Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: conjuntos e funções. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em Contextos**: função afim e função quadrática. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

ATIVIDADES

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 1:** conjuntos, funções. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2010 PPL - Exame Nacional do Ensino Médio 2010:** 2º dia. Brasília: INEP, 2010. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/2010_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD5.pdf. Acesso em: 09 mar. 2025.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2020 PPL - Exame Nacional do Ensino Médio 2020:** 2º dia. Brasília: INEP, 2020. Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_reaplicacao_PPL_D2_CD6.pdf. Acesso em: 09 mar. 2025.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2023 - Exame Nacional do Ensino Médio 2023:** 2º dia. Brasília: INEP, 2023. Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2023_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 09 mar. 2025.

QUINZENA
13
28/07 a 01/08

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL — GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL
CORPOS REDONDOS: CILINDRO, CONE E ESFERA

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.	• Calcular áreas totais de prismas, pirâmides e corpos redondos para resolver problemas relacionados a situações reais. • Conhecer expressões de cálculo de volume de prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas, incluindo o princípio de Cavalieri. • Resolver situações-problema envolvendo o volume e capacidade de sólidos geométricos em contextos diversos, utilizando a decomposição e as expressões algébricas para o cálculo de volumes de sólidos elementares.	**D129_M** Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido.

Contextualização

Na última semana estudamos os prismas e as pirâmides. Nesta semana continuaremos o estudo da geometria espacial, abordando os corpos redondos: cilindro, cone e esfera.

O estudo dos corpos redondos remonta à Grécia de Arquimedes e Demócrito. Demócrito escreveu sobre a relação entre o volume do cone e do cilindro e Arquimedes foi o primeiro a determinar a forma explícita do volume da esfera.

A ideia central de Arquimedes é que uma esfera e um cone se equilibram com cilindro, com dimensões específicas. No entanto, a demonstração apresentada por ele era excessivamente complicada.

Assim como os prismas, diversas obras arquitetônicas usam de elementos geométricos para sua composição. Templos religiosos (como igrejas e mesquitas) apresentam, em alguns casos, abóbadas (tetos em forma de semiesfera), bem como alguns telescópios de pesquisa.

Em regiões onde ocorre falta de água, é comum que as casas tenham uma cisterna, um reservatório para armazenar e conservar a água.

Nesta semana nos concentraremos no estudo de alguns elementos, o volume e a área total dos cilindros, cones e esferas.

Bons estudos!

Cisterna
Autor: Fronteira
Fonte: Wikimedia Commons

Telescópio de palomar
Design: Backyard Productions/Fonte: Canva Imagens

conexões matemáticas SEDU - 2025

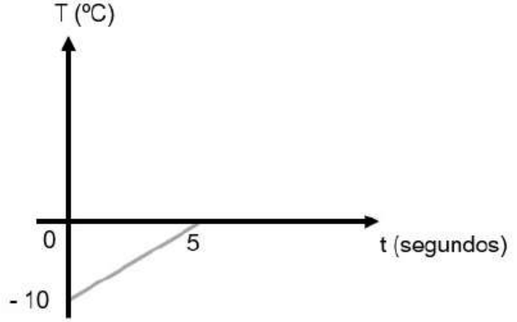
ATIVIDADE 9

Um tanque de água está sendo esvaziado a uma taxa constante. O volume de água restante no tanque (em litros) em função do tempo (em minutos) é representado pela função V(t) = - 5t + 100, onde "t" é o tempo em minutos. Em quantos minutos o tanque estará completamente vazio?

A) 10 minutos
B) 15 minutos
C) 20 minutos
D) 25 minutos
E) 30 minutos

ATIVIDADE 10

Um grupo de pesquisadores da UFES (Universidade Federal do Espírito Santo) está conduzindo um estudo sobre o descongelamento de uma amostra de gelo. Eles retiram a amostra de um freezer e monitoram sua temperatura enquanto ela se aquece em um ambiente com temperatura constante superior a 0°C. O gráfico abaixo representa a temperatura (T) da amostra de gelo, em graus Celsius °C, em função do tempo (t), decorrido em minutos, desde que foi retirada do freezer.



Analisando o gráfico do aquecimento da amostra de gelo, o que o ponto onde a reta cruza o eixo horizontal (eixo do tempo) representa no contexto do experimento dos pesquisadores da UFES?

A) O instante em que a amostra de gelo atingiu sua temperatura máxima.
B) O instante em que a taxa de aquecimento da amostra de gelo se tornou zero.
C) O instante em que a temperatura da amostra de gelo se tornou igual à temperatura ambiente.
D) O instante em que a temperatura da amostra de gelo atingiu o valor de zero grau Celsius.
E) O instante em que a amostra de gelo começou a se resfriar novamente.

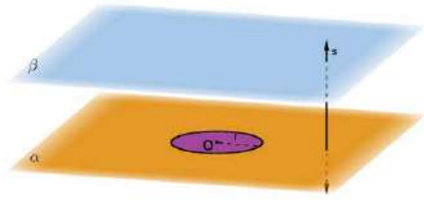
CONEXÕES MATEMÁTICAS SEDU - 2025

Conceitos e Conteúdos

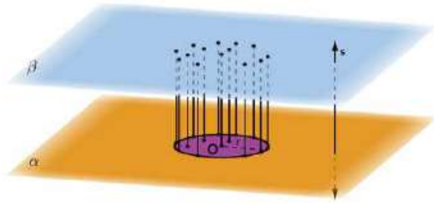
CILINDROS

Dados dois planos paralelos α e β, um círculo de centro O e raio r contido em α e uma reta s secante aos planos α e β que não intersecta o círculo, a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta s, com uma extremidade em um ponto do círculo e a outra no plano β, é denominada **cilindro circular** ou, simplesmente, **cilindro**.

Vejamos, passo a passo, essa construção:

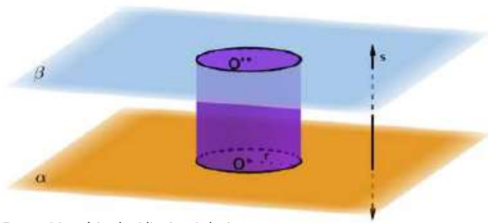


1 Dados dois planos paralelos α e β, um círculo de centro O e raio r contido em α e uma reta s secante aos planos α e β que não intersecta o círculo.



2 Trace segmentos de reta paralelos à reta s, com uma extremidade em um ponto do círculo e a outra no plano β.

Fonte: Maurício de Oliveira Celeri



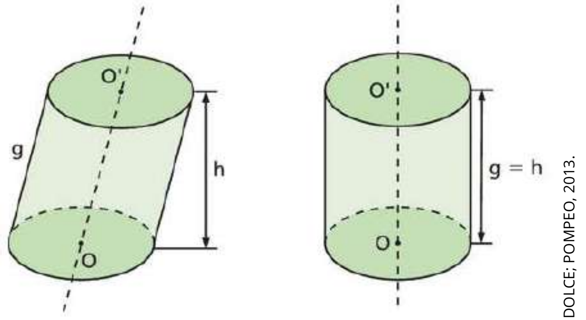
Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

3 A figura geométrica formada pela reunião de todos esses segmentos é denominada cilindro circular ou, simplesmente, cilindro.

Tomando o cilindro construído, podemos determinar os seguintes elementos:

- **bases:** são os círculos de raio r e centros O e O’ situados nos planos paralelos α e β, respectivamente;
- **raio da base:** é o raio do círculo que forma a base;
- **altura:** é a distância entre os planos paralelos α e β, cuja medida indicaremos por h;
- **eixo:** é a reta OO’ que contém os centros das bases;
- **geratrizes:** são os segmentos de reta paralelos ao eixo e cujas extremidades são pontos das circunferências das bases. Indicaremos a medida da geratriz por g.

Assim como nos prismas e pirâmides, os cilindros podem ser oblíquos e retos. Observe as imagens abaixo:



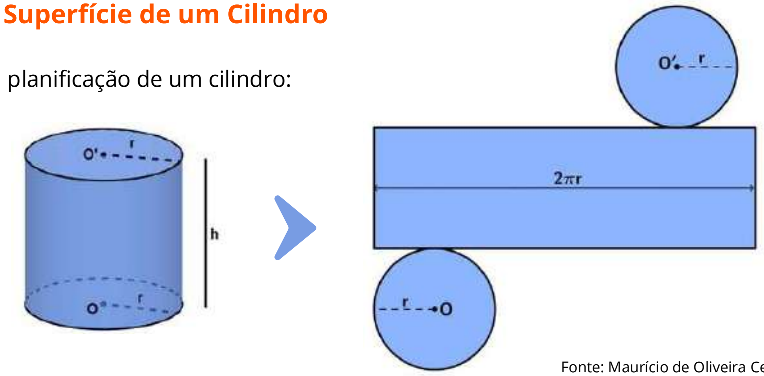
cilindro oblíquo **cilindro reto**

Como você pode notar, quando temos um cilindro oblíquo a geratriz e a altura não são coincidentes, como acontece no cilindro reto.

