendimento mensal de R$ 3 760,00 em um determinado mês. Qual será o valor do Imposto de Renda devido por ele?

d) Identifique a alíquota em que Bruno e Marcos se enquadram e compare o valor final do Imposto de Renda pago por cada um deles.

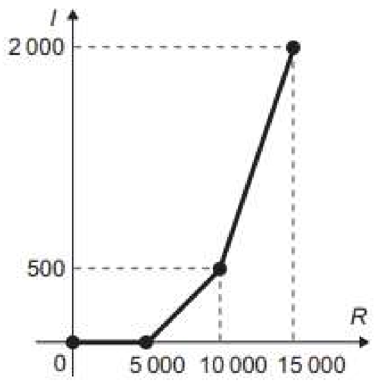
ATIVIDADE 7

(ENEM - 2021) O quadro representa a relação entre o preço de um produto (R) e seu respectivo imposto devido (I).

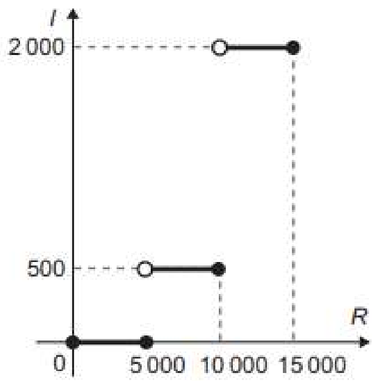
Preço do produto (R)	Imposto devido (I)
$R \leq 5\,000$	isento
$5\,000 < R \leq 10\,000$	10% de ($R - 5\,000$)
$10\,000 < R \leq 15\,000$	$500 + 30\%$ de ($R - 10\,000$)

O gráfico que melhor representa essa relação é:

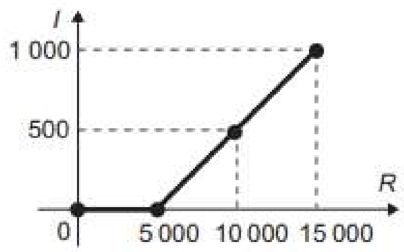
a)



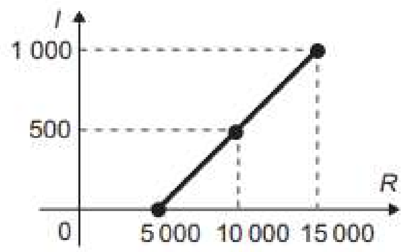
d)



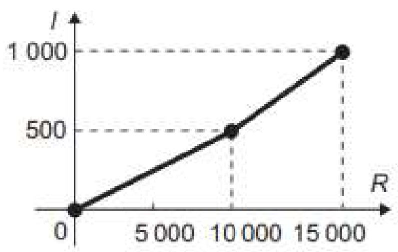
b)



e)



c)

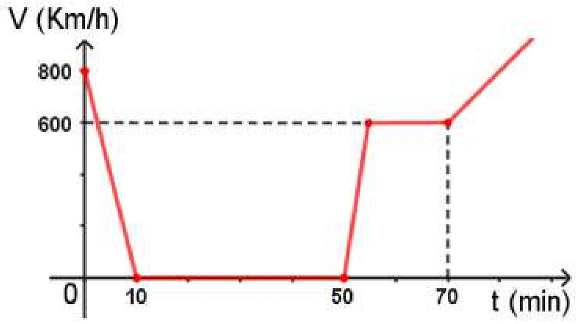


ATIVIDADE 8

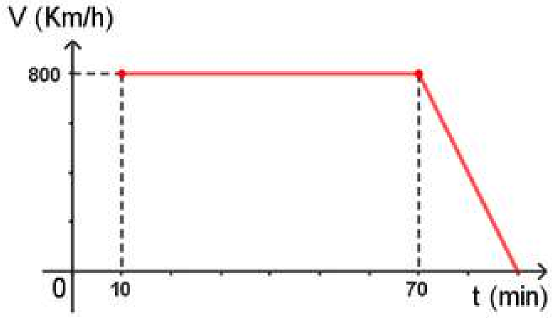
(SAEPE 2019) Um avião levanta voo na cidade de Vitória - ES com destino a São Paulo - SP. Durante os dez primeiros minutos de voo, sua velocidade aumenta até atingir 800 km/h. A partir daí, o piloto automático é acionado, e essa velocidade permanece constante até que, cinquenta minutos após a decolagem, o piloto é orientado pela torre de controle para reduzir a velocidade para 600 km/h. Três minutos após essa orientação, o avião atinge 600 km/h e permanece nessa velocidade por mais 17 minutos, até iniciar os procedimentos de pouso na cidade de São Paulo, onde sua velocidade diminui até o pouso.

O gráfico que melhor representa a velocidade desse avião em função do tempo é:

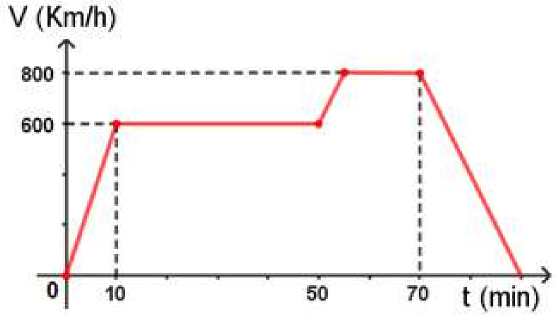
a)



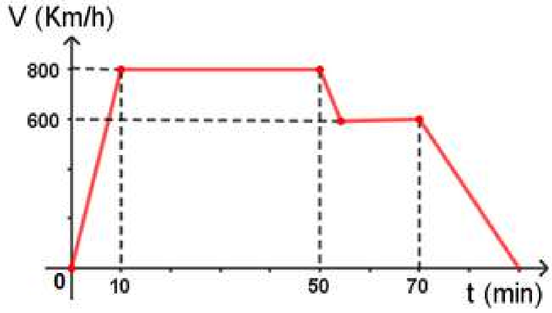
d)



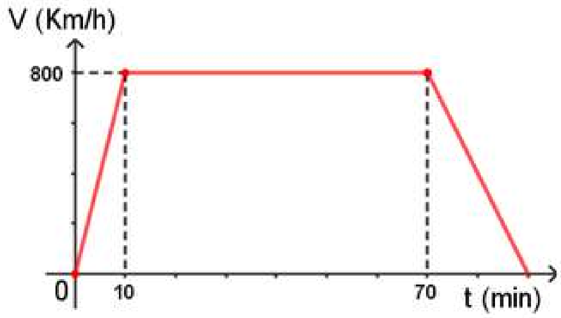
b)



e)



c)



ATIVIDADE 9

Nova Estrutura de Tarifas da Cesan: Mais justa e Transparente para você

A Agência Reguladora de Serviços Públicos do Espírito Santo (Arsp), responsável pelo controle das atividades da Cesan, anunciou a nova estrutura de tarifas para os serviços de água e esgoto. A principal mudança é que não há mais cobrança pelo consumo mínimo de 10 m³ por unidade consumidora. A tarifa agora é dividida em duas partes: uma fixa, conforme as categorias abaixo e o porte da ligação; e outra variável, conforme o consumo. Escolha sua categoria e veja como fica sua tarifa.

Exemplo:

Residencial: Imóveis residenciais com medição de água individual

TARIFA DE ÁGUA/ ESGOTO: PARCELA FIXA + PARCELA VARIÁVEL = VALOR TOTAL DA SUA CONTA

Exemplo da cobrança em um imóvel com consumo de até 8 mil litros de água no mês:

	Parcela Fixa	Parcela variável	
Água	R$ 19,19	R$ 1,81 x 8m³	R$ 14,48
Esgoto	R$ 15,36	R$ 1,45 x 8m³	R$ 11,60
Total			R$ 60,63

Fonte: elaborado partir de www.cesan.com.br/tarifajusta/#residencial. Acesso em 05/03/25

Cobrança pelo serviço de abastecimento de água:

Categorias	Componente	TARIFAS DE ÁGUA (R$/m³)					
		0-10m³	11-15m³	16-20m³	21-30m³	31-50m³	> 50m³
Residencial	Parcela fixa	19,19	22,84	27,18	32,34	38,49	45,80
	Parcela variável	1,81	3,61	6,50	7,80	8,97	9,87

Cobrança pelo serviço de Coleta, afastamento e tratamento do esgoto:

Categorias	Componente	TARIFAS DE COLETA, AFASTAMENTO E TRATAMENTO (R$/m³)					
		0-10m³	11-15m³	16-20m³	21-30m³	31-50m³	> 50m³
Residencial	Parcela fixa	15,36	18,27	21,75	25,88	30,79	36,65
	Parcela variável	1,45	2,89	5,20	6,23	7,17	7,89

Fonte: Cesan. Disponível em: https://www.cesan.com.br/tarifajusta/#residencial.

Considerando o modelo de tarifas para os serviços de água e esgoto, disponíveis no site da Cesan (e apresentadas cima), determine o valor total a ser pago por uma residência, cujo consumo mensal foi de 20 m³ de água. **(Obs.: desconsidere impostos e taxas adicionais).**

ATIVIDADE 10

(ENEM 2010) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmicas, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo. Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, & \text{para } 0 \le t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, & \text{para } t \ge 100 \end{cases}$$

Em que *T* é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e *t* é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado. Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48ºC e retirada quando a temperatura for 200º C.

