CONEXÕES MATEMÁTICAS

QUINZENA 12
07/07 a 11/07

SEDU - 2025

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL: PRISMAS E PIRÂMIDES

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT309: Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	• Calcular áreas totais de prismas e pirâmides para resolver problemas relacionados a situações reais. • Conhecer expressões de cálculo de volume de prismas e pirâmides. • Resolver situações-problema envolvendo o volume e capacidade de sólidos geométricos em contextos diversos, utilizando a decomposição e as expressões algébricas para o cálculo de volumes de sólidos elementares.	**D129_M** Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido.

Contextualização

O estudo da geometria espacial não é recente, há indícios de que entre 2000 a.C. e 1600 a.C. os babilônicos já estariam familiarizados com as regras para cálculo dos volumes de um paralelepípedo e de prismas de base trapezoidal, bem como aproximações do volume de um cilindro reto. Contudo, bem antes a ideia de volume já era utilizada, pois com o começo do cultivo dos grãos, surgiu a necessidade de construir granários, destinados a armazená-los. A construção desses granários mostra que o conceito matemático de volume foi de muita importância na história das civilizações.

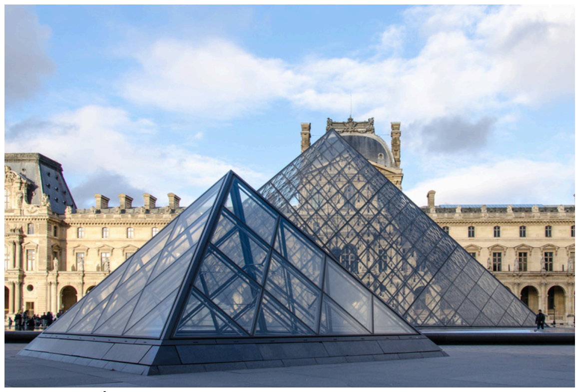
No cotidiano, estamos cercados por diversas formas em obras de arte, arquitetura e objetos domésticos que lembram os sólidos geométricos. Observe abaixo algumas obras arquitetônicas famosas.

KELLY IMAGES

Sede da ONU - Nova York

GETTY IMAGES

A porta da Europa - Madri

KHUNKORN

Museu do Louvre - Paris

Além da presença na arquitetura, os conceitos e aplicações da geometria espacial aparecem em diversas situações do nosso cotidiano.

Questões como “quantos litros de água cabem em uma piscina?”, “quantas latas de tinta devo comprar pra pintar as paredes de minha casa?”, “quantos cm² de papelão são necessários para construir uma caixa?” ou “qual a quantidade de madeira gasta para construir um nicho hexagonal?” são perguntas que permeiam nosso dia a dia, às vezes, até despercebidas por nós, e que estão intimamente relacionadas aos procedimentos em geometria espacial.

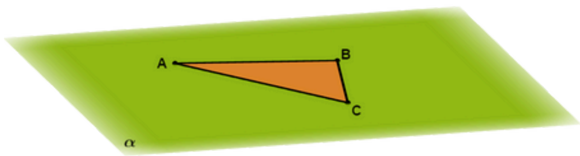
Neste material iremos estudar sobre alguns elementos, o volume e a área total dos prismas e pirâmides.

Bons estudos!

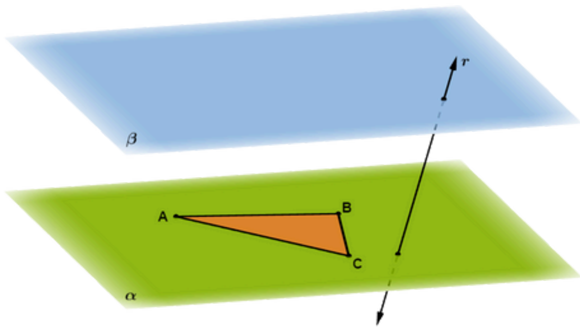
Conceitos e Conteúdos

PRISMAS

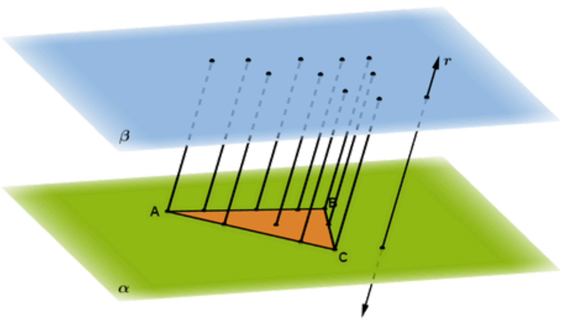
Considere um plano α onde está contido um polígono convexo ABC. Defina, então, um plano β, paralelo a α, e uma reta r concorrente a estes dois planos. Trace segmentos de retas paralelos a r com uma extremidade no polígono ABC e a outra no plano β. A reunião de todos esses segmentos é denominada **prisma**.
Vejamos, passo a passo, essa construção:



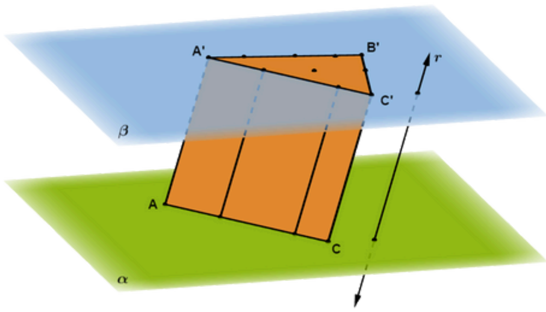
① considere um plano α e um polígono convexo ABC.



② defina plano β, paralelo a α, e uma reta r concorrente a esses dois planos.

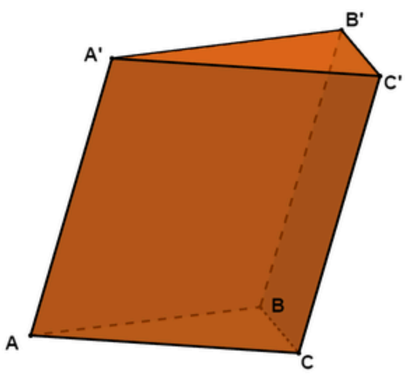


③ trace segmentos de retas paralelas a r com uma extremidade no polígono ABC e a outra no plano β



④ a reunião de todos esses segmentos é denominada prisma.

