QUINZENA

15

25/08 a 29/08

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

Trigonometria: semelhança e relações métricas.

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	• Reconhecer relações de semelhança entre triângulos, usando critérios como a congruência de ângulos correspondentes nos dois triângulos ou a proporcionalidade entre medidas de lados correspondentes. • Deduzir experimentalmente as relações métricas no triângulo retângulo (inclusive o Teorema de Pitágoras) a partir de relações de semelhança de triângulos. • Utilizar as relações métricas no triângulo retângulo (inclusive o Teorema de Pitágoras) na resolução de problemas.	• **D049_M** Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas. • **D051_M** Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

Contextualização

A Matemática não é apenas uma ferramenta abstrata; ela está presente em tudo ao nosso redor. A semelhança entre figuras geométricas, especialmente triângulos, nos permite compreender desde pequenas construções até os grandes fenômenos do universo. E entre essas aplicações, uma das mais importantes é a dedução do Teorema de Pitágoras.

Você provavelmente já estudou o famoso Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, mas já se perguntou por que ele funciona? Será que o teorema é apenas uma regra que aceitamos sem questionar, ou podemos prová-lo de maneira lógica e intuitiva?

Neste material, vamos explorar como a semelhança de triângulos não apenas explica o Teorema de Pitágoras, mas também fundamenta diversas relações métricas dentro do triângulo retângulo. Você verá que a Matemática não precisa ser decorada – ela pode ser descoberta e compreendida de forma natural e experimental.

Agora, antes de seguir adiante, pense: se a Matemática pode prever a altura de um prédio sem medições diretas, o que mais ela pode nos revelar?

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

SEMELHANÇA ENTRE POLÍGONOS

Definição

Dois polígonos são ditos semelhantes se, e somente se:

1. Possuem ângulos ordenadamente congruentes; e
2. Os lados opostos aos ângulos congruentes são proporcionais.

Utilizamos o símbolo "$\sim$" para denotar semelhança entre polígonos.

Por exemplo, considerando os triângulos abaixo:

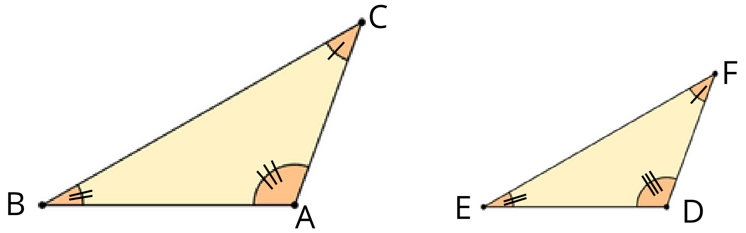


Figura 1: Dois triângulos semelhantes.

Podemos expressar a semelhança entre eles da seguinte forma:

$$ABC \sim DEF \iff \begin{cases} \widehat{A} \equiv \widehat{D} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{E} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{F} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \end{cases}$$

Essa relação indica que os ângulos correspondentes possuem medidas iguais, e os lados opostos a esses ângulos são proporcionais, garantindo a semelhança entre estes polígonos.

SEMELHANÇA ENTRE TRIÂNGULOS

Apesar de dois polígonos serem semelhantes apenas quando possuem ângulos correspondentes congruentes e lados homólogos proporcionais, os triângulos constituem um caso especial. É possível estabelecer critérios mínimos que garantem sua semelhança sem a necessidade de verificar todas essas condições simultaneamente. Esses critérios, conhecidos como **casos de semelhança de triângulos**, podem ser demonstrados matematicamente. A seguir, apresentamos três desses casos.

Caso AA (ângulo, ângulo)

Se dois triângulos possuem dois ângulos internos ordenadamente congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Exemplo

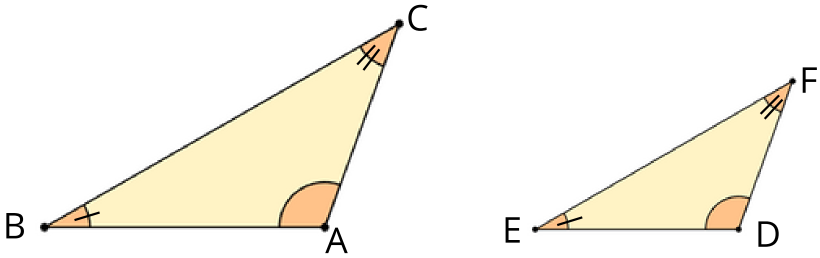


Figura 2: Dois triângulos semelhantes segundo o critério AA.

$$\left.\begin{matrix} \widehat{C} \equiv \widehat{F} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{E} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

VOCÊ SABIA?

Um exemplo de aplicação prática da semelhança de triângulos é a **paralaxe estelar**. Esse é um método utilizado por astrônomos para medir a distância de estrelas próximas com base no deslocamento aparente da estrela em relação ao fundo estelar quando observada de diferentes pontos da órbita da Terra.

Caso LAL (lado, ângulo, lado)

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

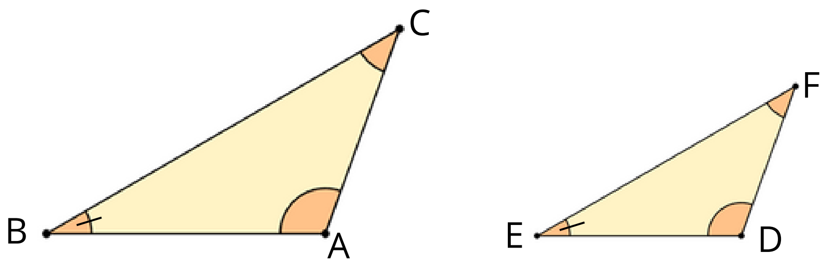


Figura 3: Dois triângulos semelhantes segundo o critério LAL.

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{B} \equiv \widehat{E} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Caso LLL (lado, lado, lado)

Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

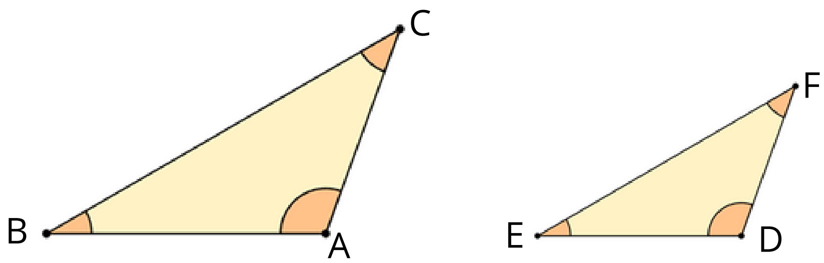


Figura 4: Dois triângulos semelhantes segundo o critério LAL.

$$\left.\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

VOCÊ SABIA?

Topógrafos usam a semelhança de triângulos para calcular a altura de edifícios, torres e montanhas sem precisar medi-los diretamente. Um método comum envolve a projeção de sombras e ângulos de visão.

ELEMENTOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Consideremos um triângulo ABC, retângulo em A, e tracemos a altura AD perpendicular a BC, com D pertencente a BC.

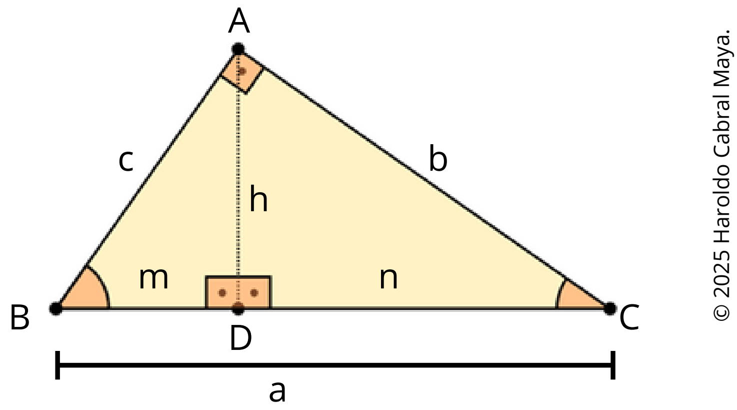


Figura 5: Triângulo retângulo com cota de altura perpendicular ao lado oposto ao ângulo reto.

Definimos os seguintes elementos:

$a = \overline{BC}$: *hipotenusa*

$b = \overline{AC}$: *cateto*

$c = \overline{AB}$: *cateto*

$m = \overline{BD}$: *projeção do cateto c sobre a hipotenusa*

$n = \overline{CD}$: *projeção do cateto b sobre a hipotenusa*

$h = \overline{AD}$: *altura relativa à hipotenusa*

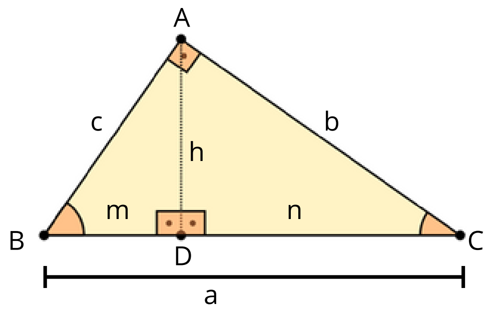
A altura AD divide o triângulo original em dois triângulos retângulos menores, ambos semelhantes ao triângulo $\triangle$ABC e entre si (veja na figura 5). Isso ocorre porque os três triângulos possuem os mesmos ângulos internos, garantindo a semelhança pelo critério AA.