Neste material nosso interesse está nos cilindros retos. Portanto, a menos que haja uma indicação, visual ou textual, que seja um cilindro oblíquo, consideraremos o cilindro como reto.

Área da Superfície de um Cilindro

Observe a planificação de um cilindro:



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

ATIVIDADE 7

A pequena padaria artesanal, "Pão Quentinho", localizada no interior de Mantenópolis-ES, produz e vende pães de fermentação natural. O custo de produção de cada pão é composto por um valor fixo de R$ 2,00 (ingredientes básicos e embalagem) e um valor variável de R$ 1,50 por pão (farinhas especiais e outros ingredientes). Cada pão é vendido por R$ 5,00. Qual das seguintes alternativas representa corretamente a função que descreve o lucro total da padaria "Pão Quentinho" em função da quantidade (**x**) de pães vendidos (x)?

A) L(x) = 5x - 2
B) L(x) = 3,5x - 2
C) L(x) = 1,5x + 2
D) L(x) = 2x - 3,5
E) L(x) = 5x - 3,5

Lucro = Receita - Custo
L(x) = R(x) - C(x)

ATIVIDADE 8

No Parque da Cidade, localizado no município da Serra-ES, um serviço de aluguel de bicicletas foi criado para promover a atividade física e o lazer. Os clientes pagam uma taxa fixa pelo aluguel da bicicleta, além de um valor adicional a cada 20 minutos que utilizarem a bicicleta. A tabela abaixo apresenta os preços de aluguel das bicicletas:

Tempo	Valor (R$)
20min	5,75
40min	6,50
1h	7,25
1h 20min	8,00
1h 40min	8,75

Um cliente que pagou o valor de R$ 10,25 utilizou a bicicleta por:

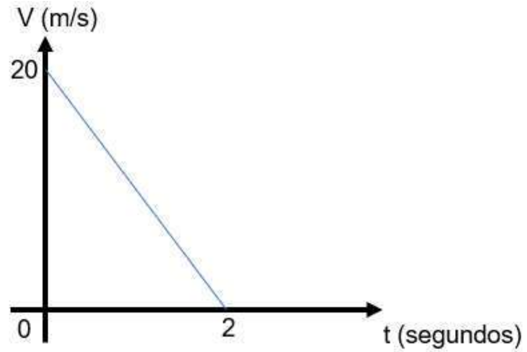
A) 2h.
B) 2h 20m.
C) 2h 40m.
D) 3h.
E) 3h 20m.

ATIVIDADE 5

Um vendedor de planos de internet recebe um salário fixo mensal e uma comissão por cada plano vendido. Em um mês, ele vendeu 10 planos e recebeu um total de R$ 1.500,00. No mês seguinte, vendeu 15 planos e recebeu R$ 1.900,00. Determine o salário fixo mensal e a comissão por plano vendido desse vendedor, escrevendo também a função do 1º grau que representa o salário total mensal (y) em função da quantidade de planos vendidos (x).

ATIVIDADE 6

Um objeto foi lançado verticalmente para cima a partir do solo com uma velocidade inicial. Desconsiderando a resistência do ar, a velocidade desse objeto diminui linearmente com o tempo devido à aceleração da gravidade. O gráfico abaixo representa a velocidade do objeto (em metros por segundo - m/s) em função do tempo decorrido após o lançamento (em segundos).



Qual das seguintes funções polinomiais do 1º grau representa corretamente a velocidade do objeto (V) em função do tempo (t), de acordo com o gráfico apresentado?

A) V(t) = 20t + 2
B) V(t) = – 10t + 20
C) V(t) = 10t - 20
D) V(t) = – 20t + 2
E) V(t) = 2t – 20

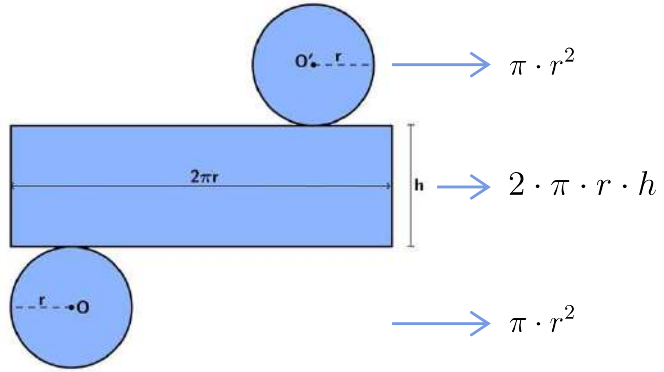
Em um cilindro podemos destacar as seguintes superfícies:

- **Superfície lateral (**A_l**)**: corresponde à área do retângulo que forma a lateral do cilindro.
- **Superfície da base (** A_b**)**: corresponde à área do círculo que compõe cada base do cilindro.
- **Superfície total (**A_T**):** corresponde à reunião da superfície lateral e das bases do cilindro.

Portanto,

$$A_T = 2 \cdot A_b + A_l.$$

Porém, note que é possível determinar uma expressão algébrica para a área da superfície do cilindro, visto que ele é composto por um retângulo e dois círculos:



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

Agora, para obter a superfície total, basta somarmos:

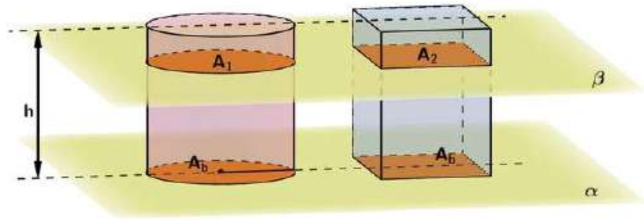
$$A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2\pi r(h + r)$$

assim,

$$\boxed{A_T = 2\pi r(h + r)}$$

Volume do Cilindro

Consideremos um cilindro de altura h e área da base A_b e um prisma de altura h e área da base A_b, isso é, o cilindro e o prisma têm alturas congruentes e bases de mesma área. Observe a ilustração abaixo:



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

Os dois sólidos têm as bases num mesmo plano α. Qualquer plano β paralelo a α, que secciona o cilindro, também secciona o prisma e as seções (A_1 e A_2, respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

Então, pelo princípio de Cavalieri, o cilindro e o prisma têm volumes iguais:

$$V_{\text{Cilindro}} = V_{\text{Prisma}} = A_b \cdot h.$$

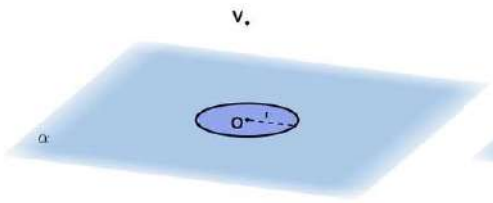
Como a base do cilindro é um círculo de raio r, temos

$$V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h.$$

CONE

Considere um plano α, um círculo de raio r nesse plano e um ponto V não pertencente a α. A reunião de todos os segmentos de reta que ligam cada ponto do círculo ao ponto V representa um sólido chamado **cone circular** (ou simplesmente **cone**).

Vejamos, passo a passo, essa construção:



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

(1) Considere um plano α, um círculo de raio r nesse plano e um ponto V não pertencente a α.

(2) Trace segmentos de reta que ligam cada ponto do círculo ao ponto V.

Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

(3) A reunião de todos esses segmentos de reta que ligam cada ponto do círculo ao ponto V representa um sólido chamado cone circular (ou simplesmente cone).

O cone possui:

- **uma base:** o círculo de centro O e raio r.
- **geratrizes:** são os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base.
- **vértice:** o ponto V citado acima.
- **Altura:** distância perpendicular do vértice ao plano da base.

ATIVIDADE 3

Os antigos babilônios, notáveis por sua Matemática avançada para a época, especialmente nas áreas da Astronomia e da Contabilidade, frequentemente se deparavam com situações em que quantidades aumentavam ou diminuíam de maneira constante. Um tablete de argila fragmentado foi descoberto, sugerindo o registro da produção de cevada ao longo de alguns meses. Embora partes do tablete estejam ilegíveis, algumas informações importantes foram preservadas:

- No 3º mês de registro, a produção foi de 120 medidas de cevada.
- No 7º (e último) mês de registro, a produção foi de 200 medidas de cevada.

Assumindo que a produção de cevada nesse campo seguiu um padrão de crescimento constante a cada mês:

A) Qual foi o aumento mensal na produção de cevada nesse campo, com base nas informações preservadas no tablete? Explique seu raciocínio, considerando a natureza do crescimento constante.

B) Caso esse padrão de crescimento constante tenha se mantido desde o 1º mês de registro, qual teria sido a produção de cevada no 1º mês?

C) Se a produção continuasse seguindo esse mesmo padrão, qual seria a produção de cevada num possível 10º mês de registro?

D) Considere a produção mensal de cevada (P) como uma função do número do mês (n) e determine a expressão para P(n).