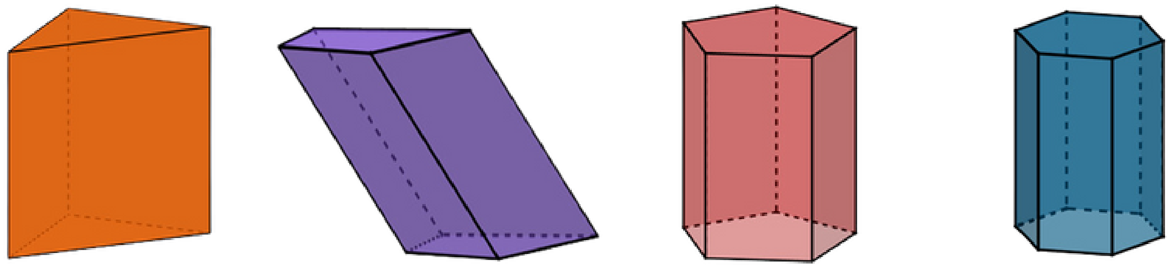
No prisma ABCA’B’C’ representado podemos destacar os seguintes elementos:



Vértices: A, B, C, A', B' e C'
Arestas da bases: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}, \overline{A'B'}, \overline{A'C'}$ e $\overline{B'C'}$
Arestas laterais: $\overline{AA'}, \overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$
Bases: ABC e $A'B'C'$
Faces laterais: $ACC'A', BCC'B'$ e $ABB'A'$

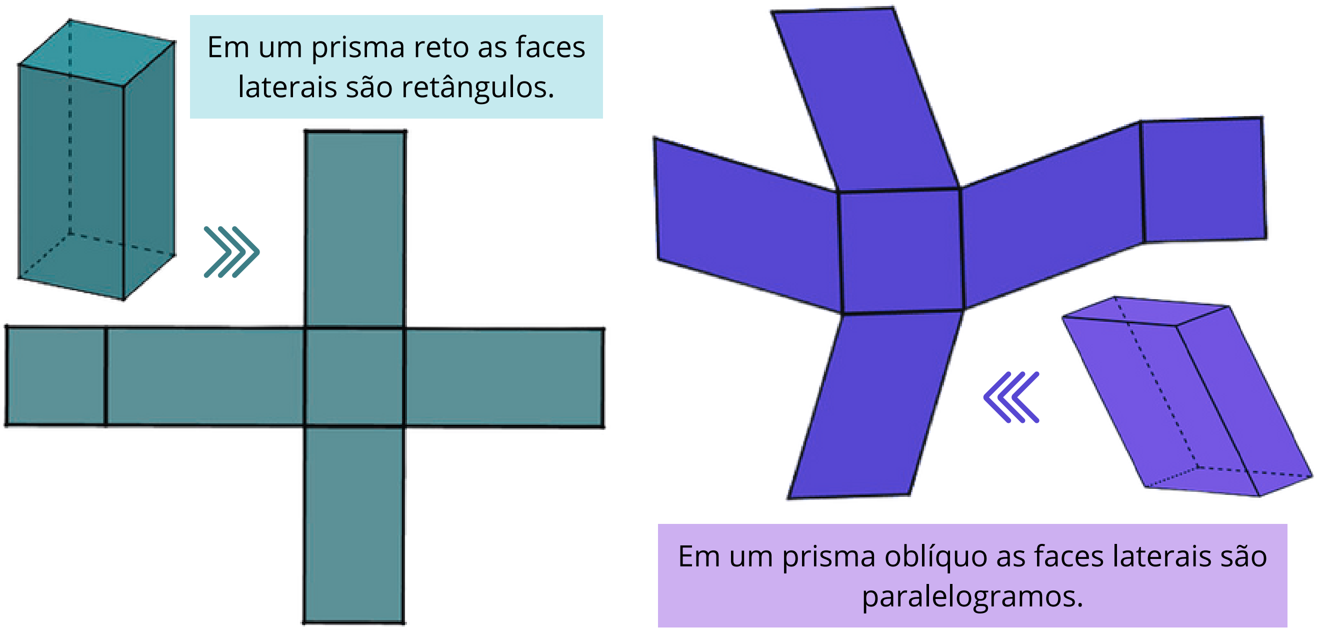
Classificação dos Prismas

Os prismas podem ser classificados de acordo com o polígono que forma a sua base. Por exemplo, se o prisma possui uma base triangular ele é denominado prisma triangular. Veja alguns exemplos de prismas:



Prisma Triangular | Prisma Quadrangular | Prisma Pentagonal | Prisma Hexagonal

Nos sólidos acima, os prismas triangular, pentagonal e hexagonal são chamados de **prismas retos**, enquanto o prisma quadrangular é chamado de **prisma oblíquo**. Além disso, um prisma reto cuja base seja um polígono regular é chamado de **prisma regular**.



Em um prisma reto as faces laterais são retângulos.

Em um prisma oblíquo as faces laterais são paralelogramos.

Área da Superfície de um Prisma

Em um prisma podemos destacar as seguintes superfícies:

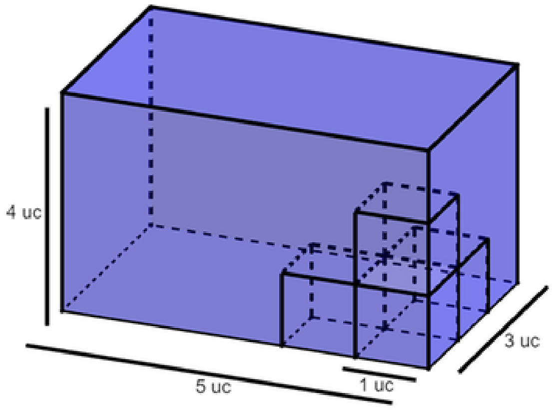
- **Superfície lateral (A_l)**: corresponde à reunião das faces laterais do prisma, sua área é chamada de área lateral. São determinadas pelas áreas dos retângulos ou paralelogramos.
- **Área da base (A_b)**: corresponde à área do polígono que compõe cada base do prisma.
- **Superfície total (A_T):** corresponde à reunião da superfície lateral e das bases do prisma.