Assim, temos a seguinte relação:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$$

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Podemos explorar a proporcionalidade entre polígonos semelhantes para obter algumas das relações métricas notáveis do triângulo retângulo da figura ao lado. Vejamos:



$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Longrightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c \\ \frac{b}{c} = \frac{h}{m} \Rightarrow b \cdot m = c \cdot h \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Longrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n \\ \frac{b}{c} = \frac{n}{h} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot n \end{cases}$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Longrightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

VOCÊ SABIA?

O funcionamento das lentes em câmeras e telescópios utiliza a semelhança de triângulos para calcular a ampliação da imagem e a posição do foco.

DEDUÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Somando as expressões obtidas para os quadrados dos catetos, $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$:

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$$

Como $m+n=a$, substituímos:

$$b^2+c^2=a\cdot\left(\underbrace{m+n}_{a}\right)\Rightarrow b^2+c^2=a\cdot a\Rightarrow a^2=b^2+c^2$$

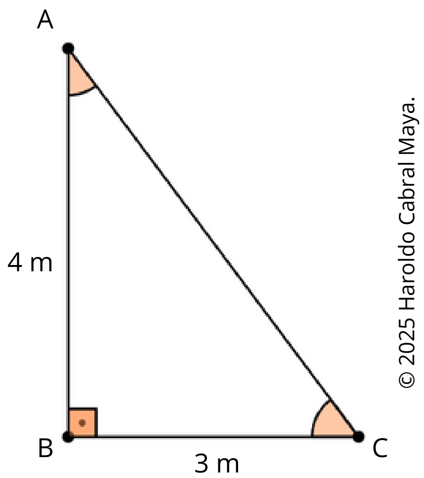
Portanto, concluímos que, em qualquer **triângulo retângulo**:

$$\boxed{\text{Hipotenusa}^2=(\text{Cateto 1})^2+(\text{Cateto 2})^2}$$

Exemplo

Deseja-se subir em um muro com 4 metros de altura. Para isso, apoia-se uma escada a 3 metros de distância desse muro, de modo que ela não ultrapasse a altura desse muro. Determine o comprimento da escada utilizada.

Solução



Podemos representar este exemplo por um modelo matemático (triângulo ABC, retângulo em B), onde queremos determinar a sua hipotenusa, ou seja, o lado do triângulo oposto ao ângulo reto.

Chamemos o lado AB, com 4 m, de Cateto 1, e o lado BC, com 3 m, de Cateto 2.
Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\text{Hipotenusa}^2=(\text{Cateto 1})^2+(\text{Cateto 2})^2$$

$$\text{Hipotenusa}^2=4^2+3^2=16+9=25$$

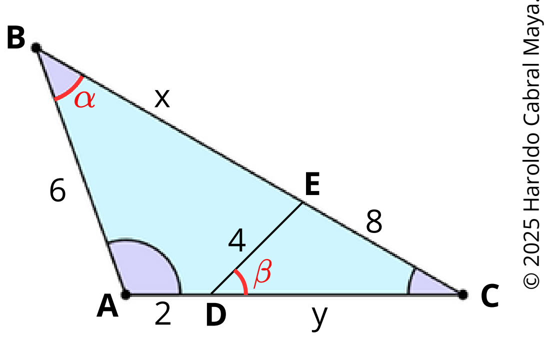
$$\text{Hipotenusa}=\sqrt{25}=5$$

Desse modo, conclui-se que a escada possui 5 m de comprimento.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Se $\alpha = \beta$, determine x e y:



Pelo caso AA, vê-se que os triângulos ABC e CED são semelhantes, uma vez que:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha \equiv \beta \\ A\widehat{C}B \equiv D\widehat{C}E\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC}$$

Utilizando a relação dos lados de triângulos semelhantes, obtêm-se:

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{y+2}{8} = \frac{x+8}{y}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{y+2}{8} \Rightarrow 4 \cdot (y+2) = 6 \cdot 8 \Rightarrow y+2 = \frac{6 \cdot \cancel{8}^{2}}{\cancel{4}^{1}} \Rightarrow$$

$$y = 12 - 2 = 10$$

Ainda pela relação dos lados de triângulos semelhantes, tem-se:

$$\frac{6}{4} = \frac{x+8}{y} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{x+8}{10} \Rightarrow x+8 = \frac{\cancel{10}^{5} \cdot \cancel{6}^{3}}{\cancel{4}^{1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 5 \cdot 3 - 8 = 15 - 8 = 7}$$

Assim, conclui-se que $x = 7$ e $y = 10$.

EXERCÍCIO 2

Um engenheiro deseja determinar a altura de um prédio sem precisar escalá-lo. Para isso, ele utiliza um poste de 2 metros de altura e mede sua sombra, que tem 3 metros de comprimento. No mesmo momento, ele mede a sombra do prédio e encontra 15 metros.

Sabendo que o Sol projeta sombras de maneira semelhante para ambos os objetos, determine a altura do prédio

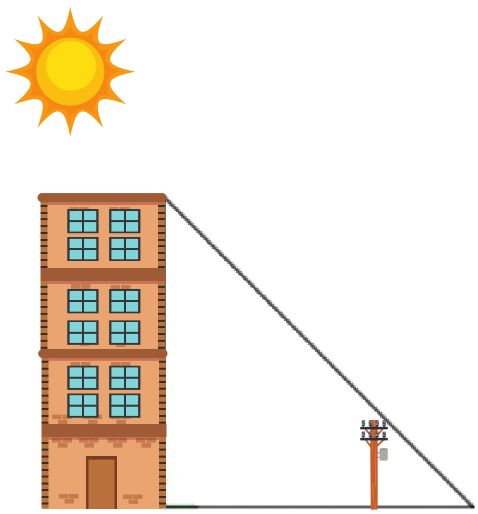
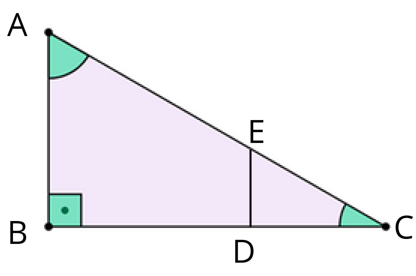


Imagem produzida no canva

Pelo caso AA, vê-se que os triângulos ABC e EDC são semelhantes, uma vez que:



$$\left.\begin{array}{l} A\widehat{C}B \equiv E\widehat{C}D \\ A\widehat{B}C \equiv E\widehat{D}C \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC}$$

Assim, podemos dizer que:

$$\frac{altura\ do\ prédio}{altura\ do\ poste} = \frac{sombra\ do\ prédio}{sombra\ do\ poste}$$

Substituindo os valores, temos:

$$\frac{h}{2} = \frac{15}{3}$$

Considerando a propriedade fundamental das proporções, a multiplicação de 2 e 15 equivale a multiplicação de 3 e h. Logo:

$$3 \cdot h = 2 \cdot 15$$

$$3 \cdot h = 30$$

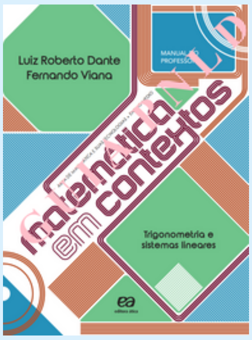
$$\frac{3 \cdot h}{3} = \frac{30}{3}$$

$$h = 10$$

Assim, concluímos que altura do prédio é igual a 10 metros.

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em contexto: geometria plana e geometria espacial. (DANTE)

Capítulo 1: Trigonometria.

- Trigonometria no triângulo. (p. 17 - 19).

Prisma matemática: geometria e trigonometria. (BONJORNO)

Capítulo 1: proporcionalidade e semelhança.

- Polígonos semelhantes. (p. 29).
- Semelhança de triângulos. (p. 38- 41)
- Relações métricas no triângulo retângulo. (p. 44 - 48).