ATIVIDADE 4

Uma empresa de entrega de encomendas utiliza a função do primeiro grau y = 3x + 20 para calcular o custo total de suas entregas, onde 'y' representa o custo total da entrega em reais e 'x' representa a distância percorrida em quilômetros. Construa um gráfico com o eixo x representando a distância percorrida (em km) e o eixo y representando o custo total da entrega (em R$), plotando os pontos correspondentes às seguintes distâncias: 5 km, 8 km, 10 km e 12 km.

Uma malha quadriculada para a construção do gráfico encontra-se ao final da seção de atividades.

Atividades

ATIVIDADE 1

Uma loja de camisetas personalizadas cobra um preço fixo para a criação da arte e um valor adicional por camiseta produzida. A tabela abaixo mostra o custo total (y) para diferentes quantidades de camisetas encomendadas (x):

Quantidade de camisetas (x)	Custo total (y)
1	R$35,00
2	R$50,00
3	R$65,00
4	R$80,00

Com base nessa tabela:

A) Identifique a expressão algébrica que representa corretamente o custo total (y) em função da quantidade de camisetas (x).

B) Caso sejam encomendadas 35 camisetas, qual será o custo total?

C) Um custo total de R$1 190,00 representará a produção de quantas camisas?

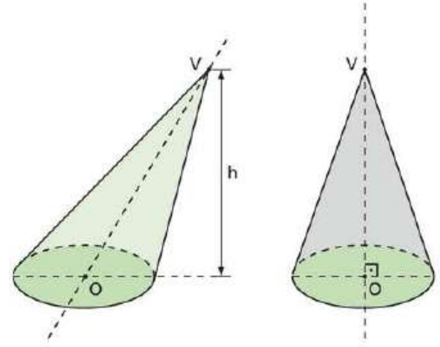
ATIVIDADE 2

Uma cooperativa de reciclagem na região da Grande Terra Vermelha, Vila Velha-ES, criou um programa de recompensas para incentivar a coleta seletiva e gerar renda para seus membros. O programa oferece um bônus inicial para novos participantes e um valor fixo por quilo de material reciclável entregue. Um novo participante recebeu R$ 194,00 ao entregar 23 quilos de material, incluindo um bônus inicial de R$ 10,00.

A) Qual é o valor pago por essa cooperativa pelo quilo de material reciclável?

B) Determine uma função que represente a situação apresentada.

Assim como nos cilindros, podemos classificar os cones em retos ou oblíquos:



cone oblíquo **cone reto**

DOLCE; POMPEO, 2013.

Neste material nosso interesse está nos cones retos, portanto, a menos que haja uma indicação visual ou textual de que o cone seja um cone oblíquo, consideraremos cone como um cone reto.

Área da Superfície de um Cone

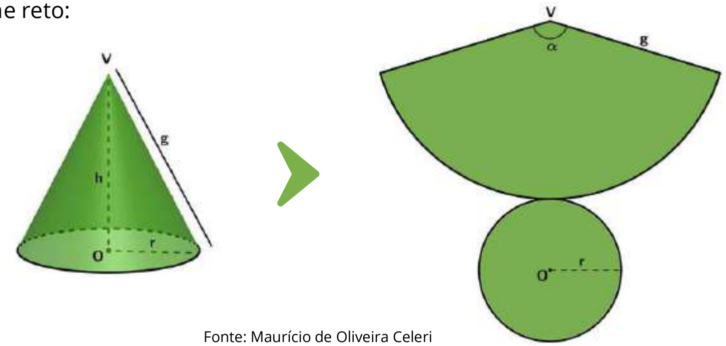
Em um cone podemos destacar as seguintes superfícies:

- **Superfície lateral (A_l):** é a reunião das geratrizes. Corresponde à área de um setor circular.
- **Superfície da base (A_b):** corresponde à área do círculo que compõe a base do cone.
- **Superfície total (A_T):** corresponde à reunião da superfície lateral e da base do cone.

Portanto,

$$A_T = A_b + A_l.$$

Assim, como fizemos no cilindro, vamos determinar a expressão algébrica para determinar a área da superfície total do cone. Para isso, observe a planificação de um cone reto:



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

Para determinar a superfície total de um cone devemos calcular duas áreas:

- círculo de raio r

$$A_b = \pi r^2$$

- setor circular de raio g e ângulo central α

$$A_l = \frac{\alpha \pi g^2}{360°}$$

Uma outra maneira de determinar a superfície lateral é escrevendo uma razão entre o comprimento da circunferência de raio g e o comprimento do setor circular, já que a área do setor circular é proporcional ao comprimento do arco correspondente :

$$\frac{2\pi g}{2\pi r} = \frac{\pi g^2}{A_l} \Rightarrow A_l = \frac{\pi g^2 r}{g} \Rightarrow A_l = \pi g r.$$

Portanto

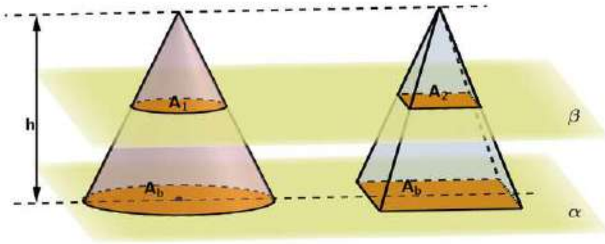
$$A_T = \pi r^2 + \frac{\alpha \pi g^2}{360°} \Rightarrow \boxed{A_T = \pi \left(r^2 + \frac{\alpha g^2}{360°} \right).}$$

Ou

$$A_T = \pi r^2 + \pi g r \Rightarrow \boxed{A_T = \pi r \left(r + g \right).}$$

Volume do Cone

Consideremos um cone de altura h e área da base A_b e uma pirâmide de altura h e área da base A_b, isso é, um cone e uma pirâmide de alturas congruentes e bases de mesma área. Observe a ilustração abaixo:



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

Os dois sólidos têm as bases num mesmo plano α. Qualquer plano β paralelo a α, que secciona o cone, também secciona a pirâmide e as seções (A_1 e A_2, respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

Então, pelo princípio de Cavalieri, o cone e a pirâmide têm volumes iguais:

$$V_{\text{Cone}} = V_{\text{Pirâmide}} = \frac{A_b \cdot h}{3}.$$

Como a base do cone é um círculo de raio r, temos

$$\boxed{V_{\text{Cone}} = \frac{\pi r^2 h}{3}.}$$

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 1 (Conjuntos e funções) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
   - p. 82-101.
2. **Volume 2 (Função afim e função quadrática) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
   - p. 20-56.

PORTAL DA MATEMÁTICA

O módulo 'Função Afim' do portal da matemática apresenta vídeos e materiais para o aprofundamento sobre as funções.

SUGESTÃO DE PRÁTICA

No Volume 2 (Função afim e função quadrática) da Coleção Matemática em contextos (Editora Ática), na página 37, é sugerida uma prática que explora os coeficientes da função polinomial do primeiro grau no GeoGebra.

Exercício 2 (Adaptada de Dante e Viana, 2020). O preço de venda de um livro é de R$ 50,00 por unidade. A receita total f(x) obtida com a venda desse livro pode ser calculada em função do número x de livros vendidos.
a) Escreva a lei dessa função.
b) A receita total é diretamente proporcional ao número de livros vendidos?
c) Suponha que, nessa situação, o lucro, em reais, pela venda de x livros seja dado por L(x)=50x-200. O lucro é diretamente proporcional ao número de livros vendidos? Justifique.

Solução.
a) Considerando x o número de livros vendidos e o valor de comercialização deste livro R$ 50,00, a função que descreve a receita total é obtida fazendo a multiplicação do número de livros vendidos pelo seu valor:

$$f(x) = 50x.$$

b) Sim, pois todos os livros possuem o mesmo valor de comercialização, neste caso a constante de proporcionalidade é 50.

c) Não, observe a tabela abaixo e perceba que a relação não é proporcional:

x2

Número de Livros	Lucro
1	-150
2	-100
3	-50
4	0

x0,666...

Exercício 3 (ENEM - 2019). Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado.
Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por:

A) Y=80X+920
B) Y=80X+1 000
C) Y=80X+1 080
D) Y=160X+840
E) Y=160X+1 000

Solução. Semanalmente a empresa deve pagar R$ 1 000,00 reais para o gerente e R$ 160,00 (R$ 80,00 por dia, dois dias na semana) para cada um de seus funcionários. Portanto, se a empresa possui X funcionários, temos que

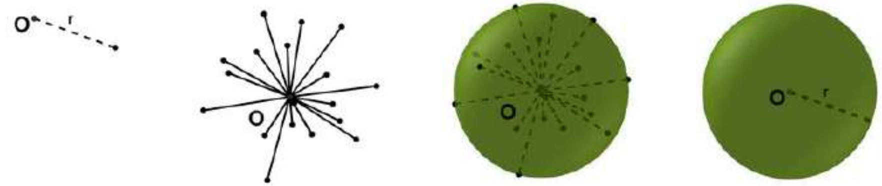
$$Y = \underbrace{160}_{\text{R\$ 160 para cada funcionário}}X + \underbrace{1000}_{\text{R\$ 1 000 para o gerente}}.$$

Portanto, a alternativa correta é a alternativa E).