O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a:

a) 100
b) 108
c) 128
d) 130
e) 150

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: conjuntos e funções.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. Investimentos: Compromissadas. Disponível em: https://www.caixa.gov.br/investimentos/compromissadas/Paginas/default.aspx. Acesso em: 3 mar. 2025.

EDP BRASIL. Tarifa Branca. Disponível em: https://www.edp.com.br/tarifa-branca/. Acesso em: 3 mar. 2025.

EDP BRASIL. Tabela de Tarifas ES. Disponível em: https://www.edp.com.br/media/1rjbimtu/tabela-de-tarifas-es-070823.pdf. Acesso em: 3 mar. 2025.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções.** 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

RECEITA FEDERAL DO BRASIL. Instrução Normativa RFB nº 1.585/2015. Disponível em: http://normas.receita.fazenda.gov.br/sijut2consulta/link.action?idAto=67494. Acesso em: 3 mar. 2025.

RECEITA FEDERAL DO BRASIL. Simulador do Imposto de Renda. Disponível em: https://www27.receita.fazenda.gov.br/simulador-irpf/. Acesso em: 3 mar. 2025.

RECEITA FEDERAL DO BRASIL. Tabelas do Imposto de Renda 2024. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2024. Acesso em: 3 mar. 2025.

TESOURO DIRETO. Quais são os impostos e taxas ao investir no Tesouro Direto? Disponível em: https://www.tesourodireto.com.br/blog/quais-sao-os-impostos-e-taxas-ao-investir-no-td.htm. Acesso em: 3 mar. 2025.

Referências

ATIVIDADES

BALDAN, Kariny. **Vila Velha volta a ter aluguel de patinete elétrico**. Jornal A Tribuna. 26/04/2024. Disponível em: <https://tribunaonline.com.br/cidades/vila-velha-volta-a-ter-aluguel-de-patinete-eletrico-178329?
home=esp%C3%ADrito+santo>. Acessado em: 10/03/2025.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: conjuntos e funções.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

BORA INVESTIR, Redação B3. **Imposto de renda (IR) - O que é, significado e definição**. 17/02/2025. Disponível em: https://borainvestir.b3.com.br/glossario/imposto-de-renda-ir/. Acessado em: 10/03/2025.

CESAN. Governo do Estado do Espirito Santo. **Nova Estrutura de Tarifas da Cesan: Mais justa e Transparente para você**. Disponível em: <https://www.cesan.com.br/tarifajusta/#residencial>. Acessado em: 05/03/2025.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Função Afim e Função Quadrática.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

GOV.BR. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Inep. **Provas e Gabaritos**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 08/02/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico da Escola**. SAEPE – 2019 / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2009/BOLETIM_SAEPE_VOL3_3EM_MAT_2009.pdf>. Acessado em: 08/02/2025.

RECEITA FEDERAL DO BRASIL. **Tabelas do Imposto de Renda 2024**. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2024. Acesso em: 10/03/2025.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

EXPLORANDO O PLANO CARTESIANO: POSIÇÕES E MOVIMENTOS

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITORES
(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).	• Corresponder pontos do plano cartesiano a pares ordenados. • Identificar e representar transformações isométricas no plano cartesiano (translações, reflexões e rotações). • Reconhecer e utilizar o fato de que as imagens de uma figura construída por uma transformação isométrica são congruentes, identificando propriedades e/ou medidas que não se alteram. • Identificar e representar transformações homotéticas no plano cartesiano (ampliações e reduções). • Reconhecer e utilizar o fato de que as imagens de uma figura construída por uma transformação homotética são semelhantes, identificando propriedades e/ ou medidas que se modificam ou não se alteram. • Identificar regularidades em coordenadas cartesianas de vértices de figuras obtidas por simetria (reflexão, translação e rotação) e por ampliação ou redução.	**D043_M** Identificar a localização de pontos no plano cartesiano. **D053_M** Reconhecer figuras obtidas por composições de transformações geométricas (reflexão e rotação) na malha quadriculada

Contextualização

Onde você está e para aonde quer ir?

Imagine que você está em um parque enorme e precisa encontrar um amigo. Ele te manda uma mensagem dizendo: "*Estou perto de uma árvore grande e um banco vermelho*". Mas, ao olhar ao redor, você percebe que há várias árvores grandes e que todos os bancos desse parque são vermelhos. **Como saber exatamente onde ele está?**

Agora pense em um jogo de videogame. Quando seu personagem se move pelo mapa, como o **jogo sabe a posição exata dele?** Ou ainda, como um entregador sabe **qual caminho seguir** para chegar à sua casa no menor tempo possível?

Todas essas situações têm algo em comum: a necessidade de um **sistema de localização preciso**. É aqui que entra o **plano cartesiano**, uma ferramenta que nos ajuda a organizar o espaço e a compreender deslocamentos. Mas não para por aí! O que acontece quando você move uma imagem na tela do celular? Ou quando vê seu reflexo no espelho? Será que todas as mudanças alteram o tamanho e a forma do que estamos observando?

Ao longo deste material, vamos explorar essas questões e descobrir como translações, rotações, reflexões e ampliações podem ser definidos matematicamente.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

O PLANO CARTESIANO

Considere duas retas perpendiculares r e s, concorrentes em um ponto O. Escolhemos uma unidade de medida de comprimento (por exemplo, o centímetro) para marcar os números em ambas as retas, de forma que o ponto O representa a origem e marca a posição 0 (zero).

Esse plano é então chamado de **plano cartesiano**. Chamamos o eixo horizontal de **eixo das abscissas**, indicado por *x*, e o eixo vertical de **eixo das ordenadas**, indicado por *y*.
Todo ponto escolhido no plano cartesiano possui um único par de números que o representa. Vejamos como obtê-lo:

1. Dado um ponto P, no plano cartesiano, consideramos duas retas r’ e s’ passando por P e paralelas aos eixos horizontal e vertical, respectivamente.
2. Tais retas determinam pontos nos eixos x e y, que podem ser associados a números reais x_P e y_P O **par ordenado** (x_P, y_P) é chamado de **coordenada de P**.

Observe na figura 1 como obter tais números.
Podemos indicar $P = (x_P, y_P)$ ou então $P(x_P, y_P)$.

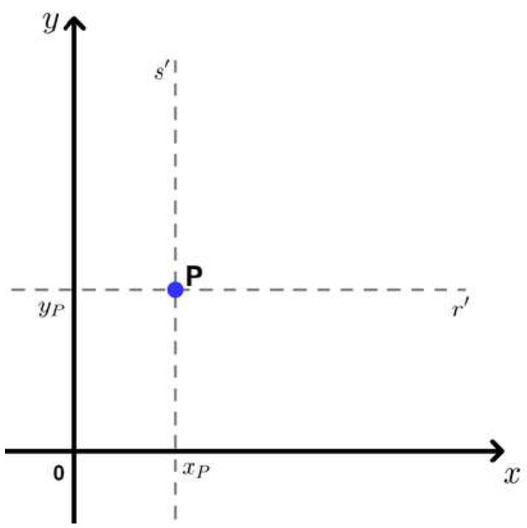


Figura 1. Ponto P no plano cartesiano

De forma a simplificar a localização no plano cartesiano podemos representá-lo como uma malha quadriculada, conforme indicado na figura 2.

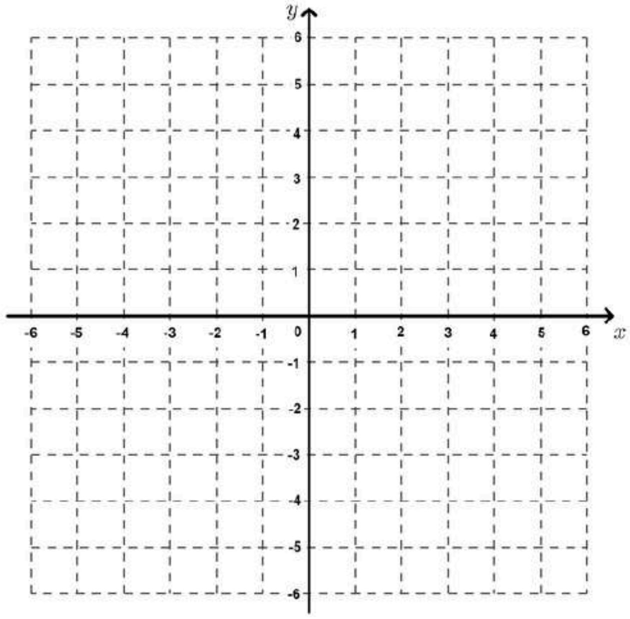


Figura 2. Plano cartesiano em malha quadriculada

Agora observe no plano cartesiano abaixo os quatro pontos marcados: A, B, C e D. Vamos determinar suas coordenadas.