Atividades

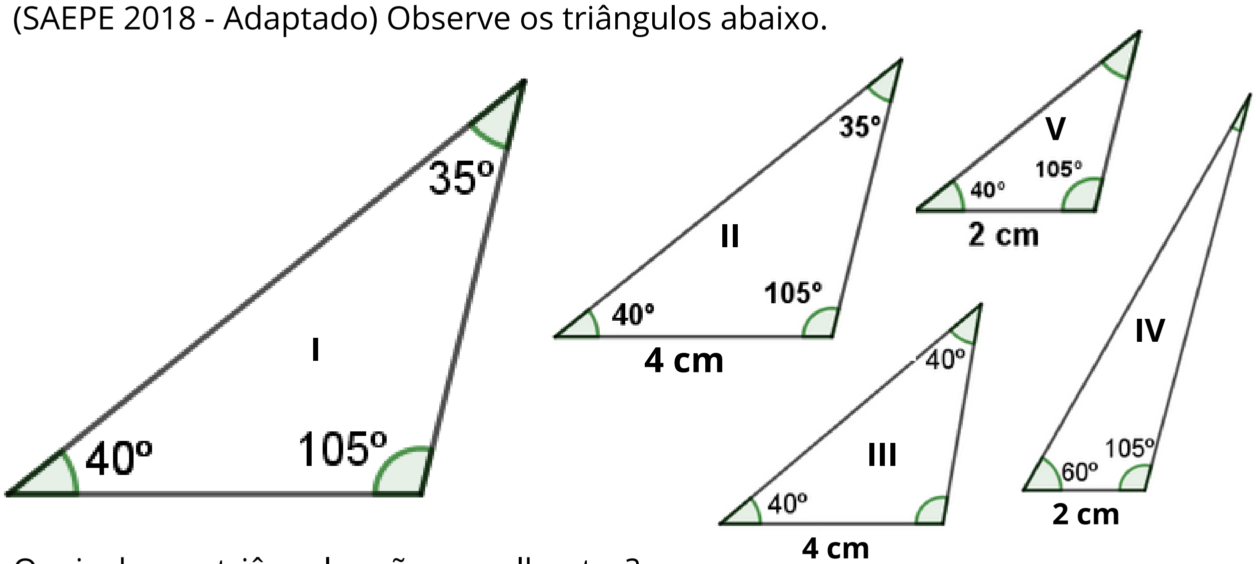
ATIVIDADE 1

Em relação à semelhança de triângulos, assinale a alternativa correta:

A) Triângulos com ângulos correspondentes de medidas iguais são sempre congruentes.
B) A semelhança de triângulos pode ser estabelecida apenas pela comparação de dois lados.
C) Dois triângulos são semelhantes se os comprimentos de seus lados são iguais, independente dos seus ângulos correspondentes serem congruentes.
D) Dois triângulos são semelhantes se têm lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes de medidas iguais.
E) A semelhança de triângulos não pode ser determinada por meio da razão entre os lados.

ATIVIDADE 2

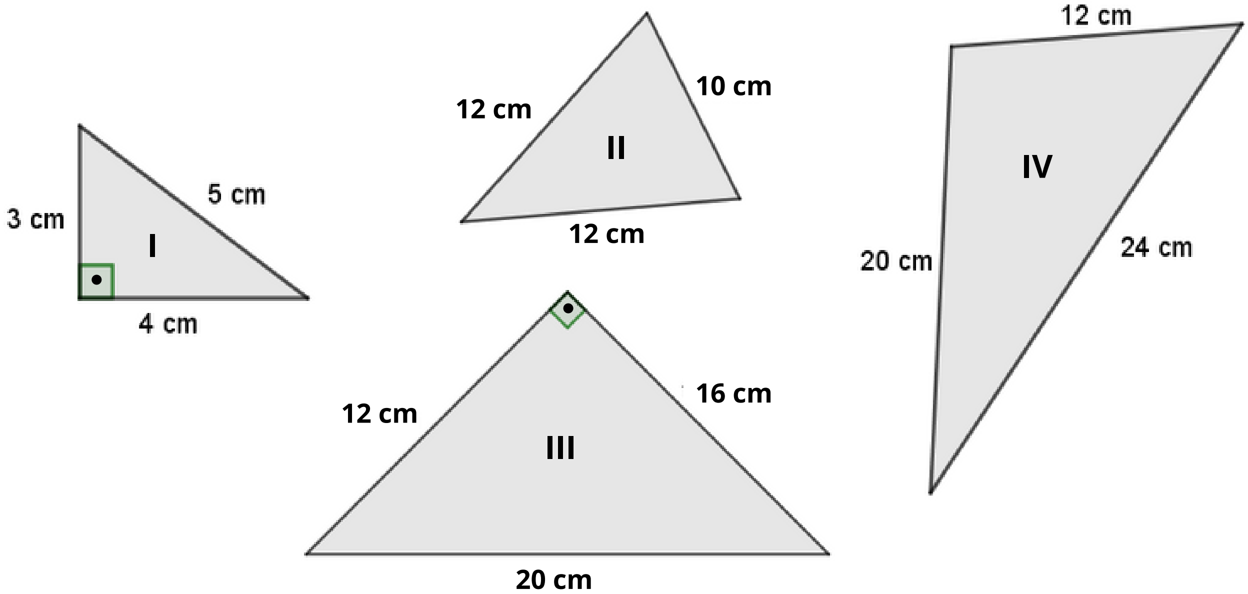
(SAEPE 2018 - Adaptado) Observe os triângulos abaixo.



Quais desses triângulos são semelhantes?
A) I, II, e III.
B) I, II e V.
C) I e III.
D) II e III.
E) IV e V.

ATIVIDADE 3

(SAEPE - 2019) No desenho abaixo estão representados os triângulos I, II, III e IV e suas medidas em centímetros.



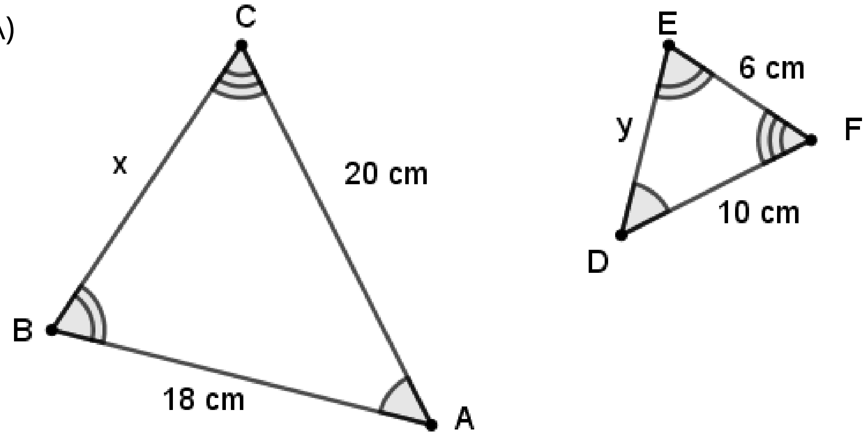
O par de triângulos semelhantes nesse desenho é:

A) I e II.
B) I e III.
C) I e IV.
D) II e IV.
E) III e IV.

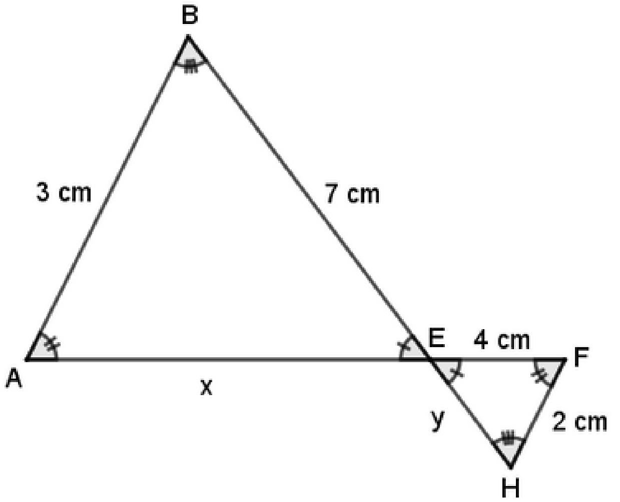
ATIVIDADE 4

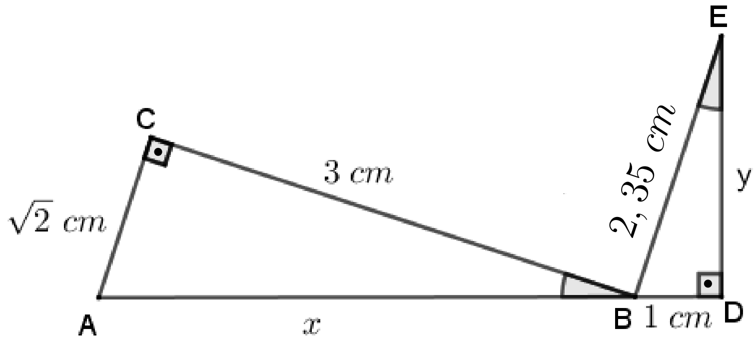
As figuras abaixo nos mostram pares de triângulos semelhantes. Dessa forma, em cada alternativa, calcule os valores de x e y:

A)



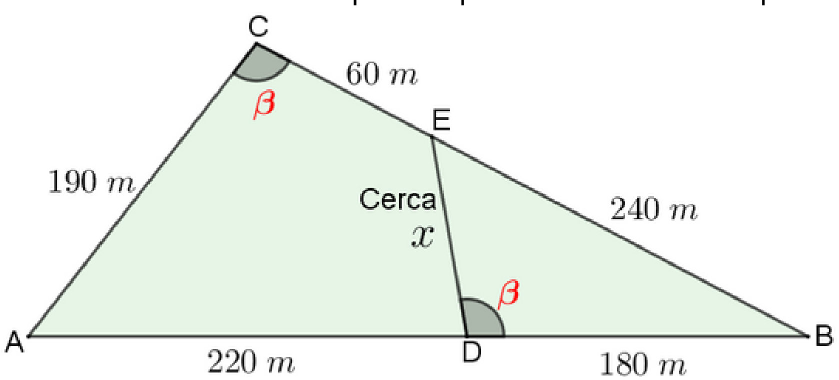
B)





ATIVIDADE 5

Uma fazenda possui uma área de pastagem com formato triangular. Para otimizar o uso do espaço, a fazenda foi dividida em dois piquetes para o gado, com a construção de uma cerca indicada pelo segmento DE, conforme apresentado a seguir em um modelo matemático para representar a área de pastagem.