ESFERA

Consideremos um ponto O e um número real positivo r qualquer. A esfera de centro O e raio de medida de comprimento r é o conjunto de todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a r do ponto O.

Vejamos, passo a passo, essa construção:



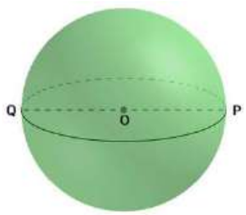
Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

1 Consideremos um ponto O e um número real positivo r qualquer.

2 Determine todos os pontos do espaço que estão a uma distância menor ou igual a r do ponto O.

3 A esfera de centro O e raio de medida de comprimento r é o conjunto de todos esses pontos.

Na esfera podemos destacar os seguintes elementos:
- O é o centro da esfera;
- OP e OQ são os raios da esfera;
- PQ é o diâmetro da esfera.



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

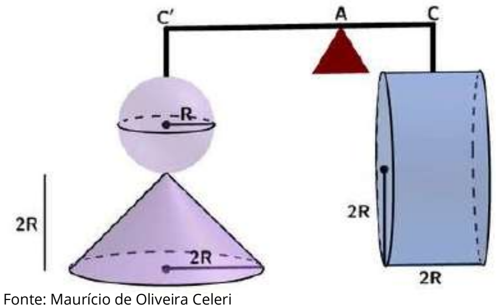
O conjunto de todos os pontos do espaço, cuja distância ao centro O é a medida do raio é chamada de superfície esférica.

Volume da Esfera

A medida de volume de uma esfera foi encontrada de maneira precisa, pela primeira vez, por Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.). Em seu tratado sobre a esfera e o cilindro. Arquimedes apresenta métodos para encontrar as medidas de área e de volume de alguns sólidos redondos. Nessa obra, ele concluiu que:

> “Uma esfera cujo comprimento do raio mede R e um cone com medida de comprimento do raio 2R e medida de comprimento da altura 2R são equilibrados por um cilindro com medida de comprimento do raio 2R e medida de comprimento da altura 2R desde que a medida de comprimento do braço da balança referente aos primeiros sólidos seja o dobro da medida de comprimento do braço referente ao segundo.”

Vamos determinar o volume da esfera pelo método de Arquimedes. Inicialmente, observe a ilustração abaixo:



Pelo método de Arquimedes, AC'=2·AC

Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

Isso significa que duas vezes a medida de massa da esfera com o cone equivale a uma vez a medida de massa do cilindro.
Chamando de E a medida do volume da esfera, c a medida do volume do cone e C a medida do volume do cilindro, temos:

$$2 \cdot (E + c) = C.$$

Como já sabemos determinar o volume do cilindro e do cone, podemos reescrever a equação acima:

$$2 \cdot \left(E + \frac{\pi \cdot (2R)^2 \cdot 2R}{3}\right) = \pi \cdot (2R)^2 \cdot 2R$$

$$2E + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 4R^2 \cdot 2R}{3} = \pi \cdot 4R^2 \cdot 2R$$

$$2E + \frac{16\pi R^3}{3} = 8\pi R^3$$

$$2E = 8\pi R^3 - \frac{16\pi R^3}{3} = \frac{24\pi R^3 - 16\pi R^3}{3}$$

$$2E = \frac{8\pi R^3}{3} \Rightarrow E = \frac{8\pi R^3}{3 \cdot 2} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Portanto,

$$\boxed{V_{\text{Esfera}} = \frac{4\pi R^3}{3}.}$$

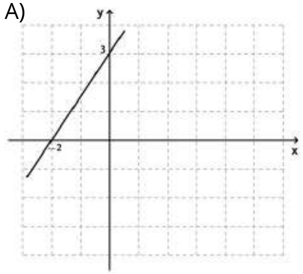
Área da Superfície de uma Esfera

Considere uma esfera de raio R. Imagine-a como sendo a composição de diversos sólidos menores que se parecem com pirâmides de base hexagonal, mas que não o são, pois a superfície da esfera não é plana. Entretanto, tomando as bases dessas pirâmides de modo que sejam as menores possíveis, nossa suposição se torna plausível.

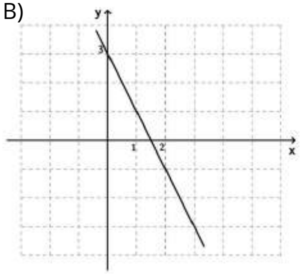
Exercícios Resolvidos

Exercício 1. O gráfico da função $f(x) = -2x + 3$ está corretamente representado em

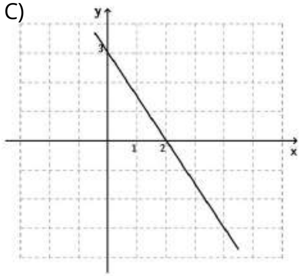
A)



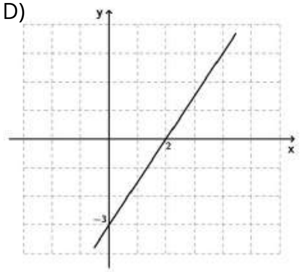
B)



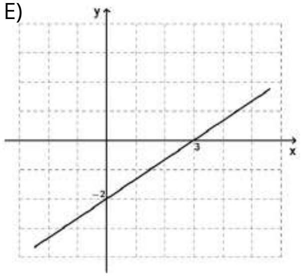
C)



D)



E)



Solução. Vamos analisar a função:

$$f(x) = \underbrace{-2}_{a}x + \underbrace{3}_{b}$$

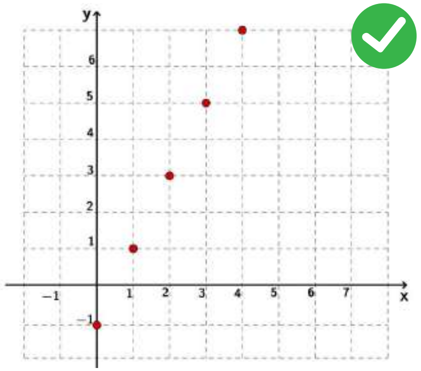
Como já vimos, a=-2 indica que a reta é mais inclinada do que f(x)=x e que esta reta é decrescente (pois sofre uma reflexão em torno do eixo x). Além disso, b=3, indica uma translação de 3 unidades no sentido do eixo y, logo o gráfico intersecta o eixo y no ponto (0, 3). Desta forma, a função que estamos buscando está representada no item B) ou item C).
Para decidir entre uma ou outra devemos analisar o zero da função, isto é, f(x)=0:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -2x+3 = 0 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-2} = 1,5.$$

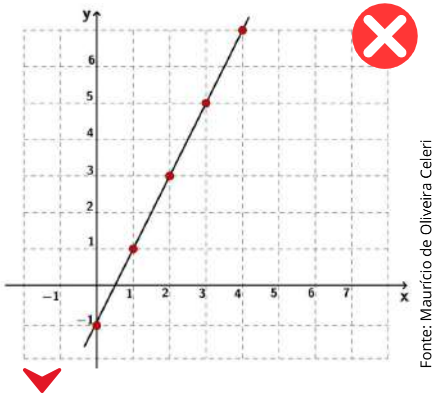
Portanto, a alternativa correta é a alternativa **B)**.

Perceba que, neste caso, os valores formaram uma progressão aritmética de razão 2. Isso não foi mera sorte, a função f(n) = 2n -1, com domínio natural, gerou uma progressão aritmética, sendo que n estabelece uma relação de posição do termo da PA.

Um cuidado que deve-se ter ao desenhar o gráfico de uma função de domínio natural é ao marcar a reta. Ela não deve ser contínua ligando os pontos, já que o conjunto que desejamos (naturais) é discreto.



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

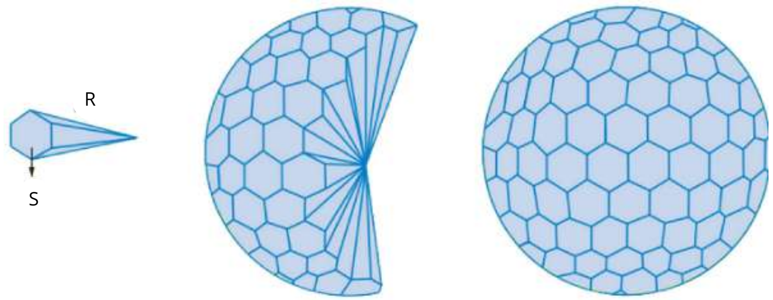
Este gráfico só estaria correto se representasse um função real.

Prezada Professora, Prezado Professor,

- as análises gráficas discutidas na seção "A função polinomial de 1º grau" podem ser realizadas no GeoGebra, por meio de construções e questionamentos que permitam ao(à) aluno(a) fazer comparativos e levantar hipóteses. É importante, contudo, ao final desse processo, fazer uma síntese trazendo as conclusões;
- na relação entre a função de 1º grau e progressão aritmética cabe frisar que o n funciona como um contador para gerar a progressão.