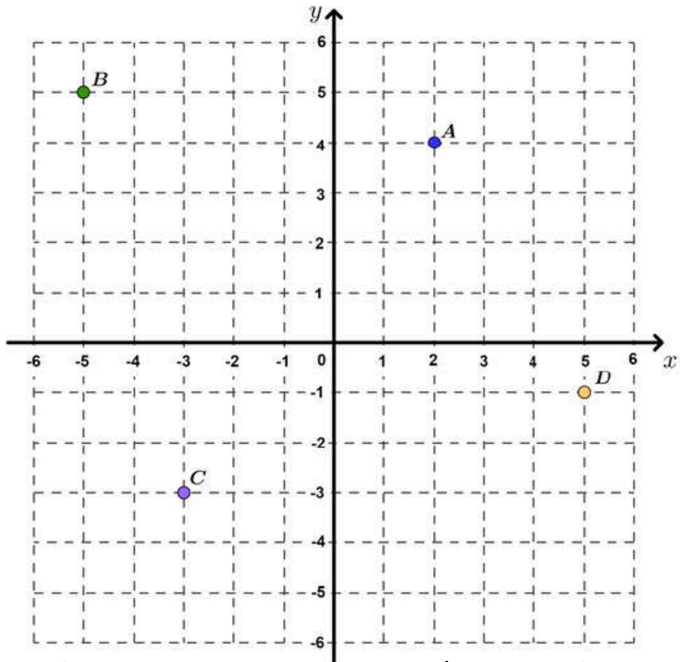


Figura 3. Pontos A, B, C e D no plano cartesiano

Iniciando pelo ponto A, vemos que o valor correspondente a ele no eixo horizontal é 2 e no eixo vertical é 4, portanto $A = (2, 4) \; ou \; A(2, 4)$. Seguindo o mesmo raciocínio, temos: $B(-5\,,\,5)$, $C(-3\,,\,-3)$ e $D(5\,,\,-1)$.

TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS

As transformações isométricas são aquelas que alteram a posição de uma figura, mantendo sua forma e tamanho. Podemos chamá-las de isometrias.
Nesta seção veremos três tipos de isometrias: translação, reflexão e rotação.

Translação

Quando uma figura é obtida a partir de outra, fazendo um deslocamento de todos os pontos dela, na mesma direção, no mesmo sentido e na mesma medida de distância, temos um caso de simetria de translação.

Na figura 4, todos os pontos do polígono 1 foram deslocados na mesma direção, em 4 unidades para baixo (tome o lado do quadradinho como unidade de medida), gerando, assim, o polígono 2.

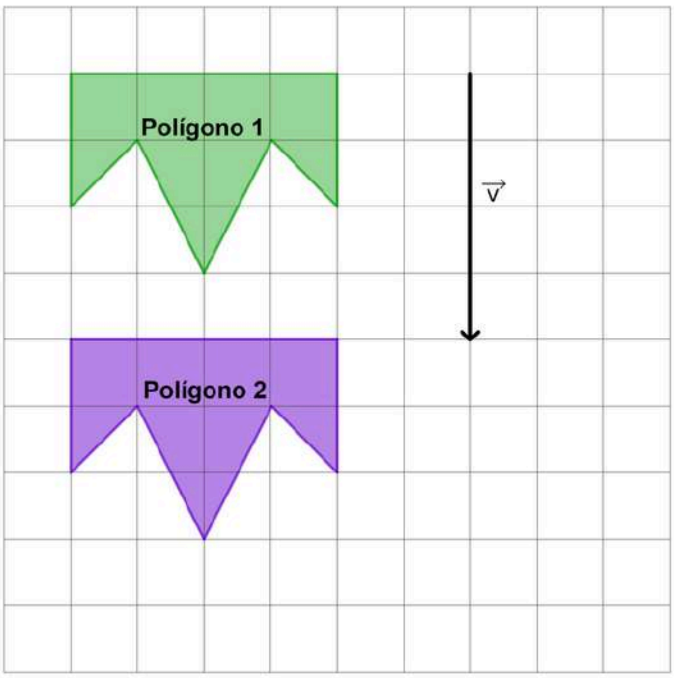


Figura 4. Translação da Polígono 1, gerando o Polígono 2

VOCÊ SABIA?

Os flocos de neve são um exemplo notável de geometria natural. Eles sempre têm simetria hexagonal, resultando em uma forma poligonal com seis lados. Esse padrão ocorre porque as moléculas de água se arranjam em uma estrutura hexagonal quando congeladas. Cada floco de neve tem uma forma única, mas todos seguem o princípio de simetria hexagonal.

Design: Getty Images / Fonte: Canva

Exemplo 1

Observe a Figura 5 que o triângulo ABC foi transladado pelo vetor $\vec{v}$, resultando no triângulo A'B'C'. Separadamente, o mesmo triângulo ABC foi transladado pelo vetor $\vec{w}$, originando o triângulo A''B''C''.
Determine as coordenadas dos vértices dos triângulos obtidos em cada translação observando a figura 5.

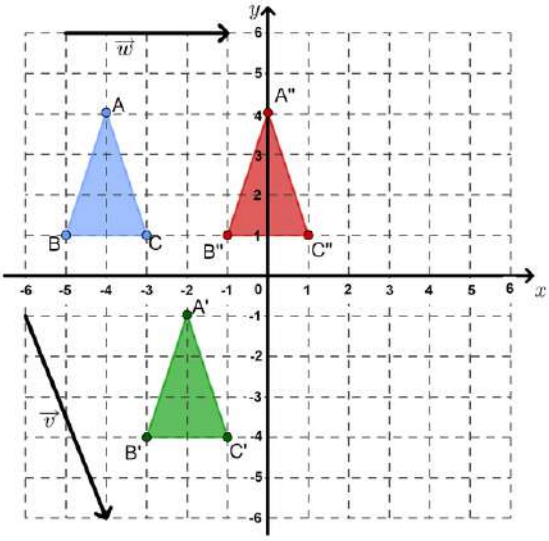


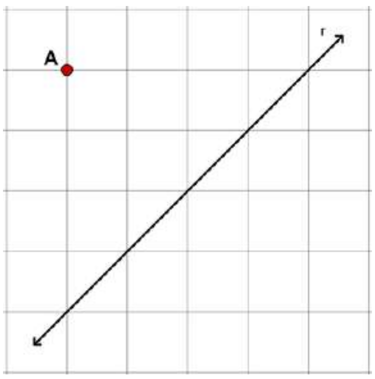
Figura 5. Exemplo de translação

Após a translação do triângulo ABC no sentido de $\vec{v}$, obtemos o triângulo A'B'C', cujos vértices são: $A'(-2,-1)$, $B'(-3,-4)$ e $C'(-1,-4)$.

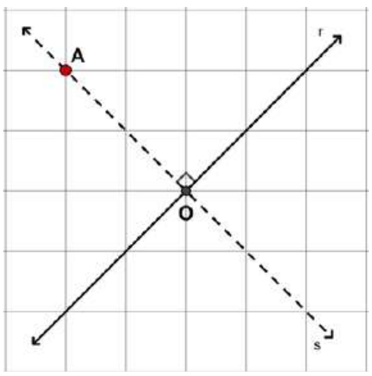
Após a translação do triângulo ABC no sentido de $\vec{w}$, obtemos o triângulo A"B"C", cujos vértices são: $A''(0,4)$, $B''(-1,1)$ e $C''(1,1)$.

Reflexão

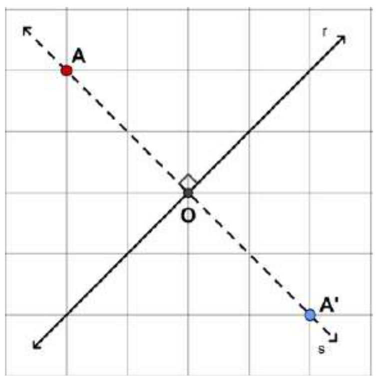
Quando fazemos a reflexão de uma figura em relação a uma reta obtemos uma figura congruente à figura original, porém numa posição diferente em relação à reta dada. Vejamos o processo para obter o simétrico de um ponto A em torno de uma reta r:



1 Representar graficamente os objetos.



2 Traçar uma reta s perpendicular à reta r passando por A. Marcar o ponto O, interseção das retas r e s.



3 A partir de O, marcar, sobre a reta s um ponto A', de modo que a distância de O a A seja igual à distância de O a A'.

Exemplo 2

A reflexão de uma figura em relação a uma reta dada é o mesmo que obter a figura formada pelos pontos simétricos dos pontos dessa figura em relação à reta dada. Observe na figura abaixo as reflexões em torno do eixo x e do eixo y do triângulo cujos vértices são os pontos : $A(-4,4), B(-5,1)$ e $C(-3,1)$.
Determine as coordenadas dos vértices dos triângulos obtidos em cada reflexão observando a figura 6.