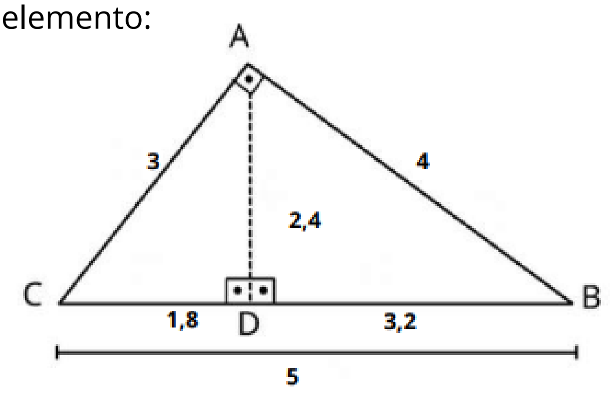


O comprimento *x*, em metros, da cerca DE que divide a área de pastagem em dois piquetes para o gado é:

A) 114 m
B) 142 m
C) 159 m
D) 253 m
E) 316 m

ATIVIDADE 6

Considere o triângulo retângulo ABC representado a seguir e que a unidade de medida utilizada está em cm para todos os segmentos. Indique as medidas de cada elemento:



A) Hipotenusa;

B) Cateto menor;

C) Cateto maior;

D) Altura relativa a hipotenusa;

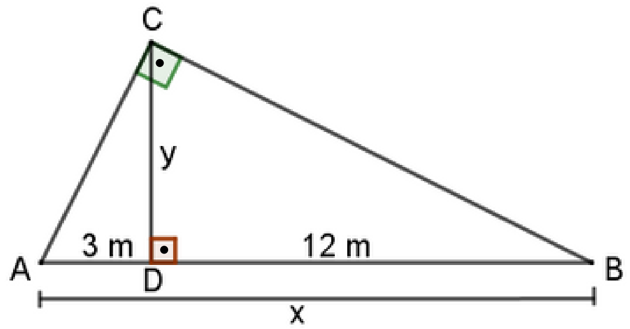
E) Projeção do menor cateto;

F) Projeção do maior cateto;

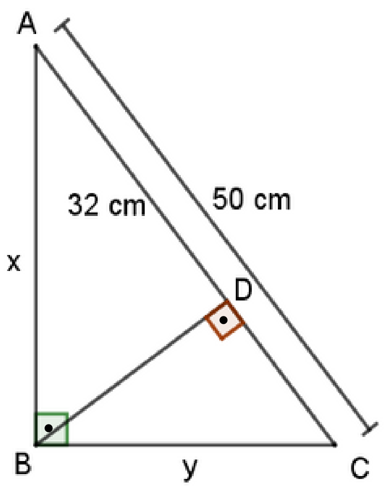
ATIVIDADE 7

Aplique seus conhecimentos nos triângulos retângulos a seguir e encontre a medida *x* e *y* indicada em cada caso.

A)

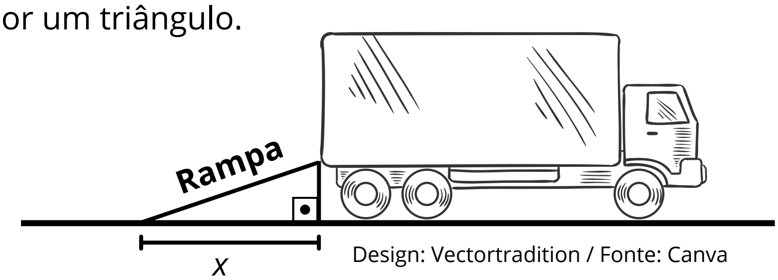


B)



ATIVIDADE 8

(SAEPE - 2009) Um caminhão estaciona em frente a uma rampa para facilitar o carregamento de mercadoria. Essa rampa tem 2,5 m de comprimento e atinge uma altura de 1,5 m do solo, como mostra a figura abaixo, onde a forma da rampa está representada por um triângulo.



Design: Vectortradition / Fonte: Canva

A distância entre o caminhão e o ponto de início de subida da rampa está representado na figura por x. Quanto mede essa distância?

A) 1 m
B) 2 m
C) 3 m
D) 4 m
E) 8 m

ATIVIDADE 9

Um arquiteto fez um projeto de um parque urbano em um terreno triangular. Nesse projeto, ele pretende criar um caminho retilíneo de modo a dividir o terreno em dois jardins menores, também com a forma triangular. O triângulo ABC da figura abaixo representa esse projeto, com as medidas dos lados do terreno, e o segmento AD, o caminho retilíneo que divide o terreno.

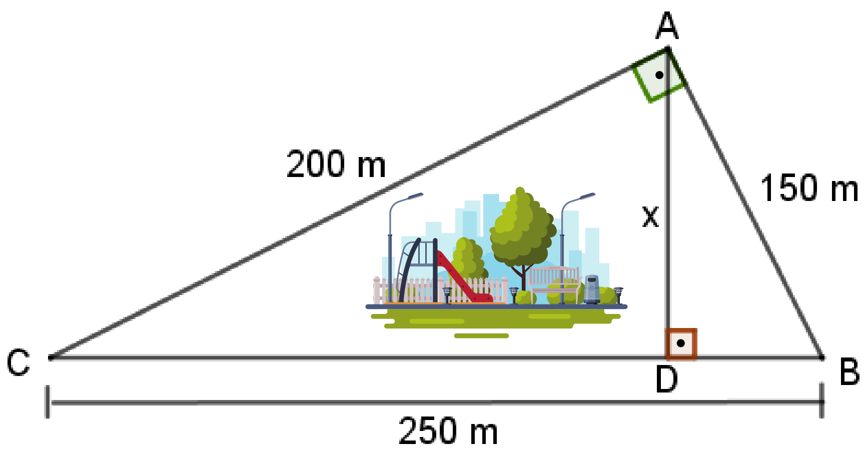
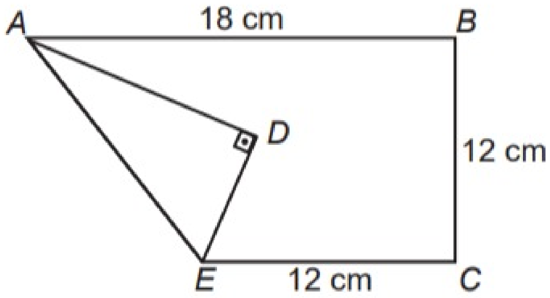


Imagem produzida no Canva

Qual deve ser o comprimento *x* dessa linha reta, que representará o novo caminho no jardim?

ATIVIDADE 10

(Enem 2019 - adaptada) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é:

$A)\ 2\sqrt{22}\ cm$

$B)\ 6\sqrt{3}\ cm$

$C)\ 12\ cm$

$D)\ 6\sqrt{5}\ cm$

$E)\ 12\sqrt{2}\ cm$

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: geometria e trigonometria. ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias.** 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante matemática, 1o ano : ensino médio.** 1ª ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contexto: trigonometria e sistemas lineares.** 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: geometria e trigonometria.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contexto: trigonometria e sistemas lineares**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

GOV.BR. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Inep. **Provas e Gabaritos**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 25/03/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico da Escola. SAEPE – 2009** /Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2009/BOLETIM_SAEPE_VOL3_3EM_MAT_2009.pdf>. Acessado em: 04/04/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico da Escola. SAEPE – 2018** /Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2019/PE%20SAEPE%202019%20RP%20MT%20WEB.pdf>. Acessado em: 28/03/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco. **Revista do Professor – Matemática. SAEPE – 2019** / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. V. 1 (2019), Juiz de Fora – Anual. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2019/PE%20SAEPE%202019%20RP%20MT%20WEB.pdf>. Acessado em: 04/04/2025.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Sequências e trigonometria.** Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

CONEXÕES MATEMÁTICAS

QUINZENA 15
01/09 a 05/09

SEDU - 2025

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

Trigonometria: razões trigonométricas.