Assim, podemos admitir que a medida de volume da esfera é equivalente à soma das medidas de volume de todas essas "pirâmides" de bases minúsculas.

Observe a ilustração abaixo:



DOLCE; POMPEO, 2013.

Sendo S a medida de área da base de uma dessas pirâmides, a medida do seu volume é dada por

$$V = \frac{Sh}{3} = \frac{SR}{3}.$$

Considerando que temos n pirâmides com áreas de base iguais a $S_1, S_2, \cdots, S_n$, então a área da superfície da esfera (A) é igual a

$$A = S_1 + S_2 + \cdots + S_n.$$

Da mesma forma, o volume da esfera (E) é igual a

$$E = \frac{S_1 R}{3} + \frac{S_2 R}{3} + \cdots + \frac{S_n R}{3} = \frac{R}{3}\underbrace{(S_1 + S_2 + \cdots + S_n)}_{A} = \frac{R}{3}A.$$

Como já vimos o volume da esfera (E), podemos substituí-lo na equação acima. Logo,

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{R}{3}A \Rightarrow A = \frac{3 \cdot 4\pi R^3}{3R} = 4\pi R^2.$$

Portanto, a área da superfície da esfera é

$$\boxed{A = 4\pi R^2.}$$

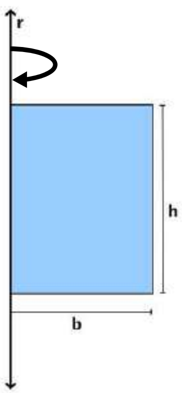
Prezada Professora, Prezado Professor,

Nesta sessão em que tratamos da esfera, a apresentação da ideia de cálculo do volume via Princípio de Cavalieri foi omitida para dar espaço a uma perspectiva histórica e mostrar, assim, outras abordagens. Da mesma forma, por demandar de ferramentas mais avançadas, a justificativa da área da superfície esférica foi conduzida de forma intuitiva.

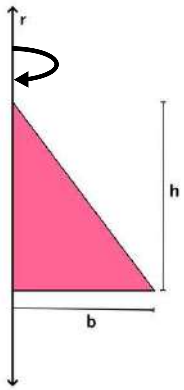
CORPOS REDONDOS COMO SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Alguns sólidos podem ser obtidos a partir da rotação de uma superfície plana ao redor de um eixo (reta). Esses sólidos são chamados de sólido de revolução.

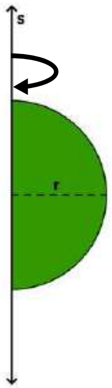
Alguns exemplos de sólidos de revolução são o cilindro, cone e esfera. Veja abaixo:



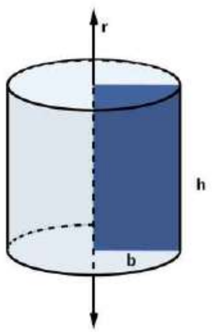
Retângulo gerando um cilindro.

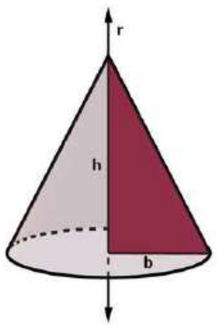


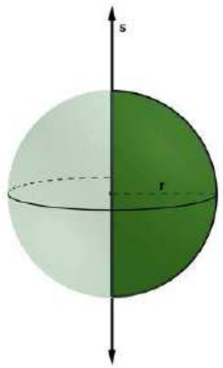
Triângulo retângulo gerando um cone.



Semicírculo gerando uma esfera.







Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

A FUNÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU E AS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

À primeira vista pode não parecer, mas as funções do primeiro grau e as progressões aritméticas têm muito em comum.

Antes de falarmos desta relação, vamos fazer um pequeno apanhado sobre a progressão aritmética:

O QUE É UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA?
Progressão aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela adição do termo anterior a uma constante r, chamada de razão da progressão.

TERMO GERAL

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

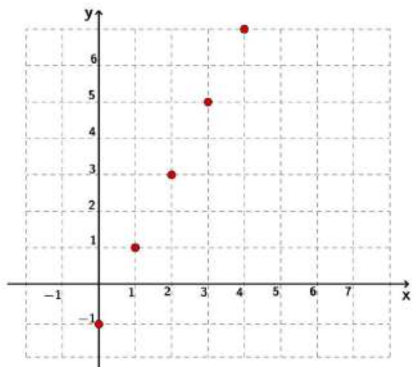
a_n : é o n-ésimo termo
a_1 : primeiro termo
n : ordem do termo
r : razão

Já vimos que a função do primeiro grau é uma função do tipo
$$f(x) = ax + b.$$
Sabe-se que x um número qualquer. Mas, o que acontece se x for um número natural? Vejamos um exemplo:

1 Considere a função abaixo
$$f(x) = 2x - 1.$$
Como estamos interessados na relação entre a função polinomial do primeiro grau e a progressão aritmética, vamos fazer x assumir apenas valores naturais. Assim, podemos definir a função f(n):
$$f(n) = 2n - 1.$$
Vamos determinar os valores de f para os primeiros 5 naturais e desenhar seu gráfico:

n	f(n)
0	-1
1	1
2	3
3	5
4	7

$(-1, 1, 2, 3, 5, \cdots)$
+2 +2 +2 +2

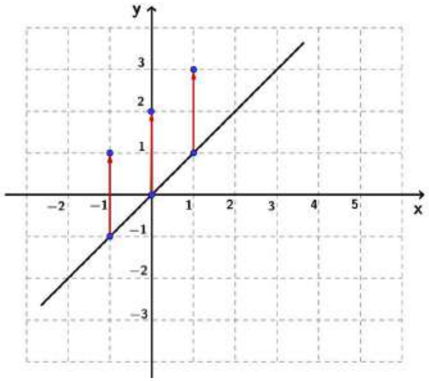


Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

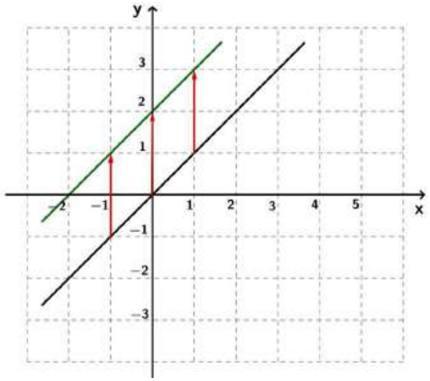
Vamos construir o gráfico de $f(x) = x + 2$.

1. A partir do gráfico de f(x)=x, transladamos 2 unidades para cima em todos os pontos:

2. Com isso obtemos o gráfico da função pedida:

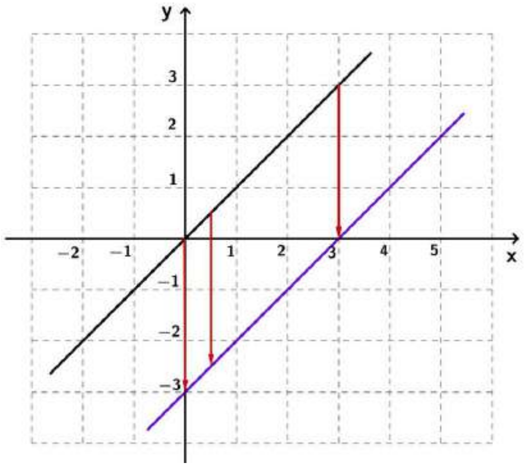


Fonte: Maurício de Oliveira Celeri



● $f(x) = x$ ● $f(x) = x + 2$

Observe a obtenção do gráfico de $f(x) = x - 3$:

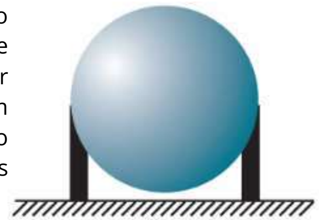


Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

● $f(x) = x$ ● $f(x) = x - 3$

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1 (Dante e Viana, 2020). Um reservatório de formato esférico (figura ao lado) tem 9 m de medida de comprimento do raio. Para encher totalmente esse reservatório, é necessário um intervalo de tempo de 20 horas. Nessas condições, o reservatório recebe água na razão de quantos metros cúbicos por hora (m³/h)? (Use π=3,14)



Solução. Inicialmente devemos determinar o volume da esfera:

$$V = \frac{4\pi \cdot 9^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 9 \cdot 9^2}{3} = 4\pi \cdot 3 \cdot 81 = 972\pi \ m^3.$$

Como foram gastas 20 horas para encher totalmente o reservatório, então basta dividir o volume desse reservatório pelo tempo gasto:

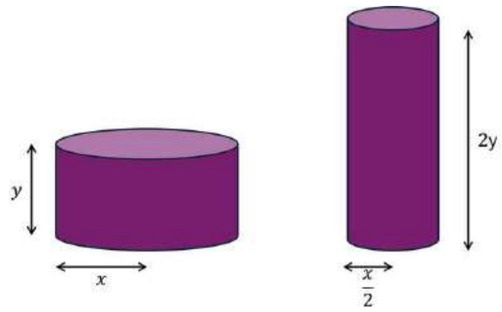
$$\frac{972\pi}{20} = 48,6\pi \ m^3/h.$$

Como π=3,14, temos

$$48,6\pi \, m^3/h = 48,6{\cdot}3,14 \, m^3/h = 152,604 \, m^3/h$$

Assim, o reservatório recebe água a uma razão de 152,604 m³/h.