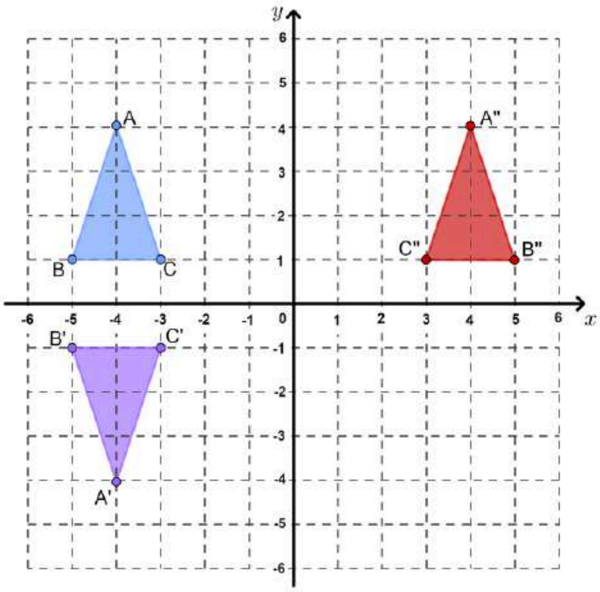


Figura 6. Exemplo de reflexão

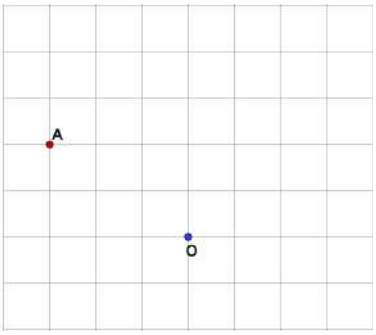
- Após a reflexão em torno do eixo x, obtemos o triângulo A’B’C’, cujos vértices são: $A'(-4,-4), B'(-5,-1)$ e $C'(-3,-1)$.

- Após a reflexão em torno do eixo y, obtemos o triângulo A”B”C”, cujos vértices são: $A"(4,4), B"(5,1)$ e $C"(3,1)$.

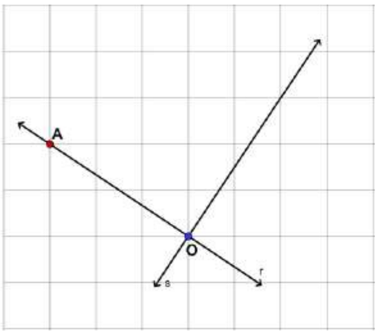
Rotação

A simetria de rotação ocorre quando uma figura plana é girada em torno de um ponto, de acordo com um ângulo (com medida de abertura entre 0° e 360°), em certo sentido (horário ou anti-horário).

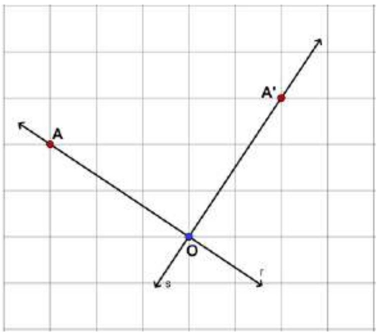
Vamos ver o processo para determinar a rotação de 90° no sentido horário de um ponto A em relação a um ponto fixo O:



1 Representar graficamente os objetos.



2 Traçar uma reta r passando por A e O. Após isso, traçar uma reta s passando por O formando o ângulo desejado com a reta r.



3 A partir de O, marcar, sobre a reta s um ponto A' , de modo que a distância de O a A seja igual à distância de O a A'.

Exemplo 3

Observe na figura abaixo as rotações de 90° no sentido anti-horário e de 180° no sentido horário em torno da origem do plano cartesiano, do triângulo cujos vértices são os pontos $A(-4,4), B(-5,1)$ e $C(-3,1)$.
Determine as coordenadas dos vértices dos triângulos obtidos em cada rotação observando a figura 7.

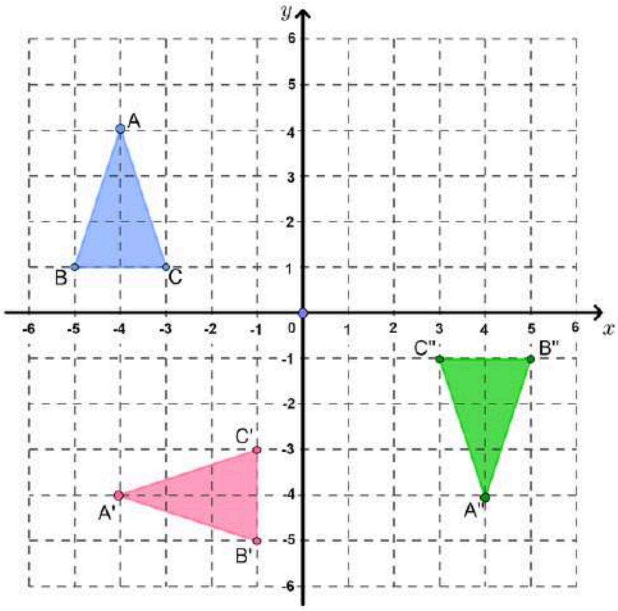


Figura 7. Exemplo de rotação

- Após a rotação de 90° no sentido anti-horário, obtemos o triângulo A'B'C', cujos vértices são: $A'(-4,-4), B'(-1,-5)$ e $C'(-3,-1)$.

- Após a rotação de 180° no sentido horário, obtemos o triângulo A"B"C", cujos vértices são: $A"(4,-4), B"(5,-1)$ e $C"(3,-1)$.

TRASNFORMAÇÕES HOMOTÉTICAS

Nas transformações homotéticas, o tamanho das figuras é alterado, porém a nova figura é semelhante à figura original. As transformações homotéticas também são chamadas de homotetias e mantêm a proporcionalidade das medidas lineares.

Multiplicação de um ponto por um número real

Para multiplicar um ponto por um número real devemos multiplicar todas as entradas desse ponto por este número real. Veja os exemplos abaixo:

Exemplo 4

- $A(-1,2)$ multiplicado por -1, gera A': $-1 \times (-1,2) = (1,-2) \rightarrow A'(1,-2)$.
- $B(3,3)$ multiplicado por $\frac{1}{3}$, gera B': $\frac{1}{3} \times (3,3) = (1,1) \rightarrow B'(1,1)$.
- $C(4,-2)$ multiplicado por $-\frac{1}{2}$, gera C': $-\frac{1}{2} \times (4,-2) = (-2,1) \rightarrow C'(-2,1)$.

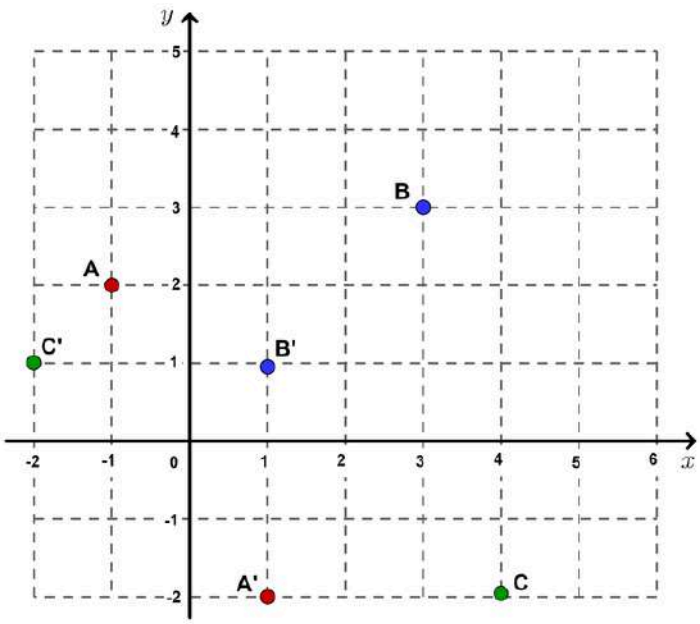


Figura 8. Exemplo de multiplicação de um ponto por número real

VOCÊ SABIA?

A geometria da teia, especialmente as de aranhas tecelãs de orb, apresentam uma simetria poligonal e é uma das formas naturais mais eficientes, proporcionando a máxima área de captura de presas com o mínimo de material necessário.

Multiplicação de um polígono por um número real

Considerando os vértices de um polígono como pontos do plano cartesiano, para multiplicar um polígono por um número real k devemos obter seus vértices multiplicados por k e, então, ligá-los, obtendo, assim, o polígono multiplicado por k.

Exemplo 5

Ao multiplicar o polígono ABCDE por 2, obtemos o polígono A'B'C'D'E'

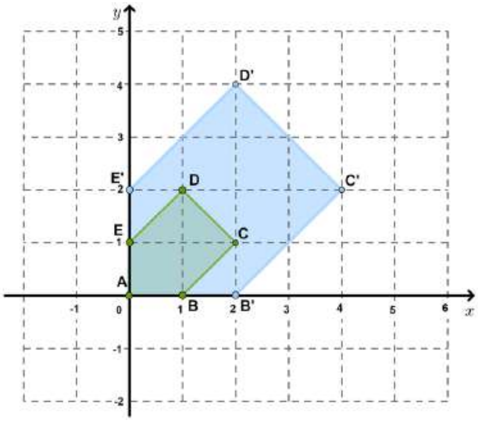


Figura 9. Exemplo de multiplicação de polígono por número maior que 1

Exemplo 6

- Ao multiplicar o triângulo ABC por $\frac{1}{2}$, obtemos o triângulo A'B'C'.
- Ao multiplicar ABC por $-\frac{1}{4}$, obtemos o triângulo A"B"C".