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT308 Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	• Reconhecer a relação de semelhança entre triângulos retângulos que possuem ângulos agudos correspondentes congruentes. • Definir seno no triângulo retângulo. • Definir cosseno no triângulo retângulo. • Definir tangente no triângulo retângulo • Deduzir os valores do seno, cosseno e da tangente de ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) a partir do triângulo equilátero e do quadrado. • Utilizar seno, cosseno e tangente na resolução de problemas.	**D051_M** Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

Contextualização

Você já se perguntou como é possível calcular a altura de um prédio sem subir nele? Ou como engenheiros e arquitetos projetam rampas com a inclinação exata, sem precisar medir tudo diretamente? Situações como essas envolvem um conceito essencial da Matemática: as razões trigonométricas.

Seno, cosseno e tangente podem parecer apenas fórmulas em um livro, mas vão muito além disso. Elas permitem resolver problemas reais em que não se pode medir diretamente uma distância ou uma altura. Com apenas um ângulo e uma medida conhecida, é possível descobrir o que antes parecia inacessível.

Essas ideias estão presentes em áreas como Engenharia, Arquitetura, Física, Navegação, e até em dispositivos tecnológicos, como sensores de inclinação. A Trigonometria mostra como a Matemática está diretamente ligada ao mundo ao nosso redor — e entender isso muda a forma como enxergamos os problemas.

Neste material, vamos definir essas razões, compreender sua lógica e utilizá-las na resolução de situações práticas. A partir do estudo dos triângulos, será possível perceber como ideias aparentemente inacessíveis podem ser deduzidas com clareza e precisão — mostrando que a Trigonometria vai muito além das fórmulas.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considere um ângulo agudo $A\hat{O}B = \alpha$ (ou seja, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$) ilustrado na figura 1.

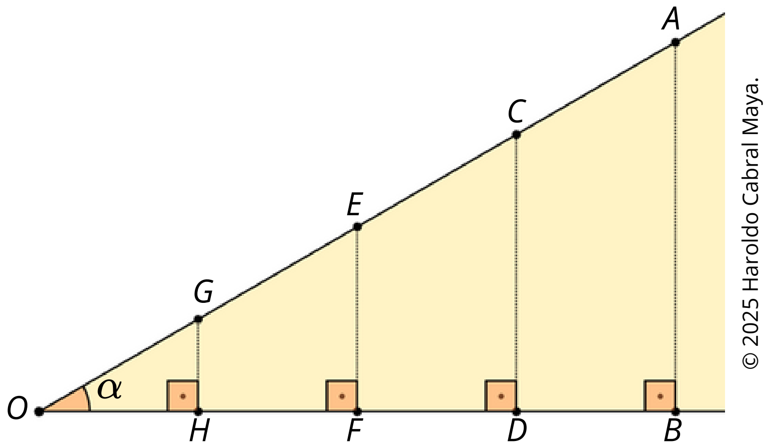


Figura 1: Cadeia de triângulos semelhantes pelo caso ângulo-ângulo.

Podemos traçar infinitos segmentos perpendiculares à semirreta $\overline{OB}$ até a semirreta $\overline{OA}$, formando uma infinidade de triângulos retângulos semelhantes entre si, pelo critério **ângulo-ângulo**.

Na figura apresentada, traçamos alguns desses segmentos apenas para exemplificar. No entanto, poderíamos traçar infinitas dessas perpendiculares, originando infinitos triângulos retângulos semelhantes entre si, todos associados ao mesmo ângulo α.

Pela definição de semelhança entre triângulos, a razão entre dois lados de um triângulo é igual à razão entre os lados correspondentes de qualquer outro triângulo semelhante. Assim, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{OG}}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OG}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{OH}}$$

Essas razões, que dependem apenas do valor do ângulo α, recebem nomes específicos na Trigonometria. Para compreendê-las melhor, observe agora a Figura 2, na qual destacamos o triângulo AOB da figura 1 com seus lados nomeados em relação ao ângulo α:

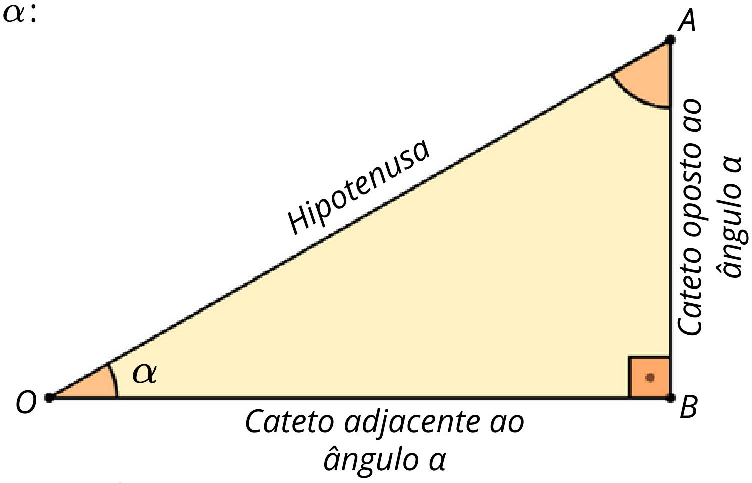


Figura 2: Identificação da hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente em um triângulo retângulo AOB, extraído da figura 1.

- **Hipotenusa:** lado oposto ao ângulo reto; é sempre o maior lado do triângulo.
- **Cateto oposto ao ângulo α:** lado que fica frente ao ângulo α.
- **Cateto adjacente ao ângulo α:** lado que forma o ângulo α junto com a hipotenusa.

Com esses termos definidos, apresentamos as três razões trigonométricas fundamentais, com suas respectivas abreviações:

$$\text{seno } \alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{abrev.: } sen(\alpha)$$

$$\text{cosseno } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{abrev.: } cos(\alpha)$$

$$\text{tangente } \alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha} \qquad \text{abrev.: } tan(\alpha) \text{ ou } tg(\alpha)$$

Essas três razões são a base da Trigonometria no triângulo retângulo e serão exploradas em diversos contextos.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DOS ÂNGULOS NOTÁVEIS

Os ângulos 30º, 45º e 60º são chamados **ângulos notáveis** por aparecerem frequentemente na resolução de problemas trigonométricos. A seguir, deduziremos os valores de suas razões trigonométricas por meio de construções geométricas.

Ângulo de 45º

Considere um **triângulo retângulo isósceles**, em que os catetos têm mesma medida ℓ, como na figura 2.

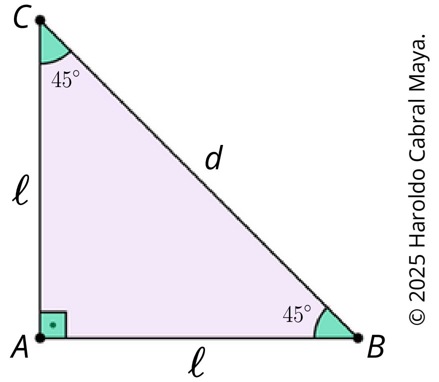


Figura 3: Triângulo retângulo isósceles

Pelo teorema de Pitágoras, podemos definir *d* em função de ℓ:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2 \therefore d = \sqrt{2\ell^2} = \ell\sqrt{2}$$

Portanto, temos:

- Hipotenusa = $\ell\sqrt{2}$; e
- Catetos = ℓ.

Assim, podemos calcular as razões trigonométricas:

- $\text{sen}\,45^\circ = \dfrac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{\cancel{\ell}}{\cancel{\ell}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $\cos 45^\circ = \dfrac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $\tan 45^\circ = \dfrac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} = \dfrac{\cancel{\ell}}{\cancel{\ell}} = 1$

Ângulo de 30º e 60º

Considere, agora, um triângulo equilátero ABC de lado ℓ. Ao traçar a altura a partir do vértice oposto à base, dividimos o triângulo em dois triângulos retângulos congruentes, conforme a figura 3.

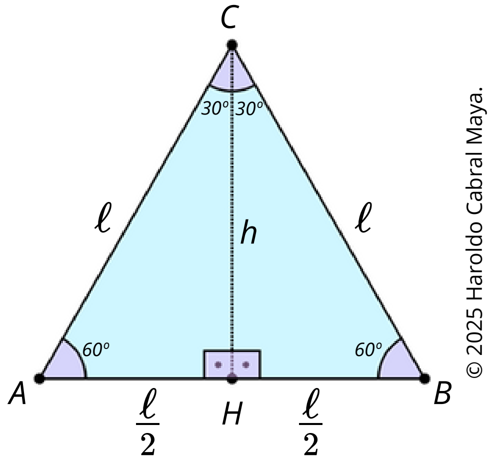


Figura 4: Triângulo equilátero com altura traçada.