Exercício 2 (Dante e Viana, 2020). A polpa de açaí é vendida em dois tipos de embalagens cilíndricas. Uma delas (figura I) tem raio da base com medida de comprimento x cm e altura com medida de comprimento y cm. A outra (figura II) tem raio da base com medida de comprimento $\frac{x}{2}$ cm e altura com medida de comprimento 2y cm. A primeira delas é vendida por R$ 16,00 e a segunda, por R$ 10,00. Qual das duas embalagens é mais vantajoso comprar?



Solução. Para determinar qual a mais vantajosa devemos saber a capacidade e o valor de cada embalagem. Após isso, dividimos essas duas grandezas e a embalagem que apresentar menor valor por cm³ será a mais vantajosa.
Como o valor de cada embalagem já está definido no problema, vamos calcular o volume de cada uma dessas embalagens:

$$V_I = \pi x^2 y \ \ cm^3$$

$$V_{II} = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 2y = \pi \frac{x^2}{4} 2y = \frac{\pi x^2 y}{2} \ \ cm^3$$

Agora, vamos determinar o custo por cada cm³. Para isso, basta dividir o valor de comercialização de cada embalagem por seu respectivo volume:

$$\textbf{I:} \quad \frac{R\$16,00}{\pi x^2 y \ \ cm^3}$$

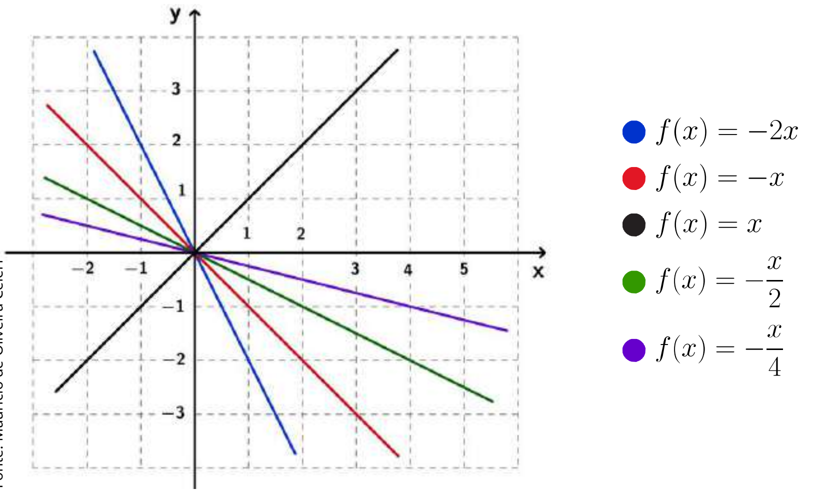
$$\textbf{II:} \quad \frac{R\$10,00}{\frac{\pi x^2 y}{2} cm^3} = \frac{R\$20,00}{\pi x^2 y \ \ cm^3}$$

Observe que o denominador de ambas é o mesmo, portanto, a embalagem mais vantajosa é a que apresentar, na razão acima, o menor numerador: Embalagem I.

Prezada Professora, Prezado Professor,

uma outra possibilidade que pode ser considerada para resolver este problema é atribuir um valor para x e um valor para y, a fim de determinar uma medida de capacidade para cada embalagem e realizar o comparativo entre o custo por metro cúbico.

É possível perceber que, se a>0, quanto maior seu valor, mais inclinada se torna a reta.
Mas, o que acontece caso a<0? Veja abaixo.



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

Podemos fazer algumas observações:

- quando o valor de **a** é negativo a função passa a ser decrescente;
- quanto maior o valor absoluto de **a**, mais inclinada tende a ser a reta (como já observamos), porém decrescente;
- podemos descrever essa mudança como uma reflexão em torno do eixo x com a mesma função fazendo a alteração do sinal de a, por exemplo, as funções $f(x) = x$ e $f(x) = -x$, são obtidas uma da outra por uma reflexão em torno do eixo x.

Visto o efeito das alterações no coeficiente angular da função, passaremos para o estudo dos efeitos da variação do coeficiente linear **b**:

$$f(x) = ax + b.$$

Dos nossos estudos anteriores, sabemos que o valor de **b** representa a interseção da função com o eixo y. Mas, como isso acontece?

Do ponto de vista geométrico, somar **b** tem o mesmo significado que transladar os pontos do gráfico em **|b|** unidades. O sinal de **b** representa o sentido da translação:

- se b>0, então translada-se **|b|** unidade no sentido do eixo y;
- se b<0, então translada-se **|b|** unidade no sentido oposto ao do eixo y.

De forma simplificada, se b>0, o gráfico "sobe" |b| unidades, se b<0, o gráfico "desce" |b| unidades.

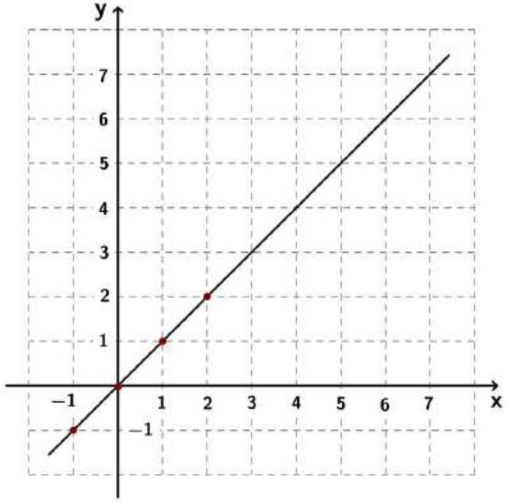
Observe o processo na ilustração a seguir:

Considere a seguinte função:

$$f(x) = x.$$

Podemos, então, criar uma tabela relacionando alguns valores das variáveis x e y e, a partir dela, construir seu gráfico:

x	y=f(x)	(x, y)
-1	-1	(-1, -1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)

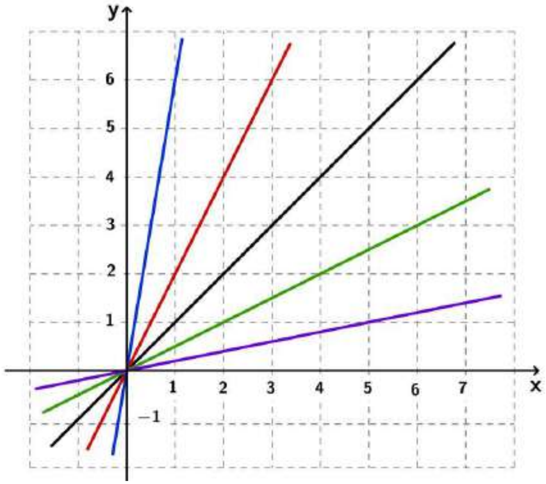


Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

Construiremos o gráfico das demais funções polinomiais de primeiro grau a partir desta, em uma sequência de transformação.
A primeira transformação que faremos é multiplicar a função por uma número **a** diferente de zero:

$$f(x) = ax.$$

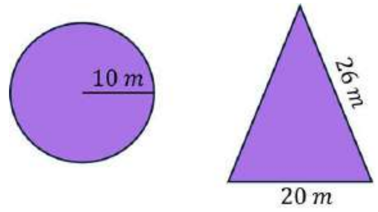
A multiplicação por **a** causa uma mudança na inclinação da reta, observe os gráficos abaixo e compare-os:



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

- $f(x) = 6x$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = x$
- $f(x) = \frac{x}{2}$
- $f(x) = \frac{x}{5}$

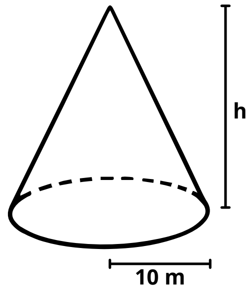
Exercício 3 (Adaptado de Dante e Viana, 2020). Carina observou o projeto de um silo:

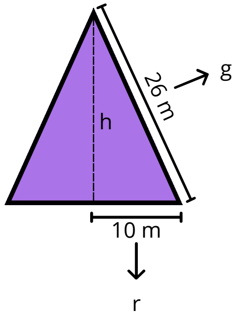


Vista superior **Vista lateral**

Com essas informações, Carina calculou a medida de volume do silo e a quantidade de material (em m²) necessário para fabricá-lo. Quais foram as medidas obtidas por ela?