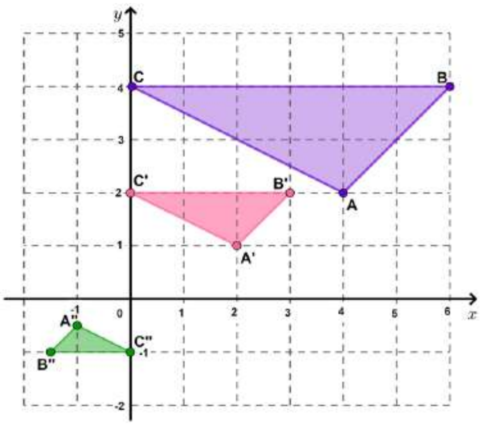


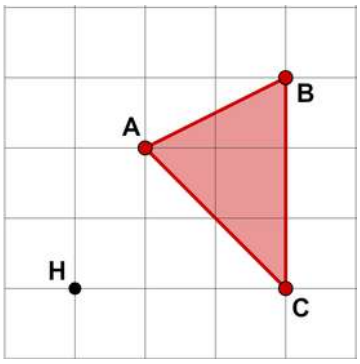
Figura 10. Exemplo de multiplicação de polígono por número menor que 1

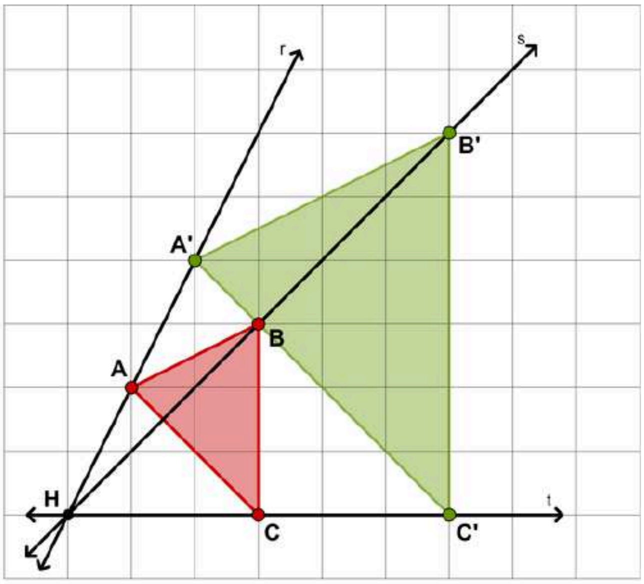
atenção

Se o valor de k for menor do que zero o polígono obtido é invertido em relação ao polígono original.

Homotetia

Para obter a ampliação ou redução, com ou sem inversão, de uma figura podemos usar a técnica de homotetia. Vamos ver como fazer a ampliação do triângulo ABC usando o centro de homotetia H e uma razão 2:





1 Representar graficamente os objetos.

2 A partir de H traçar 3 retas, r, s e t, passando por A, B e C, respectivamente.

3 Sob as retas traçadas, marcar os pontos A', B' e C' de modo que HA'=2HA, HB'=2HB e HC'=2HC. Após isso, construir o triângulo A'B'C'.

Caso a razão usada seja negativa, a imagem formada aparece no lado oposto ao centro de homotetia H. Portanto, a imagem formada se apresenta invertida em relação à imagem original. Nesse caso, dizemos ter uma homotetia inversa.

Observe abaixo a transformação do triângulo ABC por homotetia pelo ponto H usando a razão -0,5 e -1.

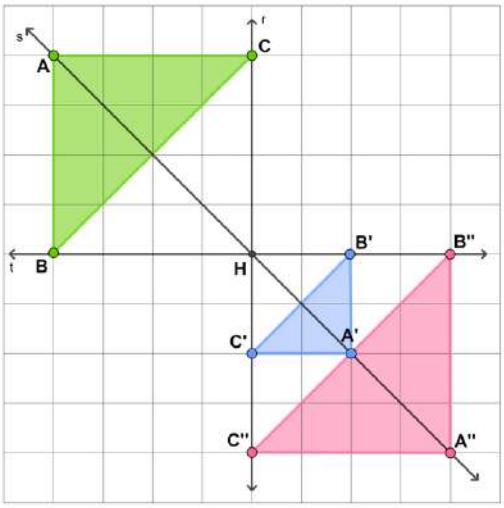
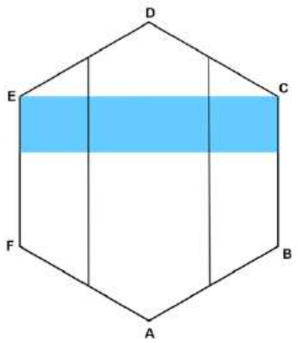


Figura 11. Exemplo de homotetia

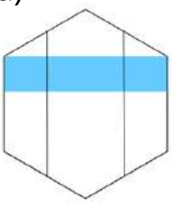
Exercícios Resolvidos

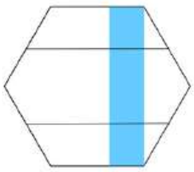
EXERCÍCIO 1

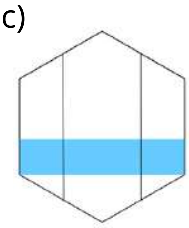
(OBRL 2017 - Adaptada) A imagem abaixo representa um azulejo decorado.

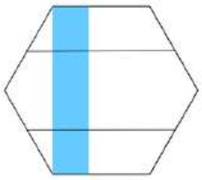


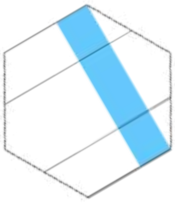
Efetuando, nessa figura, uma simetria de reflexão em torno do lado BC e, em seguida, uma rotação de 90° no sentido horário em torno do ponto B, obtemos a figura indicada na alternativa

a)


b)


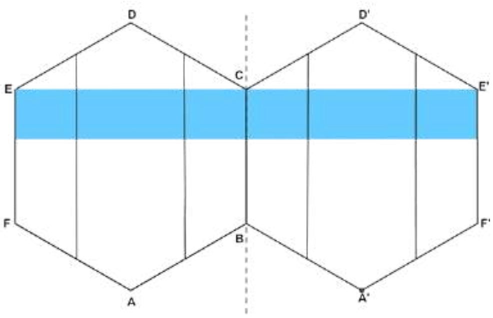
c)


d)


e)


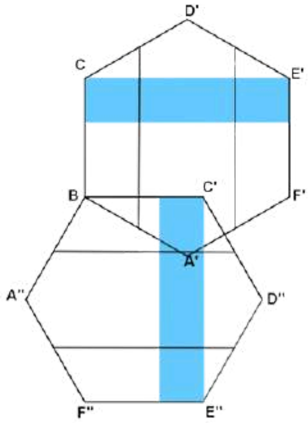
Resolução

1 Considere o hexágono ABCDEF, fazendo a reflexão em torno do lado BC, obtermos A’BCD’E’F’.



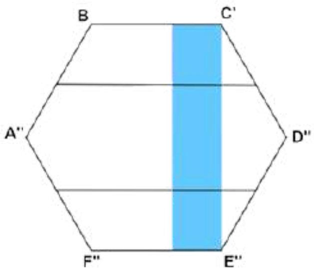
2 A partir de A’BCD’E’F’, fazemos a rotação de 90° no sentido horário do hexágono em relação ao ponto B, portanto,

A’→A”
B→B
C→C’
D’→D”
E’→E”
F’→F”



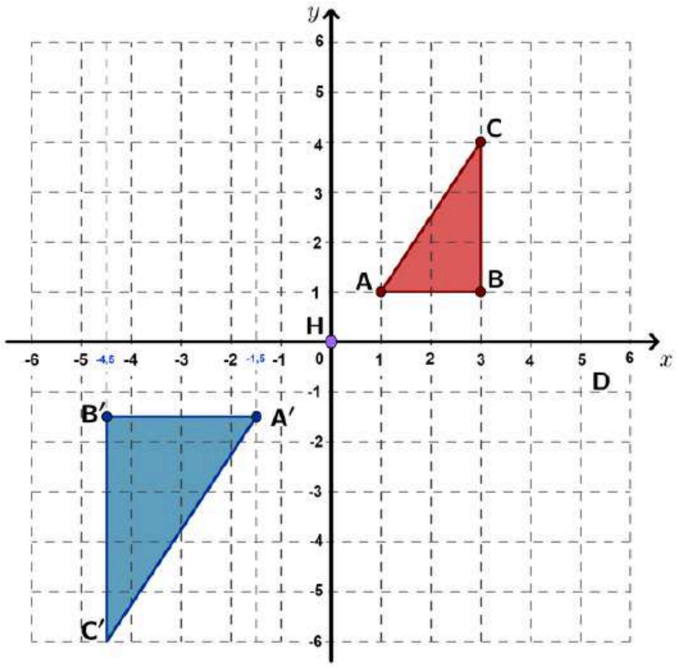
Assim, o hexágono final é A”BC’D”E”F”.