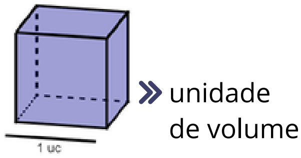
Portanto,

$$A_T = 2 \cdot A_b + A_l.$$

Volume de um Prisma

Considere um bloco retangular que apresente medidas iguais a 5 uc, 3 uc e 4 uc (uc significa unidade de comprimento). Definimos como unidade de volume, um cubo de aresta com medida igual a 1 uc. Podemos considerar 1 cm, 1 m, 1km etc., tudo depende da medida mais adequada, para determinada situação.





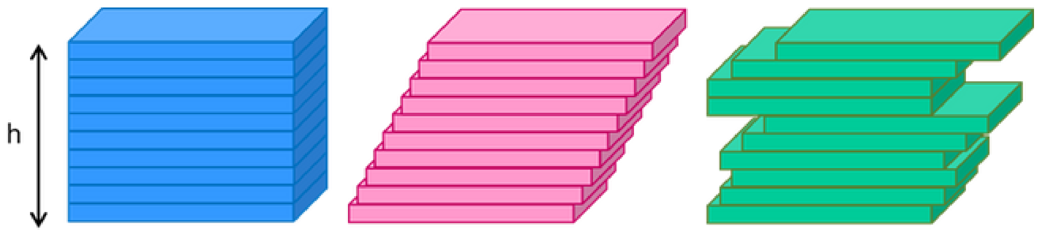
No nosso bloco retangular conseguimos alocar um total de 60 unidades de volume: 5 unidades no sentido do comprimento, 3 unidades no sentido da largura e 4 unidades no sentido da altura. Observe que essas quantidades coincidem exatamente com as medidas das arestas do bloco retangular. Multiplicando essas quantidades obtemos 60.

Então podemos dizer que o volume do bloco retangular de medidas de comprimento **a**, largura **b** e altura **h**, é igual a

$$V = a \cdot b \cdot h \Rightarrow \boxed{V = A_b \cdot h}$$

O processo acima nos mostra como determinar o volume de um tipo de prisma, que é o bloco retangular. Mas, a questão é: **como determinar o volume de um prisma qualquer?** A busca por essa resposta nos leva ao ano de 1635, ao encontro do matemático italiano Bonaventura Cavalieri, e o que conhecemos hoje por Princípio de Cavalieri.

Intuitivamente, podemos pensar da seguinte forma: suponha que você tenha uma pilha de chapas retangulares, que pode ser uma pilha de livros ou uma pilha de folhas, todas de mesmas dimensões, portanto, apresentam o mesmo volume. A partir dessas pilhas, podemos representar alguns sólidos, como mostrados na figura abaixo:

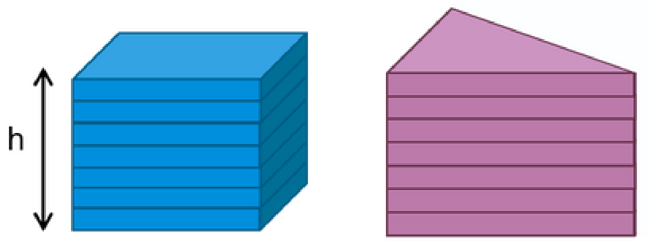


Nos três casos, o espaço ocupado pela pilha é o mesmo, ou seja, os três sólidos possuem o mesmo volume, apesar de suas diferentes disposições e, consequentemente, formas distintas.
Isso pode ser explicado pelo Princípio de Cavalieri, que afirma o seguinte:

Dois sólidos de mesma altura, apoiados sobre um plano α, têm volumes iguais se todo plano paralelo a α intersectar os sólidos, determinando regiões de áreas iguais.

Mas como isso nos ajuda a determinar o volume de um prisma qualquer?

Considere um paralelepípedo reto-retângulo e um prisma qualquer, ambos de mesma altura e bases com mesma medida de área. Qualquer corte paralelo à base determina, nos dois prismas, duas regiões de mesma área. Portanto, os volumes dos dois prismas são iguais.



Sólido 1 Sólido 2

» Paralelepípedo reto-retângulo e prisma triangular com mesma medida de área da base.

Assim, para calcular o volume de um prisma, basta fazer o produto entre a área de sua base e sua altura:

$$V = A_b \cdot h$$

Prezada Professora, Prezado Professor,

Pensando em facilitar a visualização da planificação apresentada na sessão "Classificação dos prismas", você pode acessá-las nos espaços abaixo, no GeoGebra.

Prisma Reto

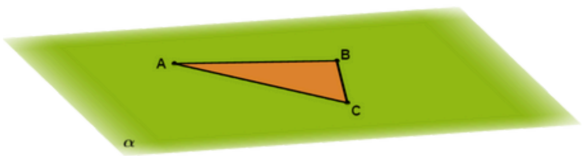
Prisma Oblíquo

Já para exemplificar o Princípio de Cavalieri pode ser utilizada a seguinte aplicação:

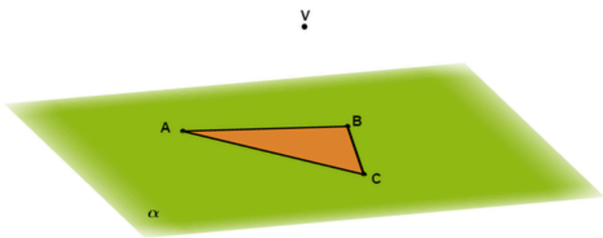
Princípio de Cavalieri

PIRÂMIDES

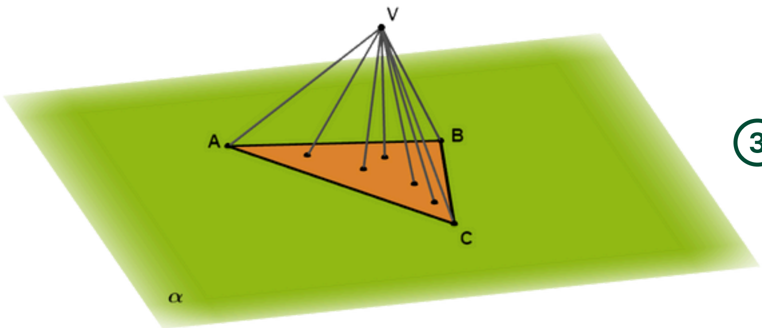
Considere um plano α onde está contido um polígono convexo ABC. Defina então um ponto V que não pertença a α. Trace todos os segmentos de retas com uma extremidade no polígono ABC e a outra no ponto V. A reunião de todos esses segmentos é denominada **pirâmide**.
Vejamos, passo a passo, essa construção:



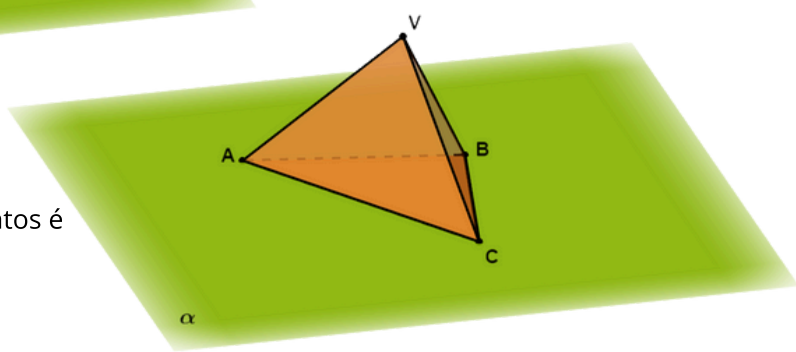
1 considere um plano α e um polígono convexo ABC.



2 defina então um ponto V que não pertença a α

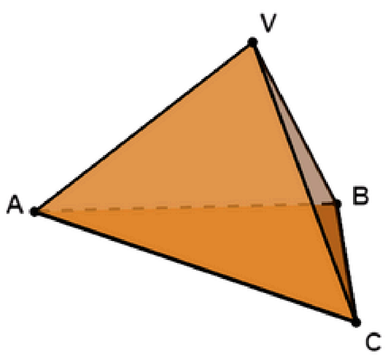


3 trace segmentos retas com uma extremidade no polígono ABC e a outra no ponto V



4 a reunião de todos esses segmentos é denominada pirâmide.

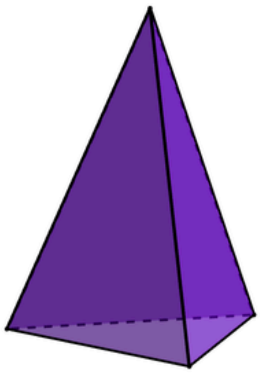
Na pirâmide representada podemos destacar os seguintes elementos:

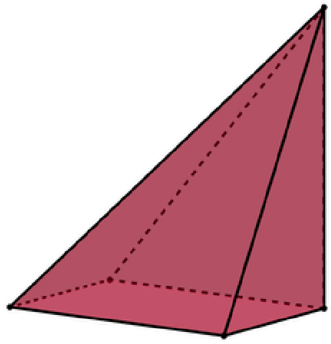


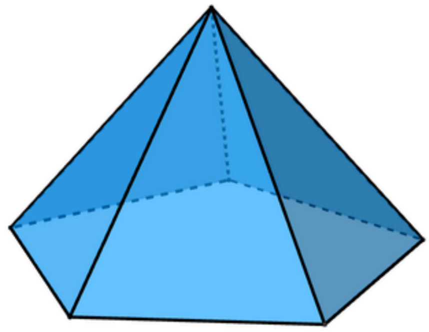
Vértices da base: A, B e C
Vértice da pirâmide: V
Arestas da bases: $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$
Arestas laterais: $\overline{AV}, \overline{BV}$ e $\overline{CV}$
Base: ABC
Faces laterais: ABV, ACV e BCV

Classificação das Pirâmides

As pirâmides, assim como os prismas, podem ser classificadas de acordo com o polígono que forma a sua base, por exemplo, se a pirâmide possui uma base triangular ela é denominada pirâmide triangular, veja alguns exemplos abaixo:

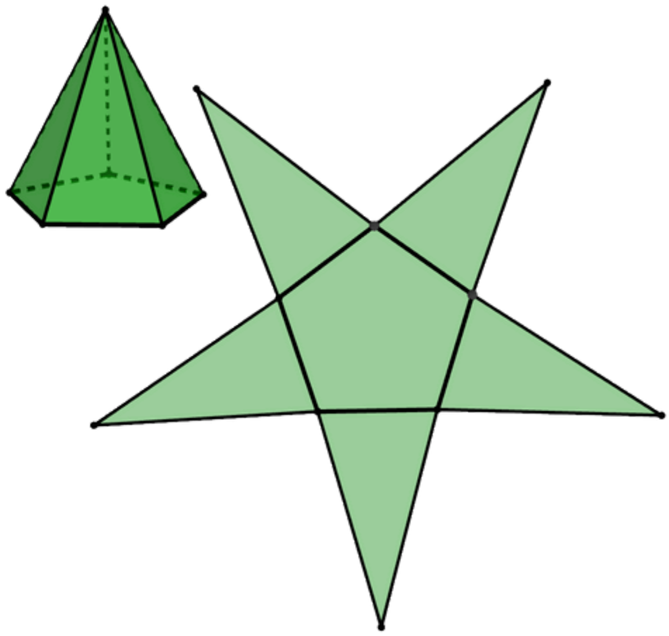

Pirâmide Triangular

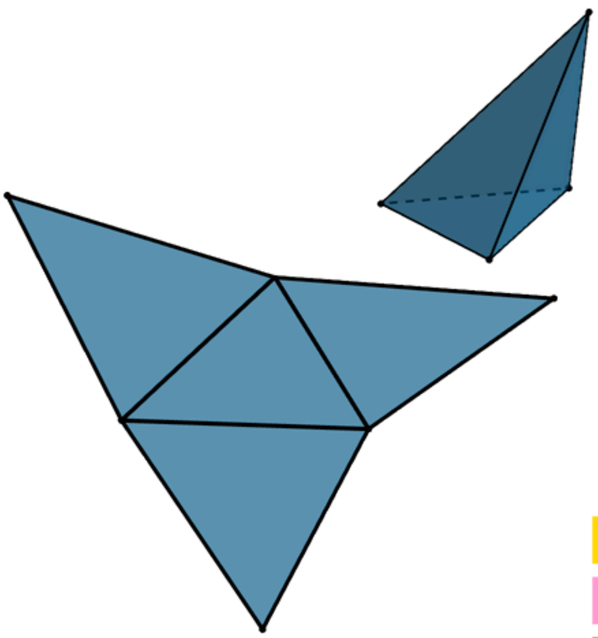

Pirâmide Quadrangular


Pirâmide Pentagonal

Nos sólidos acima, as pirâmides triangular e pentagonal são chamadas de pirâmides retas, enquanto a pirâmide quadrangular é chamada de pirâmide oblíqua. Além disso, uma pirâmide reta cuja base seja um polígono regular é chamado de pirâmide regular.

Observe abaixo a planificação de uma pirâmide reta e de uma pirâmide oblíqua:


Na pirâmide reta, as faces laterais são triângulos equivalentes.


Na pirâmide oblíqua, as faces laterais são triângulos, porém não são equivalentes.

Área da Superfície de uma Pirâmide

Em uma pirâmide podemos destacar as seguintes áreas:

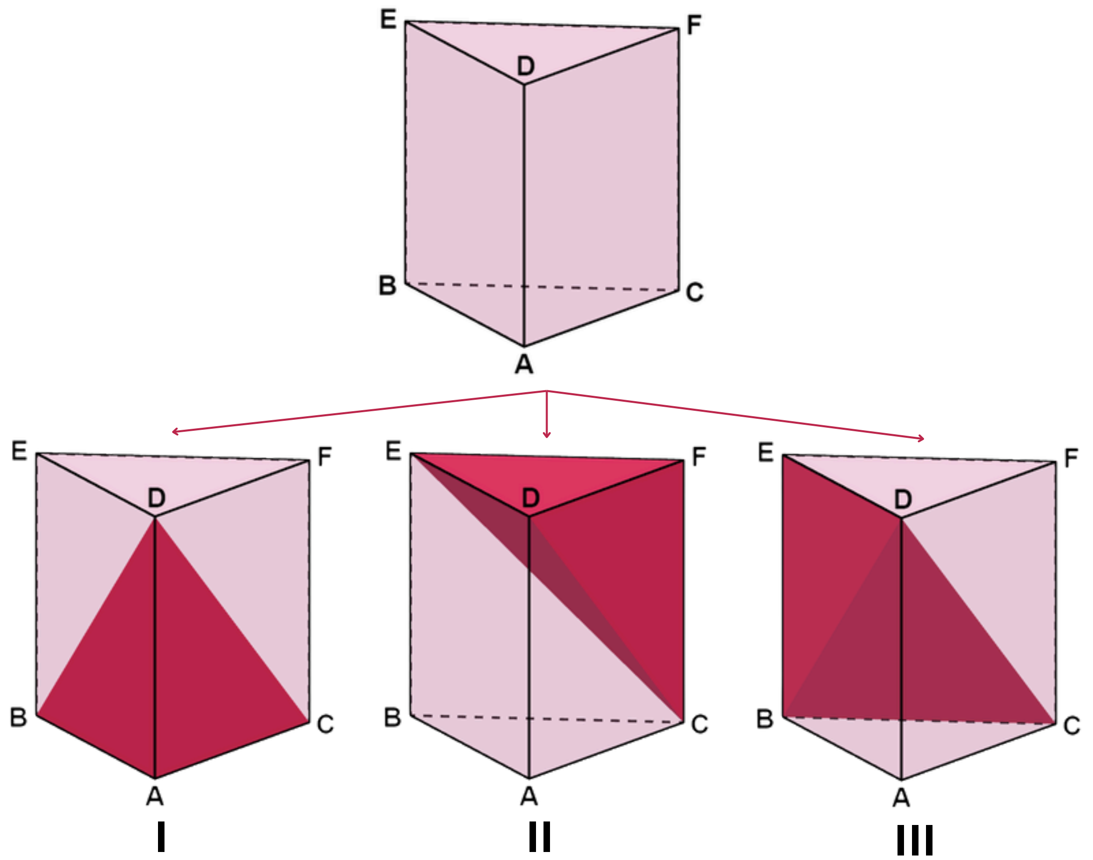
- **Superfície lateral (A_l)**: corresponde à reunião das faces laterais da pirâmide. A sua área é chamada de área lateral, que é determinada pelas áreas dos triângulos que formam as faces laterais.
- **Área da base (A_b)**: corresponde à área do polígono que compõe a base da pirâmide.
- **Superfície total (A_T)**: corresponde à reunião da superfície lateral e da base da pirâmide.

Portanto,

$$A_T = A_b + A_l$$

Volume da Pirâmide

Considere o prisma abaixo e as seguintes pirâmides que podem ser obtidas dele:



Daí podemos tirar algumas relações:

$V_I = V_{II}$ *Pois os triângulos ABC e DEF, que formam as bases das pirâmides I e II, respectivamente, são congruentes e a altura de ambas são iguais, e iguais à altura do prisma.*

$V_{II} = V_{III}$ *Pois os triângulos ECF e BEC, que formam as bases da pirâmide II e III, respectivamente, são congruentes, já que são metade do paralelogramo BCFE, e a altura de ambas é representada pela medida do segmento DE.*

Daí, podemos tirar a seguinte conclusão:

$V_I = V_{II} = V_{III} = V_{Pirâmide}$ e $V_I + V_{II} + V_{III} = 3V_{Pirâmide} = V_{Prisma} \Rightarrow V_{Pirâmide} = \dfrac{V_{Prisma}}{3}$.