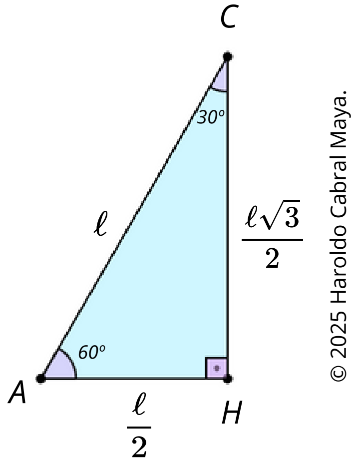
Pelo teorema de Pitágoras, podemos definir *h* em função de ℓ:

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{4\ell^2 - \ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$\therefore h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, cada triângulo retângulo formado possui:

- Hipotenusa = ℓ;
- Base (cateto menor) = $\frac{\ell}{2}$; e
- Altura (cateto maior) = $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$



Assim, podemos calcular as razões trigonométricas para **30º**:

- $\operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{\ell/2}{\ell} = \dfrac{\cancel{\ell}}{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\ell}} = \dfrac{1}{2}$

- $\cos 30^\circ = \dfrac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell} = \dfrac{\cancel{\ell}\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{\ell}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- $\tan 30^\circ = \dfrac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} = \dfrac{\ell/2}{\ell\sqrt{3}/2} = \dfrac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{\ell}\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

E para **60º**:

- $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell} = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- $\cos 60^\circ = \dfrac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{\ell/2}{\ell} = \operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{1}{2}$

- $\tan 60^\circ = \dfrac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} = \dfrac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell/2} = \dfrac{\cancel{\ell}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{\ell}} = \sqrt{3}$

Podemos ver, na tabela 1, os valores das razões trigonométricas associadas aos ângulos notáveis. A disposição organizada facilita a visualização e comparação entre os valores de seno, cosseno e tangente, permitindo uma consulta rápida e eficiente durante a resolução de problemas.

Razão	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1: Razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

As razões trigonométricas — seno, cosseno e tangente — são ferramentas essenciais para resolver problemas que envolvem triângulos retângulos. Elas permitem calcular medidas que não podem ser obtidas diretamente, como a altura de uma árvore ou a inclinação de uma rampa.

Essas razões são amplamente utilizadas em áreas como Engenharia, Arquitetura, Navegação, além de situações do cotidiano. A seguir, veremos exemplos de como aplicar essas relações para resolver problemas práticos com base em ângulos e lados conhecidos.

Exemplo

Um observador deseja determinar a altura de uma árvore. Para isso, posiciona-se a 10 metros da base da árvore e mede o ângulo de elevação até o topo, obtendo 60°. Qual é a altura da árvore?

Solução

Esse problema pode ser representado por um triângulo retângulo, em que:

- O lado adjacente ao ângulo de 60° é a distância do observador até a base da árvore: 10 metros;
- O lado oposto ao ângulo de 60° é a altura da árvore (que queremos descobrir);
- O ângulo agudo é 60°.

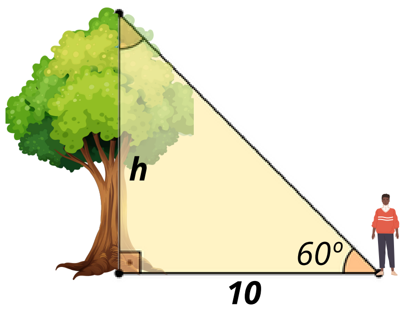


Imagem produzida no Canva

Como estamos relacionando o cateto oposto (altura) e o cateto adjacente (distância), utilizamos a tangente:

$$\frac{altura}{10} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \therefore \frac{altura}{10} = \sqrt{3}$$

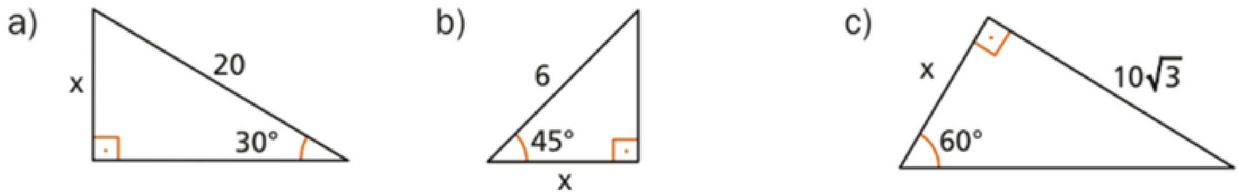
$$altura = 10\sqrt{3} \approx 10 \cdot 1,732 = 17,32$$

Portanto, a árvore tem, aproximadamente, 17,32 metros.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Determine o valor de x



Resolução

a)

$$\frac{x}{20} = \text{sen}\, 30^\circ = \frac{1}{2} \therefore \frac{x}{20} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\cancelto{10}{20}}{\cancelto{1}{2}} = 10$$

b)

$$\frac{x}{6} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \frac{x}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\cancelto{3}{6}\sqrt{2}}{\cancelto{1}{2}} = 3\sqrt{2}$$

c)

$$\frac{10\sqrt{3}}{x} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \therefore \frac{10\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{10\,\cancelto{1}{\sqrt{3}}}{\cancelto{1}{\sqrt{3}}} = 10$$

EXERCÍCIO 2

Uma rampa possui 5 metros de comprimento e está inclinada de modo que forma um ângulo de 30° com o solo. Qual é a altura da rampa?

Resolução

Consideremos o triângulo retângulo como o modelo matemático para representar essa rampa. Neste caso:

- A hipotenusa é o comprimento da rampa (5 metros);
- O cateto oposto ao ângulo é a altura da rampa (que queremos descobrir);
- O ângulo é 30°.

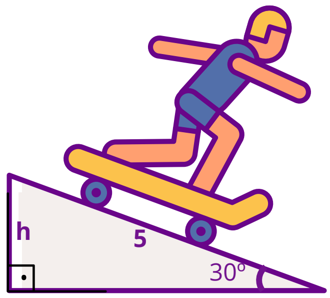


Imagem produzida no Canva

Como estamos relacionando o cateto oposto (altura) e a hipotenusa (comprimento da rampa), utilizamos o seno.

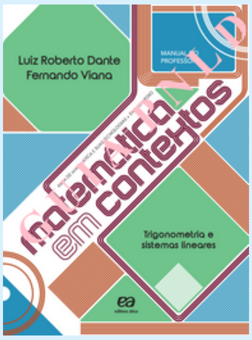
$$\frac{altura}{5} = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{altura}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow altura = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ metros}$$

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em contexto: geometria plana e geometria espacial. (DANTE)

Capítulo 1: Trigonometria.

- Trigonometria no triângulo. (p. 20 - 24).

Prisma matemática: geometria e trigonometria. (BONJORNO)

Capítulo 2: Trigonometria no triângulo.

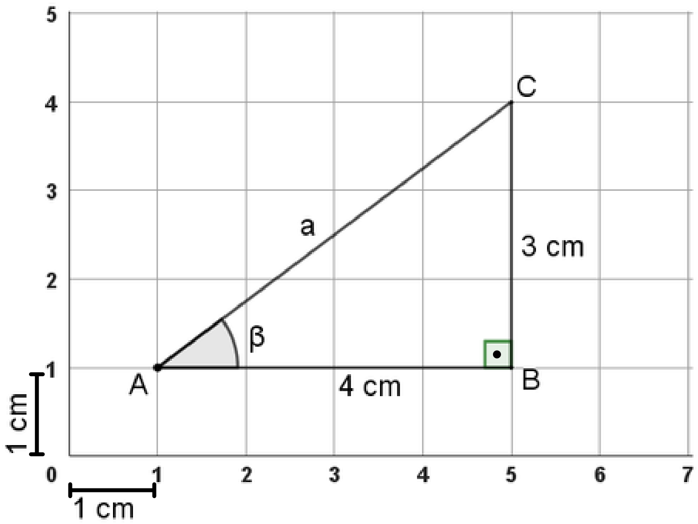
- Razões trigonométricas no triângulo retângulo. (p. 55 - 71).

Atividades

Este documento disponibiliza, para estudantes e professores, uma tabela trigonométrica ao final das atividades para otimizar o aprendizado e ensino.

ATIVIDADE 1

Bruno estava revisando o conteúdo de relações trigonométricas no triângulo retângulo para a avaliação de Matemática. Para entender melhor as razões trigonométricas, ele desenhou um triângulo retângulo de vértices A, B e C, com catetos de 3 cm e 4 cm em seu caderno, que possuía uma malha quadriculada na escala de 1 cm de lado.



Após desenhar o triângulo, Bruno inseriu no vértice A um ângulo β , e procurou responder algumas perguntas. Ajude Bruno nesta atividade respondendo a seguir o que se pede:

A) Qual é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo?