3 Logo, ao final do processo, obtemos a figura presente na alternativa **b)**:



EXERCÍCIO 2

A imagem abaixo representa a transformação homotética do triângulo ABC através do centro de homotetia H.



Sobre esta transformação faz-se as seguintes afirmativas:

I. A razão de homotetia é maior do que 1, pois as dimensões de A'B'C' são maiores do que as dimensões de ABC.

II. O perímetro de A'B'C' é 1,5 vezes o perímetro de ABC.

III. A área de A'B'C' é 1,5 vezes a área de ABC.

Está(ão) correta(s) apenas a(s) afirmativa(s)

a) I.
b) I e II.
c) II.
d) II e III.
e) I e III.

Resolução

Inicialmente, note que o segmento AB mede 2 u.c. e que o segmento A'C' mede 3 u.c., portanto, a razão de homotetia, em módulo, é igual a 1,5:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

No entanto, a figura está invertida, assim, k=-1,5. Desse modo, o perímetro de A'B'C' é 1,5 vezes o perímetro de ABC e a área de A'B'C' é 1,5·1,5=2,25 vezes a área de ABC. Portanto, a alternativa correta é a **alternativa C**.

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 3 (Geometria e Trigonometria) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
- p. 18-27.

2. **Volume 4 (Trigonometria e Sistemas Lineares) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
- p. 13-15.

ATIVIDADE INTERDISCIPLINAR

A atividade proposta neste link pode ser utilizada sozinha ou em conjunto com os professores de filosofia e sociologia para discutir a presença de simetrias nas culturas africana e indígena e para discutir questões como a importância dessas obras para a valorização étnica.

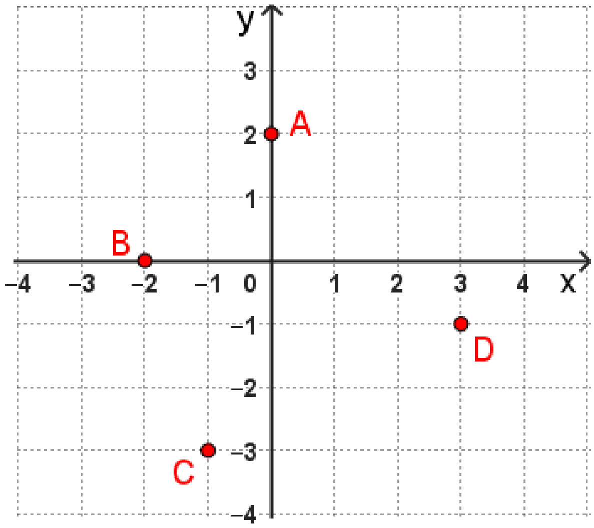
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

O **Produto Educacional** da pesquisa de mestrado de Sabrine Costa Oliveira, cujo título é "Transformações Geométricas: Bordando Conceitos e Divulgando Atividades" apresenta algumas propostas (páginas 30 a 47) que podem ser exploradas para o estudo das transformações geométricas.

Atividades

ATIVIDADE 1

Observe os pontos do plano cartesiano e responda:



a) Escreva os pares ordenados que representam as coordenadas dos pontos A, B, C e D.

b) Qual ponto possui a maior abscissa e qual possui a maior ordenada?

c) Usando uma régua, conecte com segmentos de reta os pontos A, B, C e D, na sequência, de modo a formar o polígono ABCD.

ATIVIDADE 2

A isometria é uma transformação geométrica em que a figura original mantém suas dimensões e forma, ou seja, a transformação não altera a medida do comprimento do contorno e nem dos ângulos da figura.
Qual das alternativas abaixo são exemplos comuns de transformação isométrica?

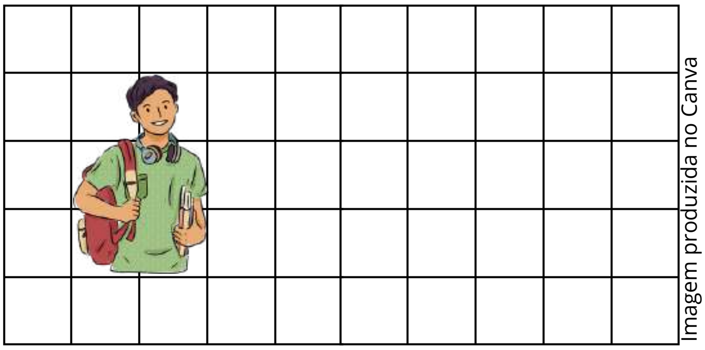
a) Ampliação, Rotação e Distorção.
b) Deslocamento, Ampliação e Redução.
c) Reflexões, Dilatação e Translação.
d) Reflexões, Rotações e Translações.
e) Deformação, Inversão e Ampliação.

ATIVIDADE 3

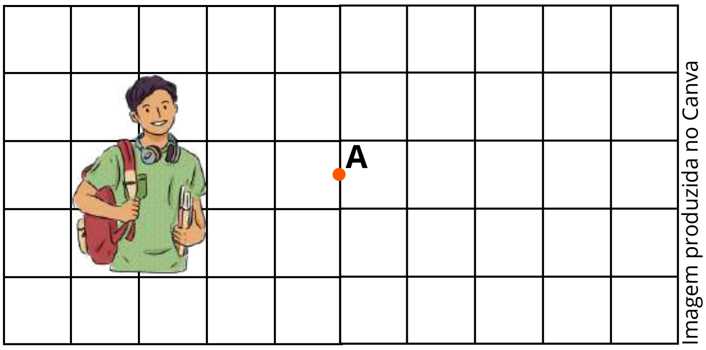
Utilizando a malha quadriculada a seguir, recorte as imagens fornecidas no material complementar disponível na página 51. Após isso, siga as orientações de cada item, colando as figuras na malha, usando o eixo de simetria, conforme as instruções abaixo para as transformações isométricas:

Caro aluno(a), três imagens estão sendo disponibilizadas na página 51 deste documento, as quais podem ser utilizadas para a realização desta atividade, com o objetivo de facilitar e otimizar o seu desenvolvimento.

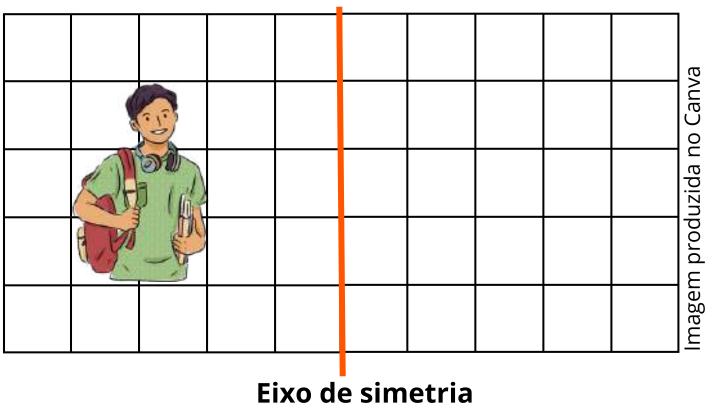
a) Realize uma translação de 6 unidades para a direita.



b) Realize uma rotação de 180º no sentido horário, em relação ao ponto A.

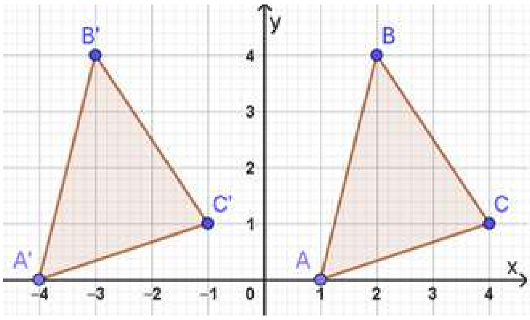


c) Realize uma reflexão em relação ao eixo de simetria.



ATIVIDADE 4

Observe o triângulo ABC e o triângulo A'B'C' representados no plano cartesiano a seguir.



A respeito desses triângulos é **CORRETO** afirmar que:

a) são triângulos que não têm a medida do contorno alterada e nem dos ângulos internos, obtidos por meio de uma reflexão em relação ao eixo y.

b) são triângulos que não têm a medida do contorno alterada e nem dos ângulos da figura, obtidos por meio de uma rotação em torno do ponto da origem (0, 0).

c) são triângulos que não têm a medida do contorno alterada e nem dos ângulos da figura, obtidos por meio de uma translação.

d) são triângulos em que as medidas de seus lados se alteram de forma proporcional, mas mantêm os ângulos iguais, obtidos por meio da rotação de 90º no sentido horário.

e) São triângulos em que as medidas de seus lados se alteram de forma proporcional, mas mantêm os ângulos iguais, obtidos por meio de uma reflexão em relação ao eixo y.

ATIVIDADE 5

A simetria está presente tanto no cotidiano quanto na natureza. Observe as imagens 1, 2 e 3 a seguir, que ilustram alguns exemplos de transformações geométricas isométricas.