Utilizando o Princípio de Cavalieri e lembrando da forma de cálculo do volume do prisma, podemos concluir que

$$V_{Pirâmide} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

Prezada Professora, Prezado Professor,

Pensando em facilitar a visualização da planificação apresentada na sessão "Classificação das pirâmides" você pode utilizar as duas aplicações seguintes do GeoGebra:

Pirâmide Reta

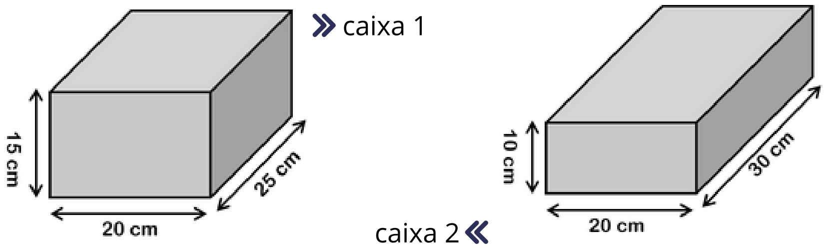
Pirâmide Oblíqua

Já para exemplificar a demonstração intuitiva do volume da pirâmide, pode ser utilizada a seguinte aplicação:

Volume da Pirâmide

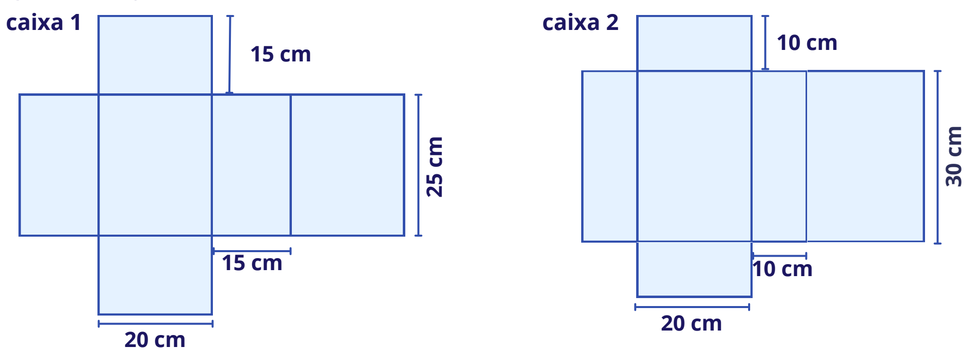
Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Uma empresa deseja reformular as embalagens em que transporta seus produtos. A administração dessa empresa recebeu duas opções, cujas representações são ilustradas abaixo, com as medidas indicadas, e deve optar por aquela que necessitar da menor quantidade de papelão para ser construída. Nessas condições, qual das embalagens deve ser escolhida pela empresa?



Solução:

Para determinar qual das caixas escolher devemos analisar a que necessitar da menor quantidade de papelão para ser construída. Matematicamente, devemos determinar a medida da área total das duas caixas, que podem ser representadas como um bloco retangular. Suas planificações são dadas abaixo:



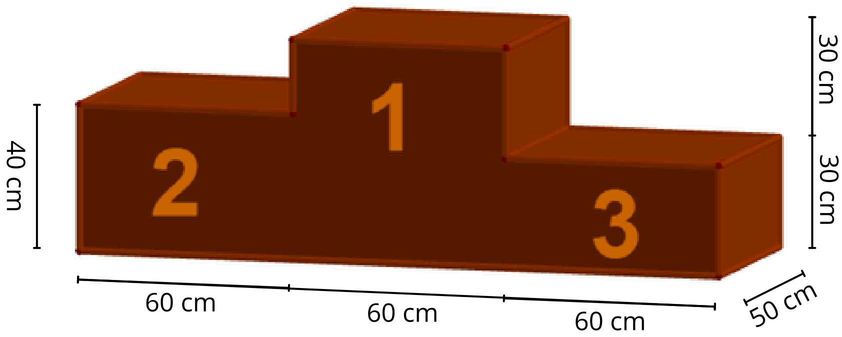
Vamos determinar a área de cada uma das caixas.

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \times (25 \times 20 + 25 \times 15 + 15 \times 20)cm^2 \\ &= 2 \times (500 + 375 + 300)cm^2 \\ &= 2 \times 1175cm^2 = 2350cm^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= 2 \times (30 \times 20 + 30 \times 10 + 10 \times 20)cm^2 \\ &= 2 \times (600 + 300 + 200)cm^2 \\ &= 2 \times 1100cm^2 = 2200cm^2 \end{aligned}$$

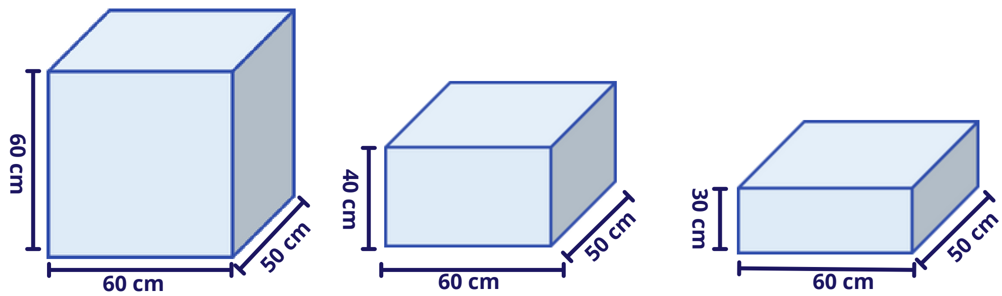
Como a medida da área da caixa 2 é menor, a administração da empresa deverá optar pela caixa 2.

EXERCÍCIO 2. Pedro foi contratado para confeccionar o pódio para premiação de uma competição de futsal da escola de seu filho. O modelo a ser confeccionado, bem como suas medidas, está representado na figura abaixo (fora de proporção no desenho). Para esse projeto Pedro utilizará blocos maciços de concreto. Qual o volume de concreto necessário para a confecção do pódio?