B) Qual é a medida do cateto oposto ao ângulo β ?

C) Qual é a medida do cateto adjacente ao ângulo β ?

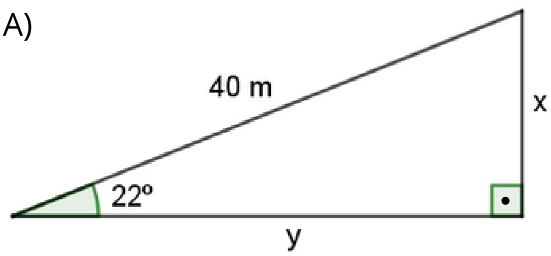
D) Calcule os valores de seno, cosseno e tangente de β.

E) Utilizando uma tabela de razões trigonométricas, determine qual deve ser o valor aproximado do ângulo β .

ATIVIDADE 2

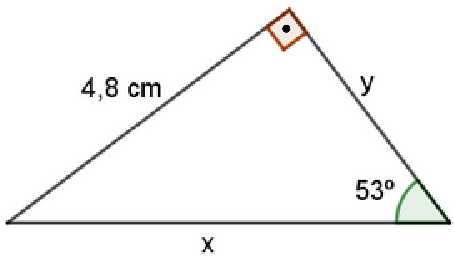
Em cada caso, determine o valor de x e y no triângulo retângulo.

A)



Dados:
$sen\ 22° \cong 0,37$
$cos\ 22° \cong 0,93$
$tg\ 22° \cong 0,40$

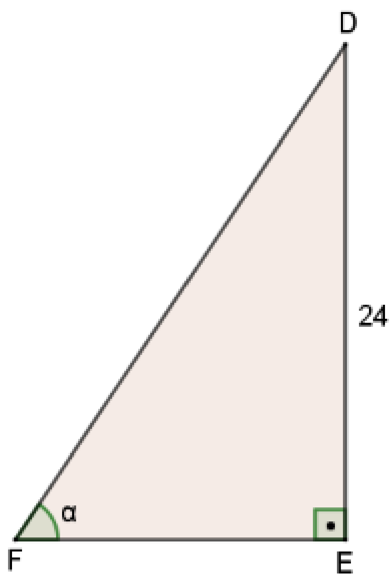
B)



Dados:
$sen\ 53° \cong 0,80$
$cos\ 53° \cong 0,60$
$tg\ 53° \cong 1,33$

ATIVIDADE 3

(SARESP 2007 - Adaptada) O triângulo DEF, representado abaixo, é retângulo. Sabe-se que o seno do ângulo α é igual a $\frac{3}{4}$.

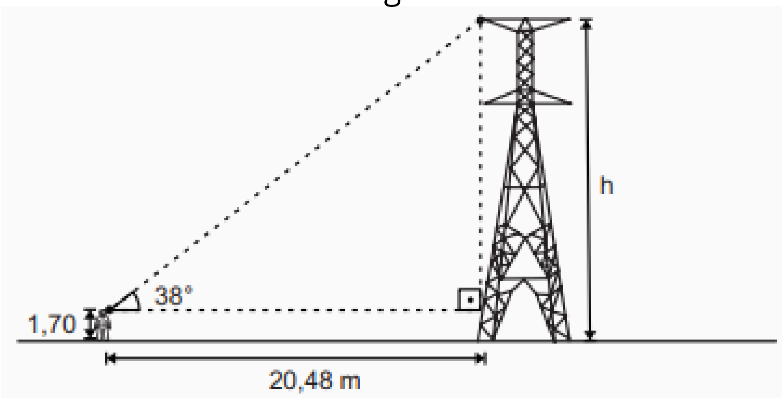


Qual é a medida da hipotenusa do triângulo DEF?

A) 18
B) 28
C) 30
D) 32
E) 40

ATIVIDADE 4

(SAEGO - 2017) Observe abaixo o esquema que um observador montou para estimar a altura de uma torre de energia.



Dados:

$sen\ 38° \cong 0,62$

$cos\ 38° \cong 0,79$

$tg\ 38° \cong 0,78$

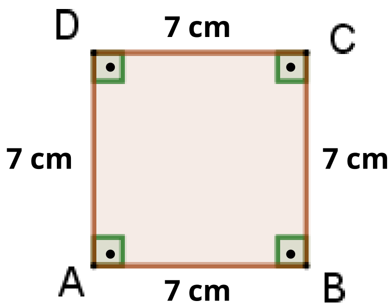
Qual é a altura *h* aproximada dessa torre de energia?

A) 15,97
B) 17,67
C) 26,25
D) 27,62
E) 34,73

ATIVIDADE 5

Lucas e Elisa estavam estudando as razões trigonométricas no triângulo retângulo, quando Lucas se perguntou: Por que os ângulos de 30º, 45º e 60º são considerados ângulos notáveis e de onde vem os valores da tabela trigonométrica para esses ângulos?

Então Elisa respondeu: Os ângulos de 30º, 45º e 60º são conhecidos como ângulos notáveis devido às suas propriedades trigonométricas simples e à frequência com que aparecem em problemas práticos e teóricos. Para ilustrar melhor esse conceito, Elisa propôs a Lucas que desenhasse em seu caderno um quadrado com lados de 7 cm, conforme mostrado a seguir, e, em sequência, respondesse a algumas perguntas.



Considerando as medidas indicadas no quadrado, faça o que se pede:

A) Trace um segmento de reta conectando os vértices A e C, formando a diagonal do quadrado e, em seguida, determine a medida dessa diagonal.

B) Considerando que o quadrado é uma figura geométrica plana que possui quatro lados congruentes e quatro ângulos retos de 90º, determine a medida do ângulo BÂC, que é o ângulo agudo que pertence ao triângulo retângulo ABC, gerado após a divisão do quadrado pela diagonal.

C) Utilizando como padrão o quadrado apresentado e suas medidas encontradas até aqui, demostre matematicamente as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) do ângulo de 45º formado no vértice A do triângulo retângulo isósceles ABC.

ATIVIDADE 6

Em um triângulo retângulo, um dos ângulos agudos mede 30°, e o cateto oposto a ele mede 5 metros.

O comprimento da hipotenusa desse triângulo é igual a:

$A)\ \frac{5}{2}\ m$

$B)\ \frac{5\sqrt{3}}{3}\ m$

$C)\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\ m$

$D)\ \frac{10\sqrt{3}}{3}\ m$

$E)\ 10\ m$

Dados:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

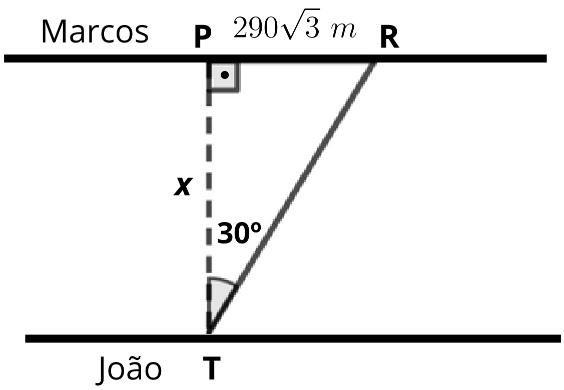
$$cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ATIVIDADE 7

Em trabalhos de topografia, é comum utilizar instrumentos ópticos para estimar distâncias em terrenos onde a medição direta é difícil ou inviável.
João, profissional da área, recebeu a tarefa de medir a largura do rio Doce, na cidade de Colatina, com o objetivo de viabilizar a construção de uma nova ponte. Para isso, contou com o auxílio de Marcos, que se posicionou inicialmente no ponto P, na margem oposta à de João, que se encontrava no ponto T.

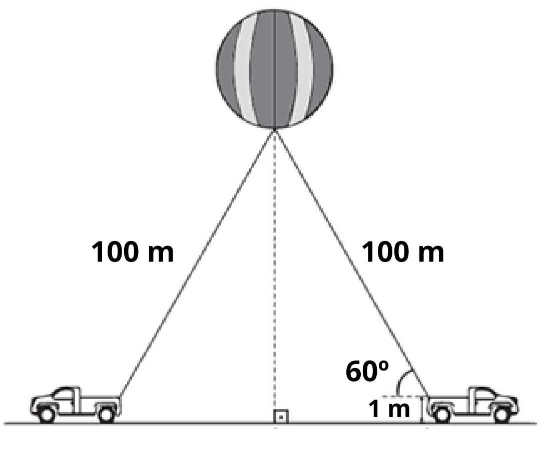
Utilizando um teodolito (aparelho óptico de medição) posicionado em T, João observou Marcos no ponto P e o instruiu a caminhar paralelamente à margem do rio, até atingir o ponto R. Durante esse deslocamento, o instrumento registrou um ângulo de 30º entre a linha de visão inicial (do ponto T ao ponto P) e a nova linha de visão (do ponto T ao ponto R), conforme ilustrado na figura a seguir.