Figura 1. Flor de *Datura stramonium*
Design: Getty Images / Fonte: Canva

Figura 2. Flor de Lótus
Design: Manfredxy / Fonte: Canva

Figura 3. Aquedutos dos Pegões, Portugal
Design: Getty Images / Fonte: Canva

Indique qual das alternativas abaixo corresponde, respectivamente, às transformações isométricas presentes nas imagens 1, 2 e 3:

a) Translação, Reflexão e Rotação.

b) Rotação, Reflexão e Translação.

c) Rotação, Translação e Reflexão.

d) Translação, Rotação e Reflexão.

e) Reflexão, Translação e Rotação.

ATIVIDADE 6

(Enem PPL 2018) Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:

Posição inicial da figura:

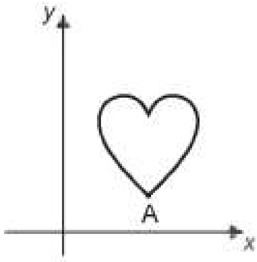
1ª - Reflexão no eixo x;

2ª - Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A;

3ª - Reflexão no eixo y;

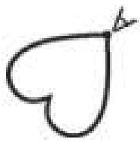
4ª - Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A;

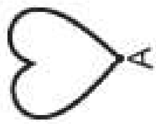
5ª - Reflexão no eixo x.



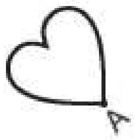
Qual a posição final da figura?

a) 

c) 

e) 

b) 

d) 

ATIVIDADE 7

Transformação geométrica é uma aplicação bijetiva entre duas figuras geométricas, que podem estar no mesmo plano ou em planos diferentes. Por meio dessa transformação, a partir de uma figura geométrica original, gera-se outra que é geometricamente congruente ou semelhante à primeira. Sobre a transformação geométrica conhecida como homotetia, está **incorreto** afirmar que:

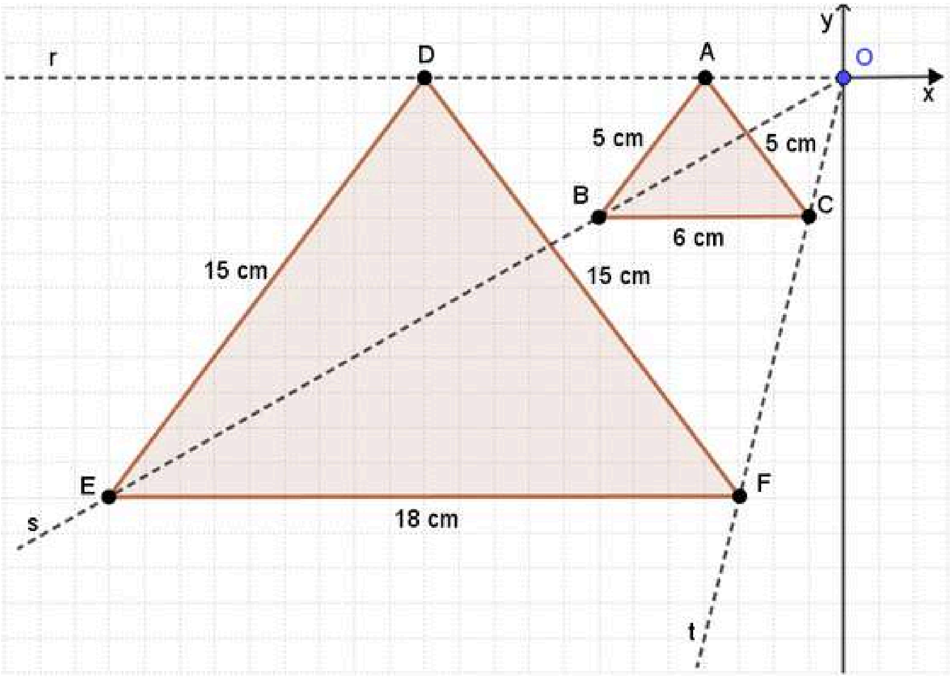
a) A homotetia é um tipo de transformação geométrica que altera o tamanho de uma figura, mas mantém as características principais, como a forma e os ângulos, ou seja, a figura é ampliada ou reduzida.

b) Na homotetia, todos os pontos da figura original são afastados ou aproximados de um ponto fixo, denominado centro de homotetia, seguindo uma razão de escala k.

c) Em uma transformação homotética com razão k > 1, a figura resultante é maior que a original.
d) Em uma transformação homotética com razão 0 < k < 1, a figura resultante é menor que a original.
e) A homotetia é um tipo de transformação geométrica que preserva as distâncias entre pontos e a amplitude dos ângulos, ou seja, a figura inicial e a transformada são congruentes.

ATIVIDADE 8

Utilizando o plano cartesiano, Marcos desenhou um triângulo com vértices A, B e C. Em seguida, ele fixou a origem do plano cartesiano, o ponto O (0, 0), como centro de uma homotetia. A partir de O, Marcos traçou as semirretas *r*, *s* e *t*, que passam pelos vértices A, B e C, respectivamente, do menor triângulo. Posteriormente, ele realizou uma ampliação do triângulo ABC, gerando um triângulo semelhante, cujos vértices são D, E e F, conforme mostrado na imagem a seguir.



A razão de homotetia nessa transformação, que gera o triângulo DEF a partir do triângulo ABC, é igual a:

$a)\ \frac{1}{3}$

$b)\ \frac{1}{4}$

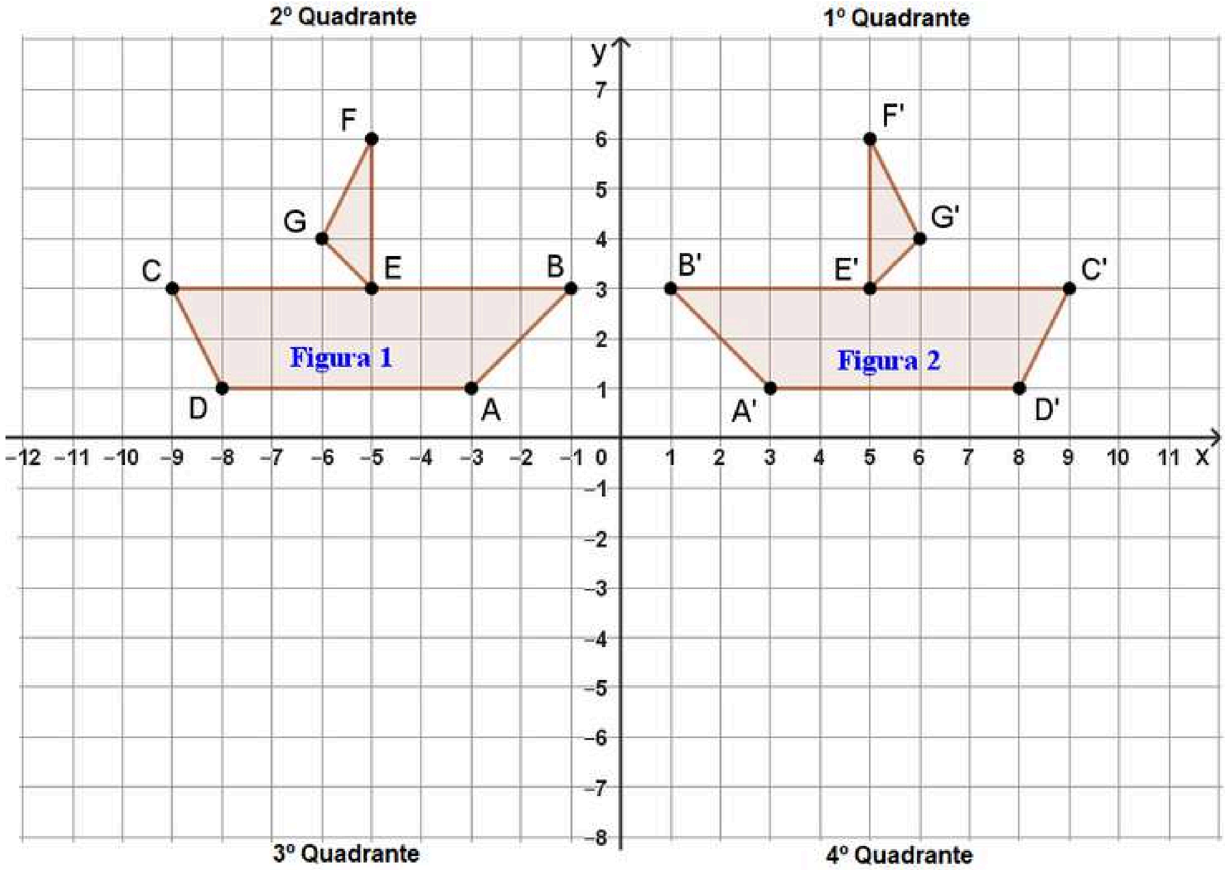
$c)\ 2$

$d)\ 3$

$e)\ 4$

ATIVIDADE 9

Utilizando o software GeoGebra, Bruno desenvolveu o projeto de um barquinho, que foi construído no 2º quadrante de um plano cartesiano (figura 1). Observe que, no 1º quadrante, a figura 2 foi gerada a partir da figura 1, por meio de uma transformação geométrica.