Solução:

Podemos particionar o pódio em 3 blocos retangulares como mostrados a seguir. Assim, o volume de concreto a ser utilizado é a soma dos volumes individuais.



$$V_1 = 60 \times 50 \times 60 = 180000cm^3$$

$$V_2 = 60 \times 50 \times 40 = 120000cm^3$$

$$V_3 = 60 \times 50 \times 30 = 90000cm^3$$

$$V_{Total} = V_1 + V_2 + V_3 = 390000cm^3$$

Assim, o volume de concreto utilizado para a produção do pódio é igual a 390 000cm^3.

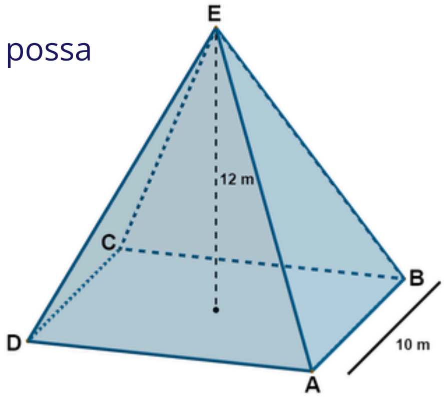
EXERCÍCIO 3. Uma empresa de design foi contratada para criar um monumento que será instalado em uma praça pública. A estrutura terá o formato de uma pirâmide quadrangular regular de altura 12 m e base com aresta medindo 10m. Para finalizar o projeto, será necessário pintar de azul toda a superfície externa da pirâmide (excluindo a base).

a) Determine o volume desse monumento.

b) Sabendo que cada litro de tinta cobre uma superfície de 3 m², determine a quantidade de tinta necessária para pintar o monumento.

Solução:

Inicialmente devemos determinar um modelo que possa representar matematicamente o problema:

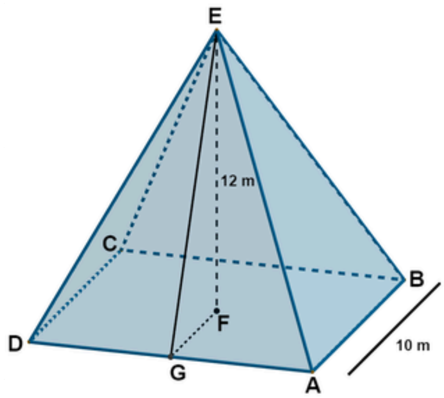


a) Determine o volume desse monumento.

Como a base da pirâmide é um quadrado, temos

$$V = \frac{10^2 \cdot 12}{3} = 100 \cdot 4 = 400\ m^3.$$

b) Sabendo que cada litro de tinta cobre uma área de 3 m² determine a quantidade de tinta necessária para se pintar o monumento.



Inicialmente, baixe, a partir de E, a altura da pirâmide e defina o ponto G, ponto médio do segmento AD. A altura do triângulo que forma a face lateral da pirâmide é GE.

Como a pirâmide é regular todas as faces são congruentes. Portanto,

$$A_l = 4 \cdot A_{\triangle\ ADE}.$$

Para determinar a área de ADE devemos, primeiro, determinar a medida de GE, recorrendo ao triângulo retângulo GFE, de hipotenusa GE:

$$GE^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow GE = \sqrt{169} = 13\ m.$$

Dessa forma,

$$A_l = 4 \cdot \frac{10 \cdot 13}{2} = 4 \cdot 5 \cdot 13 = 260\ m^2.$$

Como cada litro de tinta cobre 3m², serão necessários

$$\frac{260}{3} = 86,\bar{6}$$

87 l de tinta.

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 5 (Geometria) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
   - p. 83-102.
2. **Volume 2 (Geometria Plana e Espacial) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
   - p. 82-97.
   - p. 106-112.

VOLUME OU CAPACIDADE?

O vídeo da professora Maria Ignez Diniz, do Grupo Mathema, faz uma discussão interessante entre a diferença entre volume e capacidade:
https://www.youtube.com/watch?v=bzO9ZVXQiIc

SUGESTÃO DE LEITURA

Sugerimos a leitura e, se viável, uma tertúlia com os estudantes baseado no artigo Embalagens, de autoria de Rogério César dos Santos e Sandra A. de Oliveira Baccarin, publicado na Revista do Professor de Matemática.

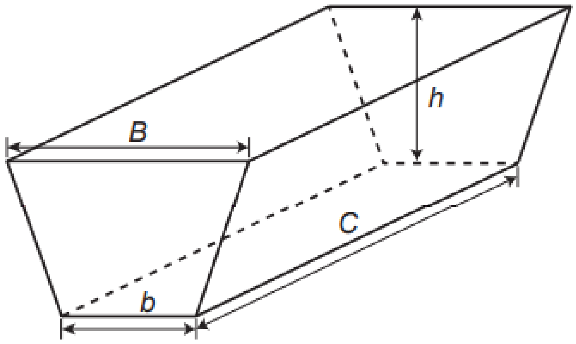
SUGESTÃO DE PRÁTICA

No Volume 5 (Geometria) da Coleção Prisma Matemática (Editora FTD), nas páginas 104 a 105, é sugerida uma prática de planificação de prismas no GeoGebra.

Atividades

ATIVIDADE 1

(Enem 2014 - Adaptada) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Legenda:
b - largura do fundo
B - largura do topo
C - comprimento do silo
h - altura do silo

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³ desse tipo de silo. Qual é a quantidade máxima (em toneladas) de forragem que cabe no silo?

ATIVIDADE 2

A creche "Sonho Mágico" precisa de um armário novo para guardar os brinquedos das crianças. Para isso, a diretora solicitou um projeto em escala 1:10 para definir as dimensões do armário, que terá o formato de um paralelepípedo retângulo e será feito de madeira.

No projeto, as medidas internas do armário são:

- Comprimento: 25 cm
- Largura: 10 cm
- Altura: 20 cm

Qual é o volume interno do armário de brinquedos?