Com base nas informações fornecidas e na figura, determine, em metros, a largura do rio no local onde a ponte será construída.

ATIVIDADE 8

Balões de propaganda são frequentemente utilizados para promover marcas ou eventos, sendo mantidos em posição por cordas presas a pontos fixos no solo.
Considere a seguinte situação: Um balão de propaganda, inflado com gás hélio, está preso por duas cordas de 100 metros de comprimento cada, amarradas a uma altura de 1 metro em dois veículos estacionados em posições diferentes, conforme ilustrado na imagem abaixo.



Fonte: Cadernos do Caed - adaptado pelo autor.

Com base na figura apresentada, determine a altura do balão em relação ao solo.

A) $(\frac{200\sqrt{3}}{3} + 1)\ m$

B) $(50\sqrt{3} + 1)\ m$

C) $50\sqrt{3}\ m$

D) $101\ m$

E) $51\ m$

ATIVIDADE 9

Uma câmera está instalada a 10 metros de altura em uma passarela localizada sobre uma rodovia federal que atravessa o estado do Espírito Santo. No instante em que um carro passa por um ponto R na rodovia, a câmera o focaliza sob um ângulo de 60º, conforme representado na figura abaixo.

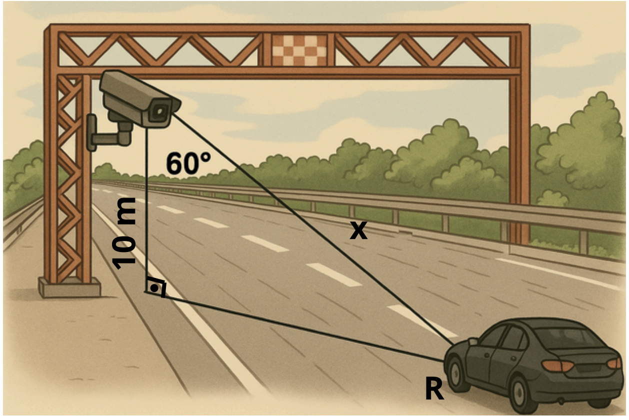


Imagem gerada por IA com adaptações do autor

Nessas condições, a distância *x* entre a câmera e o ponto R, no instante em que o carro está passando, é:

$A)\ 20\ m$

$B)\ 10\ m$

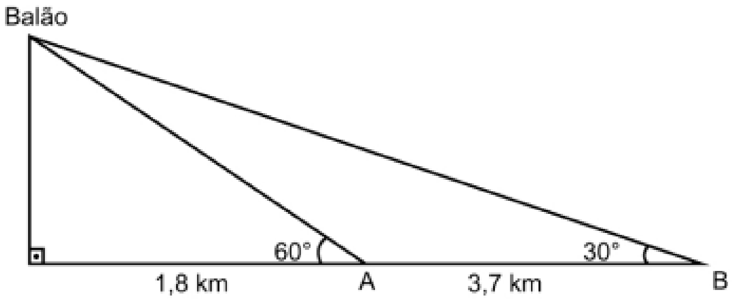
$C)\ 5\ m$

$D)\ \frac{20\sqrt{3}}{3}\ m$

$E)\ 5\sqrt{3}\ m$

ATIVIDADE 10

(ENEM - 2010) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60º; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30º.

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

A) 1,8 km

B) 1,9 km

C) 3,1 km

D) 3,7 km

E) 5,5 km

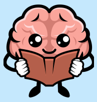


Tabela de Relações Trigonométricas

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1º	0,0175	0,9998	0,0175	**31º**	0,5150	0,8572	0,6009	**61º**	0,8746	0,4848	1,8040
2º	0,0349	0,9994	0,0349	**32º**	0,5299	0,8480	0,6249	**62º**	0,8829	0,4695	1,8807
3º	0,0523	0,9986	0,0524	**33º**	0,5446	0,8387	0,6494	**63º**	0,8910	0,4540	1,9626
4º	0,0698	0,9976	0,0699	**34º**	0,5592	0,8290	0,6745	**64º**	0,8988	0,4384	2,0503
5º	0,0872	0,9962	0,0875	**35º**	0,5736	0,8192	0,7002	**65º**	0,9063	0,4226	2,1445
6º	0,1045	0,9945	0,1051	**36º**	0,5878	0,8090	0,7265	**66º**	0,9135	0,4067	2,2460
7º	0,1219	0,9925	0,1228	**37º**	0,6018	0,7986	0,7536	**67º**	0,9205	0,3907	2,3559
8º	0,1392	0,9903	0,1405	**38º**	0,6157	0,7880	0,7813	**68º**	0,9272	0,3746	2,4751
9º	0,1564	0,9877	0,1584	**39º**	0,6293	0,7771	0,8098	**69º**	0,9336	0,3584	2,6051
10º	0,1736	0,9848	0,1763	**40º**	0,6428	0,7660	0,8391	**70º**	0,9397	0,3420	2,7475
11º	0,1908	0,9816	0,1944	**41º**	0,6561	0,7547	0,8693	**71º**	0,9455	0,3256	2,9042
12º	0,2079	0,9781	0,2126	**42º**	0,6691	0,7431	0,9004	**72º**	0,9511	0,3090	3,0777
13º	0,2250	0,9744	0,2309	**43º**	0,6820	0,7314	0,9325	**73º**	0,9563	0,2924	3,2709
14º	0,2419	0,9703	0,2493	**44º**	0,6947	0,7193	0,9657	**74º**	0,9613	0,2756	3,4874
15º	0,2588	0,9659	0,2679	**45º**	0,7071	0,7071	1,0000	**75º**	0,9659	0,2588	3,7321
16º	0,2756	0,9613	0,2867	**46º**	0,7193	0,6947	1,0355	**76º**	0,9703	0,2419	4,0108
17º	0,2924	0,9563	0,3057	**47º**	0,7314	0,6820	1,0724	**77º**	0,9744	0,2250	4,3315
18º	0,3090	0,9511	0,3249	**48º**	0,7431	0,6691	1,1106	**78º**	0,9781	0,2079	4,7046
19º	0,3256	0,9455	0,3443	**49º**	0,7547	0,6561	1,1504	**79º**	0,9816	0,1908	5,1446
20º	0,3420	0,9397	0,3640	**50º**	0,7660	0,6428	1,1918	**80º**	0,9848	0,1736	5,6713
21º	0,3584	0,9336	0,3839	**51º**	0,7771	0,6293	1,2349	**81º**	0,9877	0,1564	6,3138
22º	0,3746	0,9272	0,4040	**52º**	0,7880	0,6157	1,2799	**82º**	0,9903	0,1392	7,1154
23º	0,3907	0,9205	0,4245	**53º**	0,7986	0,6018	1,3270	**83º**	0,9925	0,1219	8,1443
24º	0,4067	0,9135	0,4452	**54º**	0,8090	0,5878	1,3764	**84º**	0,9945	0,1045	9,5144
25º	0,4226	0,9063	0,4663	**55º**	0,8192	0,5736	1,4281	**85º**	0,9962	0,0872	11,4301
26º	0,4384	0,8988	0,4877	**56º**	0,8290	0,5592	1,4826	**86º**	0,9976	0,0698	14,3007
27º	0,4540	0,8910	0,5095	**57º**	0,8387	0,5446	1,5399	**87º**	0,9986	0,0523	19,0811
28º	0,4695	0,8829	0,5317	**58º**	0,8480	0,5299	1,6003	**88º**	0,9994	0,0349	28,6363
29º	0,4848	0,8746	0,5543	**59º**	0,8572	0,5150	1,6643	**89º**	0,9998	0,0175	57,2900
30º	0,5000	0,8660	0,5774	**60º**	0,8660	0,5000	1,7321	**90º**	1,0000	0,0000	-

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: geometria e trigonometria. ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias.** 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante matemática, 1o ano : ensino médio.** 1ª ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contexto: trigonometria e sistemas lineares.** 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: geometria e trigonometria**. ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contexto: trigonometria e sistemas lineares**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

GOIÁS. Secretaria de Estado de Educação, Cultura e Esporte. **Revista do Professor - Matemática. SAEGO - 2017** / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. v. 1 (jan./dez. 2017), Juiz de Fora, 2017 - Anual. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/go/colecoes/2017/GO%20SAEGO%202017%20RP%20MT%20WEB.pdf>. Acessado em: 05/04/2025.

GOV.BR. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Inep. **Provas e Gabaritos.** Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 25/03/2025.

SARESP 2007. **Passeidireto**. Enviado por Matematicamente em 06/02/2024. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2023/SAEPE%202023%20-%20Revista%20da%20Escola%20-%20Matem%C3%A1tica%20-%20Web.pdf>. Acessado em 05/04/2025.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Sequências e trigonometria. Ensino Médio**. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.