Considerando o desenho realizado por Bruno, representado pelas figuras 1 e 2, responda às seguintes questões:

a) Qual transformação geométrica foi realizada da figura 1 para a figura 2?

b) Escreva as coordenadas dos pontos que formam a figura 1.

A =	C =	E =	G =
B =	D =	F =	

c) Escreva as coordenadas dos pontos que formam a figura 2.

A' =	C' =	E' =	G' =
B' =	D' =	F' =	

d) Qual regularidade você observa entre as coordenadas dos pontos simétricos entre a figura 1 e a figura 2? Por que isso acontece?

e) Aplique, no quadrante 1, uma simetria de reflexão em relação ao eixo *x* e desenhe o barquinho (que chamaremos de figura 3), com vértices A", B", C", D", E", F" e G".

f) Escreva os pares ordenados dos vértices da figura 3 e, em seguida, responda: qual regularidade você observa nas coordenadas dos pontos simétricos A′ e A", B′ e B", C′ e C", D′ e D", E′ e E", F′ e F", G′ e G"? Por que isso acontece?

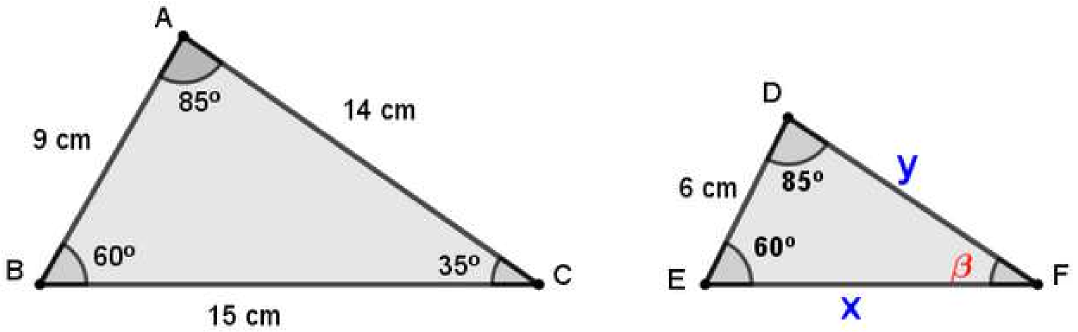
g) Multiplique as coordenadas (x, y) dos pontos do barco representado pela figura 2 por 3 e escreva as coordenadas de A‴, B‴, C‴, D‴, E‴, F‴ e G‴ a seguir.

A‴ =	D‴ =	G‴ =
B‴ =	E‴ =	
C‴ =	F‴ =	

h) Usando a malha quadriculada do material complementar página 51, desenhe o novo barco A‴B‴C‴D‴E‴F‴G‴, que chamaremos de figura 4, no 1° quadrante do plano cartesiano. O desenho realizado é uma ampliação ou uma redução do barco original (figura 2)? Qual é a razão de semelhança entre a figura 2 e o novo desenho (figura 4)?

ATIVIDADE 10

Nas figuras abaixo, o triângulo DEF foi obtido a partir de uma transformação geométrica no triângulo ABC.



Considerando as medidas apresentadas, determine:

a) Qual o nome dessa transformação geométrica?

b) Essa transformação envolve um eixo de simetria ou uma razão de semelhança? Explique.

c) Qual é a razão de escala K, entre os triângulos DEF e ABC?

d) Qual é a medida do ângulo β no triângulo DEF? Explique.

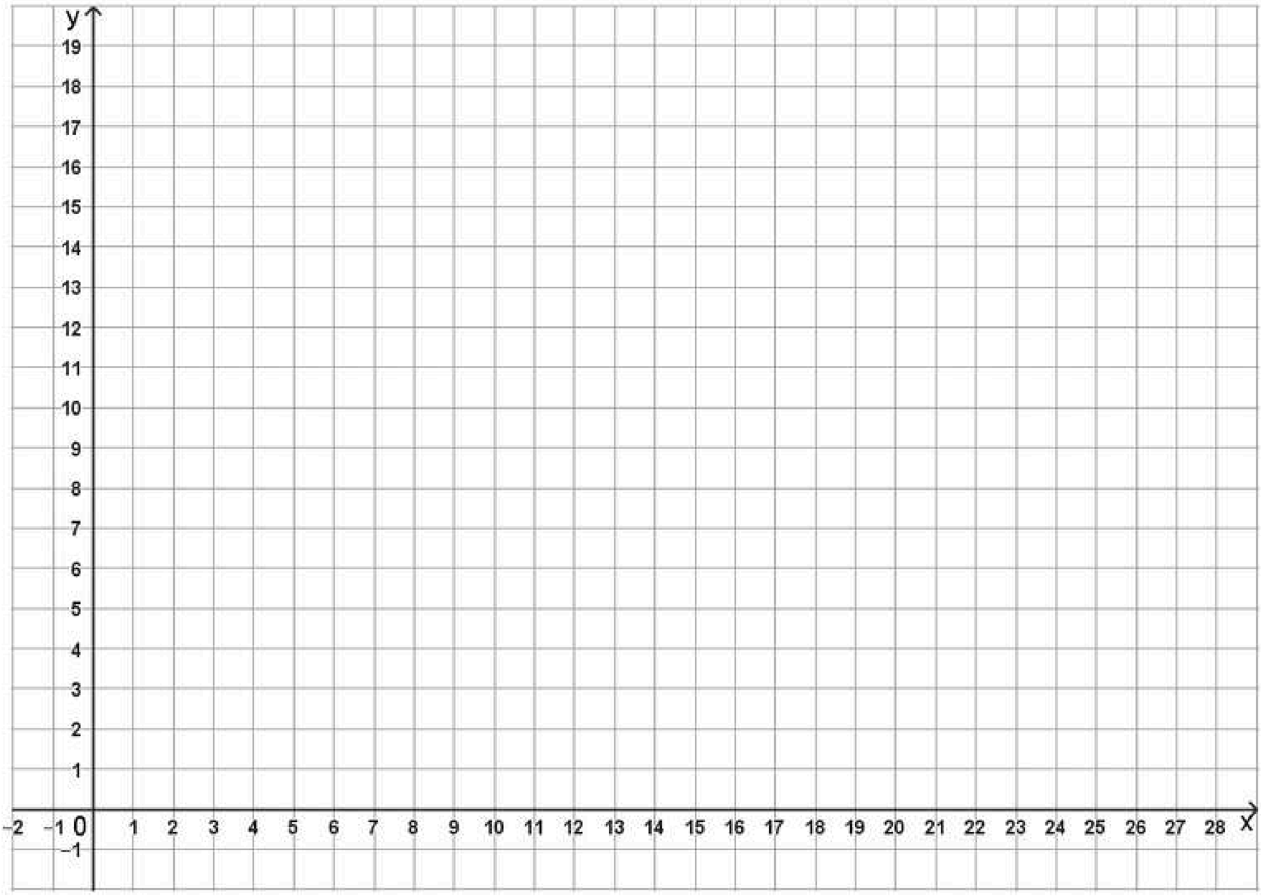
e) Determine a medida dos comprimentos representados por x e y.

Material complementar disponibilizado para a realização das questões 03 e 09.

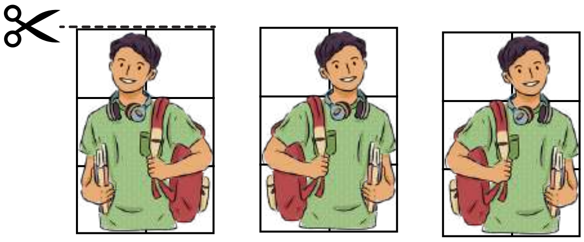
Nome do estudante:____

Turma: ______________

ATIVIDADE 09: Malha Quadriculada, disponível para a construção da figura 04, item h.



ATIVIDADE 03 – Material disponibilizado para ser recortado e colado na ATIVIDADE 03, conforme as orientações e correspondências de cada item da questão.



Design: Sketchify / Fonte: Canva

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: **geometria e trigonometria.** 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Trigonometria e sistemas lineares.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

NETO, A. P.; NETO, A. C. M. **Coordenadas, Distâncias e Razões de Segmentos no Plano Cartesiano - parte 1**. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/uploads/material_teorico/t8bufhg76pmw.pdf. Acesso em 22 de janeiro de 2025.

OLIVEIRA, S.C.; SILVA, S.A.F. **Transformações Geométricas:** Bordando Conceitos e Divulgando Atividades. Vitória, Ifes, 2026.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: geometria e trigonometria.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Trigonometria e sistemas lineares.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

GOV.BR. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Inep. **Provas e Gabaritos**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 08/02/2025.

INSTITUTO REÚNA. SEQUÊNCIA DIDÁTICA 1 - Transformações geométricas, plano cartesiano e semelhança. Material do professor/a. Disponível em: <https://biblioteca.institutoreuna.org.br/Sequencia_didatica_1_MAT_vol2.pdf>. Acessado em: 09/03/2025.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Matemática financeira, gráficos e sistemas.** Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.