ATIVIDADE 3

Mariana é uma apaixonada por peixes e resolveu comprar um aquário novo para sua casa. Ela encontrou um modelo retangular que se encaixa perfeitamente no espaço disponível em sua sala. O aquário tem as seguintes dimensões internas:

Comprimento: 0,8 m
Largura: 0,4 m
Altura: 0,5 m

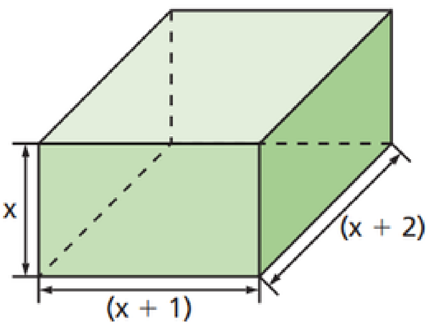
Design: Guavanaboy Studio / Fonte: Canva

Utilize: $1\ m^3 = 1\,000$ litros

Mariana precisa colocar água no aquário e, para evitar transbordamentos, ela pretende deixar um espaço de 10 cm entre a superfície da água e a borda superior do aquário. Calcule quantos litros de água Marian deve colocar no aquário, para que a água atinja o nível desejado.

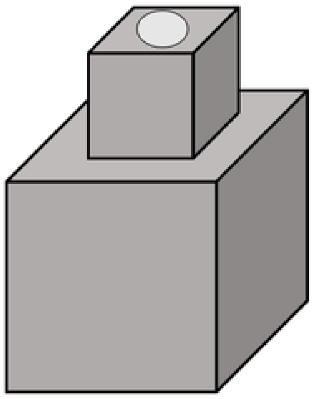
ATIVIDADE 4

Represente através de uma expressão algébrica a medida da área total do paralelepípedo a seguir.



ATIVIDADE 5

Um reservatório de água é composto por dois cubos sobrepostos (figura abaixo), com o cubo inferior tendo o dobro da aresta do cubo superior. Uma mangueira com vazão constante leva 6 minutos para encher um terço do cubo inferior. Quanto tempo a mangueira levará para encher o restante do reservatório?



ATIVIDADE 6

Uma empresa de eventos está projetando um palco com um totem central no formato de pirâmide de base pentagonal regular. O totem terá 15 m de altura e a área da base pentagonal é de 43,01 m². A empresa precisa calcular o volume interno do totem para determinar a quantidade de espuma expansiva necessária para preenchê-lo, garantindo sua estabilidade. Determine a quantidade de espuma expansiva necessária para preencher o volume interno do totem, considerando que a espuma tem uma taxa de expansão de 20%.

ATIVIDADE 7

Um artista plástico está criando uma escultura em formato de cubo para um jardim público. Ele precisa calcular a quantidade de tinta necessária para pintar toda a superfície externa da escultura. O volume da escultura é de 64 m³. Dessa forma,

A) O artista precisará de tinta suficiente para cobrir 52 metros quadrados de superfície.
B) O artista precisará de tinta suficiente para cobrir 64 metros quadrados de superfície.
C) O artista precisará de tinta suficiente para cobrir 76 metros quadrados de superfície.
D) O artista precisará de tinta suficiente para cobrir 82 metros quadrados de superfície.
E) O artista precisará de tinta suficiente para cobrir 96 metros quadrados de superfície.

ATIVIDADE 8

Duas pirâmides, uma com base pentagonal e outra com base hexagonal, possuem alturas iguais. A área da base da pirâmide pentagonal é de 20 cm², enquanto a área da base da pirâmide hexagonal é de 30 cm².
Qual das afirmações sobre o volume das pirâmides é VERDADEIRA?

A) O volume da pirâmide pentagonal é igual ao volume da pirâmide hexagonal.
B) O volume da pirâmide pentagonal é 10 cm³ menor que o volume da pirâmide hexagonal.
C) O volume da pirâmide pentagonal é 10 cm³ maior que o volume da pirâmide hexagonal.
D) O volume da pirâmide pentagonal é $\frac{2}{3}$ do volume da pirâmide hexagonal.

E) O volume da pirâmide pentagonal é $\frac{3}{2}$ do volume da pirâmide hexagonal.

ATIVIDADE 9

Uma empresa de aquários precisa projetar um novo modelo com capacidade para 240 litros de água. O aquário terá o formato de um paralelepípedo retangular, com a base medindo 50 cm de comprimento e 40 cm de largura. A empresa precisa determinar a altura do aquário e a quantidade de vidro necessária para construí-lo, considerando que a tampa superior não será feita de vidro. Quantos centímetros quadrados de vidro serão necessários para construir o aquário?

A) Serão necessários 20 000 cm^2 de vidro para construir o aquário
B) Serão necessários 23 600 cm^2 de vidro para construir o aquário
C) Serão necessários 25 10000 cm^2 de vidro para construir o aquário
D) Serão necessários 29 250 cm^2 de vidro para construir o aquário
E) Serão necessários 31 410 cm^2 de vidro para construir o aquário

ATIVIDADE 10

Um paralelepípedo e uma pirâmide, ambos com base quadrada, possuem a mesma altura e a mesma área da base. O volume do paralelepípedo é de 48 cm^3. Qual é o volume da pirâmide?

A) 12 cm^3
B) 16 cm^3
C) 24 cm^3
D) 36 cm^3
E) 96 cm^3

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: geometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em Contextos**: geometria plana e espacial. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

LAUNAY, M. A **Fascinante História da Matemática**: da pré-história aos dias de hoje. Trad. Clóvis Marques. 2. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2021.

SOUZA, J. R. de. **Multiversos Matemática**: Geometria: Ensino Médio.1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de**. Prisma matemática:** geometria e trigonometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DOCE, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 9:** geometria plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

DOCE, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 10**: Geometria espacial, posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2011 - Exame Nacional do Ensino Médio 2011:** 2º dia. Brasília: INEP, 2011. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/dia1_caderno2_amarelo.pdf. Acesso em: 20 fev. 2025.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2016 - Exame Nacional do Ensino Médio 2016:** 2º dia. Brasília: INEP, 2016. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/2016_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 20 fev. 2025.