Solução. De acordo com as vistas fornecidas, temos que o silo tem a forma de um cone de 10 m de raio da base e altura h ainda indeterminada (figura ao lado). Além disso, sabemos que sua geratriz mede 26 m.
Para calcular o volume deste silo, devemos calcular o volume do cone, mas antes devemos determinar a medida da sua altura: observando a vista lateral podemos definir um triângulo retângulo cuja altura é congruente à altura do cone. Observe abaixo:





Para calcular h usaremos o Teorema de Pitágoras:

$$26^2 = 10^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576$$
$$h = \sqrt{576} = 24m.$$

De posse do valor da altura, podemos calcular o volume do silo:

$$V_{Silo} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 24}{3} = 100 \cdot 8 \cdot \pi = 800\pi\ m^3.$$

Precisamos calcular ainda a quantidade de material, em m², necessário para produzi-lo:

$$A_{Silo} = \pi r\,(r+g) = \pi \cdot 10 \cdot (10+26) = 360\pi\ m^2.$$

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 5 (Geometria) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
   - p. 108-137.
2. **Volume 2 (Geometria Plana e Espacial) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
   - p. 98-104.; p. 113-119; p. 124-132.

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

A atividade de sólido de revolução do *Khan Academy* apresenta questões para visualização dos sólidos de revolução.

SUGESTÃO DE LEITURA

Sugerimos a leitura do artigo "História da matemática como recurso metodológico: sobre a compreensão do volume da esfera com Arquimedes", publicado na **Revista História da Matemática para Professores**.

Outros artigos publicados na Revista podem servir de elementos de estudo para o professor em outros momentos.

SUGESTÃO DE LEITURA

Para aprofundamento sobre os sólidos de revolução pode ser usado o produto educacional de Ana Lúcia Vaghetti Pinheiro do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional: **Estudo dos Sólidos de Revolução com Ênfase nos Corpos Redondos – Concepções de uma Sequência Didática**.

A FUNÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU

Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é chamada função polinomial do primeiro grau quando existem números reais a e b, com a≠0, tal que

$$f(x) = ax + b.$$

Os números a e b são chamados de **coeficiente angular** e **coeficiente linear**, respectivamente.

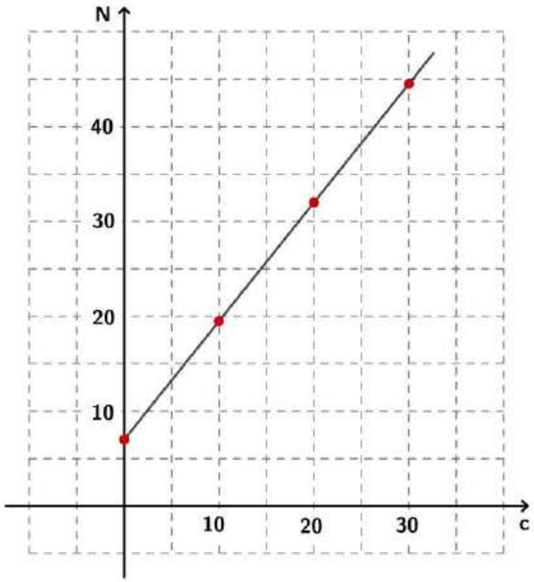
Uma aplicação curiosa da função polinomial do primeiro grau é a relação entre o número do sapato (N) e a medida do comprimento do pé (c), em centímetros:

$$N = \frac{5c+28}{4} = \frac{5}{4}c + 7 = 1,25c + 7.$$

Assim, se a medida do comprimento do pé de uma pessoa é 24 cm, então ela deve calçar sapatos número 37, pois

$$N = \frac{5\cdot 24+28}{4} = \frac{5}{4}\cdot 24 + 7 = 5\cdot 6 + 7 = 37.$$

Perceba também, conforme vimos na sessão anterior, que essas duas grandezas são não proporcionais. Observe o gráfico que representa N em função de c:



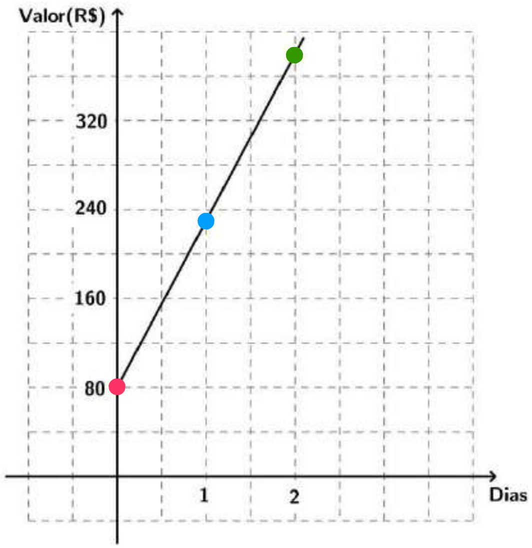
Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

Podemos notar que a relação entre as grandezas N e c são não proporcionais pelo fato do gráfico não passar pela origem.

No entanto, nosso interesse aqui é descrever como obter o gráfico da função de primeiro grau. Para isso, iniciaremos com o estudo de uma função simples: a função identidade!

3

Dias	0	1	2
Valor (R$)	80	230	380



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

Como você pode notar, as relações proporcionais foram representadas por retas que passam pela origem do sistema cartesiano (0, 0), enquanto a relação não proporcional não passa por este ponto.

Não é mera coincidência, voltemos na relação inicial para grandezas diretamente proporcionais,

$$\frac{y}{x} = k \Rightarrow y = kx.$$

Se você se recordar, esta é a forma de uma **função linear**. Para cada um dos exemplos acima podemos descrever uma função que representa a relação entre as grandezas envolvidas:

1

$t = 6{,}25a$

t: tempo
a: andar

2

$d = 10l$

d: distância
l: quantidade de litros de combustível

3

$v = 80 + 150d$

v: valor pago
d: números de dias trabalhados

Em todos os casos, as funções que descrevem os eventos são funções de primeiro grau, nosso próximo objeto de estudo.

Atividades

ATIVIDADE 1

(Enem 2015) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m³ de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

A) 0,5
B) 2,0
C) 3,0
D) 3,5
E) 8,0

Utilize: $\pi = 3$

ATIVIDADE 2

Um engenheiro químico está projetando um tanque cilíndrico para armazenar um novo tipo de combustível. As medidas internas do tanque indicam que o raio da base é de 6 metros e a altura é de 15 metros. No entanto, devido a normas de segurança, o tanque só pode ser ocupado até 95% da sua capacidade total. O engenheiro precisa calcular o volume útil do tanque, ou seja, a quantidade máxima de combustível que pode ser armazenada sem ultrapassar esse limite. Pode-se afirmar que, o volume útil desse tanque será de:

A)138 π m³
B) 312 π m³
C) 397 π m³
D) 513 π m³
E) 540 π m³

ATIVIDADE 3

Em uma escola os alunos decidiram criar um projeto de jardinagem para promover a conscientização sobre alimentação saudável e sustentabilidade. Para isso, eles criaram um recipiente para compostagem, com o formato de um cilindro reto, usando tela, com o objetivo de transformar resíduos orgânicos em adubo. Esse recipiente cilíndrico terá raio medindo 30 cm, e altura 1,5 metros.

Fonte: https://www.assimquefaz.com/13-maneiras-criativas-de-fazer-caixa-de-compostagem/

Para a construção desse recipiente cilíndrico, serão necessários, aproximadamente:

A) 2,78 m² de tela
B) 2,83 m² de tela
C) 2,95 m² de tela
D) 3,02 m² de tela
E) 3,38 m² de tela

Utilize: π = 3,14

ATIVIDADE 4

Uma organização ambiental está promovendo uma campanha de conscientização sobre a poluição dos oceanos. Para isso, eles decidiram criar uma grande esfera inflável, representando um globo terrestre, simbolizando a importância da preservação dos oceanos e da biodiversidade. A esfera terá diâmetro medindo 2 metros e será toda pintada de azul. Sabendo que 1 litro de tinta pode cobrir 7 m² e que cada lata contém 750 ml, quantas latas de tinta serão necessárias para pintar toda a superfície da esfera?

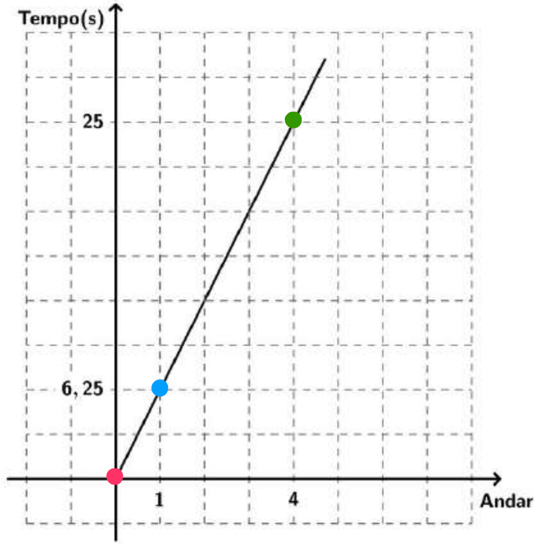
A) 2 latas
B) 3 latas
C) 4 latas
D) 5 latas
E) 6 latas

Utilize: π = 3,14

Podemos representar essas relações em um gráfico, observe a seguir os gráficos que representam as situações acima.

1

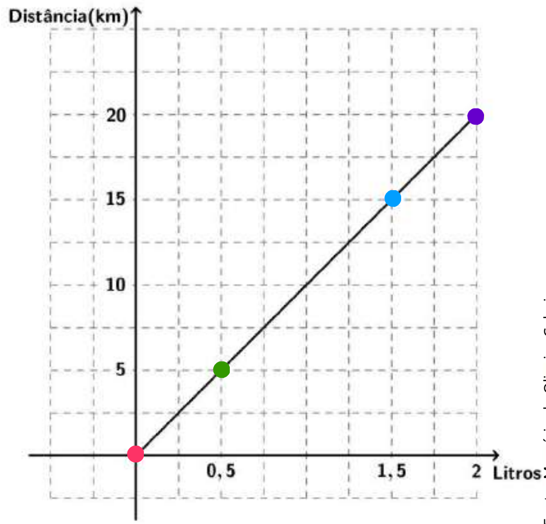
Andar	0	1	4
Tempo	0 s	6,25 s	25 s



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

2

Distância (km)	0	15	5	20
Gasto (l)	0	1,5	0,5	2



Fonte: Maurício de Oliveira Celeri

Dizemos que duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre a medida y de uma e a correspondente x da outra (x≠0) for constante e diferente de zero (chamada de constante de proporcionalidade):

$$\frac{y}{x} = k.$$

Vejamos alguns exemplos:

1 A seguinte tabela representa o número de minutos que um elevador de um prédio demora a alcançar três andares diferentes.

Andar	1	4	8
Tempo	6,25 s	25 s	50 s

Fazendo a divisão de cada tempo pelo respectivo andar obtemos:

Andar	1	4	8
Tempo	6,25 s	25 s	50 s

$$\frac{6,25}{1} = 6,25 \qquad \frac{25}{4} = 6,25 \qquad \frac{50}{8} = 6,25$$

Como todas as divisões resultam no mesmo valor, as grandezas (andar e tempo) são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é k=6,25. Isso quer dizer que o deslocamento do elevador entre os andares é de 6,25 segundos.

2 Marcos mediu o consumo de combustível de seu carro. Ele registrou as seguintes medidas:

Distância (km)	15	5	20
Gasto (l)	1,5	0,5	2

Se tomarmos por base a última medição, observamos que o carro de Marcos tem o desempenho de 10 km por litro de combustível. Realmente esse é o desempenho e a relação é proporcional: para 1,5 l de combustível, o carro deve fazer 1,5·10=15 km e para 0,5 l, 0,5·10=5 km, ambas coincidem com os registro de Marcos.
Neste caso dizemos que a constante de proporcionalidade é 10 (o desempenho do carro).

3 Camila contratou um pedreiro que faz a cobrança de seu serviço da seguinte forma: para avaliar a obra ele cobra R$ 80,00 e adiciona R$ 150,00 por dia de trabalho. Assim, para 1 dia de serviço, Camila deverá pagar R$ 230,00 e para 4 dias de serviço R$ 680,00. Observe que

$$\frac{230}{1} = 230 \neq 170 = \frac{680}{4}.$$

Portanto, as grandezas aqui (dias de trabalho e valor a pagar) **não** são proporcionais.

ATIVIDADE 5

Um produtor rural possui dois silos para armazenar soja, ambos com as mesmas dimensões internas. Cada silo tem a forma de um cilindro com um cone na parte superior, conforme a imagem.

Fonte: https://blog.aegro.com.br/armazenagem-de-graos/

A parte cilíndrica possui raio de 8 metros e altura de 24 metros; o raio do cone também é de 8 metros, mas sua altura mede 4 metros. Ambos os silos estão completamente cheios. Sabendo que 1 m³ de soja equivale a 770 kg e que 1 saca de soja pesa 60 kg, o valor estimado da quantidade total de soja armazenada nos dois silos, considerando que o preço da saca é R$ 132,02, é de:

A) R$ 10,6 milhões.
B) R$ 12,1 milhões.
C) R$ 14,9 milhões.
D) R$ 16,4 milhões.
E) R$ 18,2 milhões.

Utilize:
π = 3

ATIVIDADE 6

Um cilindro e um cone possuem a mesma base e a mesma altura. A relação, em porcentagem, entre o volume do cilindro e o volume do cone é de:

A) 33%
B) 66%
C) 133%
D) 266%
E) 300%

ATIVIDADE 7

Uma indústria de autopeças está desenvolvendo um novo sistema de amortecedores para carros. O sistema consiste em um cilindro de altura 30 cm e diâmetro de 16 cm, contendo uma esfera maciça de borracha de 15,8 cm de diâmetro que desliza internamente, lubrificada por um tipo específico de óleo. Considerando o espaço ocupado pela esfera, qual a quantidade aproximada de óleo, em litros, necessária para preencher o cilindro?

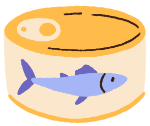
Utilize:
$\pi = 3$
1 litro = 1 000 cm³

ATIVIDADE 8

Uma fábrica de alimentos está projetando um rótulo para suas latas de atum. Cada lata tem a forma de um cilindro com as seguintes dimensões:

- Diâmetro da base: 8,4 cm
- Altura: 3 cm

Sabendo que o rótulo deve cobrir apenas a superfície lateral da lata, qual será a medida da área desse rotulo?

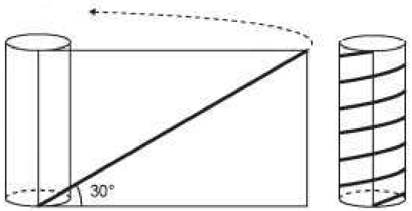


Design: Goodstudio / Fonte: Canva

Utilize:
$\pi = 3$

ATIVIDADE 9

(Enem 2018 - Adaptada) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $\frac{6}{\pi}$, e ao enrolar a faixa, obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura. Determine a medida da altura do cilindro, em centímetros.



Utilize:
sen 30° = 0,50
cos 30° = 0,87
tg 30° = 0,58

Conceitos e Conteúdos

RELAÇÕES DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Considere as seguintes situações:

1 O coco verde é comercializado a R$ 5,99 a unidade. Assim, se uma pessoa comprar dois cocos, ela pagará R$ 11,98. Da mesma forma, se uma pessoa comprar 10 cocos ela pagará R$ 59,90.

2 Na primeira semana de janeiro de 2025 o preço da gasolina foi, em média, R$ 6,15. Assim, para abastecer 10 litros, seria necessário pagar R$ 61,50. Para abastecer 50 litros, a conta seria de R$ 307,50.

3 Na loja de Carlos as mochilas estavam em promoção devido ao período de volta às aulas. A promoção dava um desconto progressivo à medida que o cliente comprasse mais unidades do produto. Veja a tabela de preços:

Quantidade	1	2	3	4	5 ou mais
Valor	R$ 110	R$200	R$ 270	R$ 320	R$ 75 cada

O que há de semelhanças e diferenças entre as situações acima?

- Nas situações **1** e **2** para descobrir o valor a ser pago basta multiplicar a quantidade de cocos e de litros de gasolina por R$ 5,99 e R$ 6,15, respectivamente.
- Na situação **3** essa regra **não é sempre verdade**. Caso o cliente deseje comprar 3 mochilas, o valor a ser pago deveria ser R$ 330,00; no entanto, devido à promoção, o valor a ser pago é R$ 270,00. Somente se o cliente comprar 5 ou mais mochilas a relação se torna proporcional: para comprar *n* mochilas ($n \geq 5$) basta multiplicar n por R$ 75,00, já que cada mochila custa R$ 75,00.

Em resumo, dizemos que as situações 1 e 2 apresentam **grandezas diretamente proporcionais**, enquanto a situação 3 não apresenta uma relação de **proporcionalidade** em todos os casos.

! A situação 3 apresenta grandezas diretamente proporcionais apenas para uma situação de compra de 5 ou mais mochilas.

Contextualização

Nas últimas semanas demos uma atenção especial para o estudo da geometria. A partir desta semana, iniciaremos o estudo das funções.

Funções são elementos matemáticos desenvolvidos com intuito de abstrair situações do mundo real e permitir uma compreensão matemática dos fenômenos de maneira clara e objetiva.

Iniciaremos agora com o estudo da função do primeiro grau. Essa classe de funções representa a base para diversos conceitos, como escalas, conversão de unidades e leis da Física.

Por exemplo: na Física, as funções de primeiro grau descrevem o movimento uniforme, onde a posição de um objeto varia linearmente com o tempo e nas conversões de unidades, como a transformação de Celsius para Fahrenheit. Na Química, elas são usadas para fazer balanceamento de equações.

No cotidiano, quando você vai ao mercado e calcula o valor total das compras de hortifruti com base no peso, está utilizando uma relação proporcional, que é representada por uma função de primeiro grau.

Nesta semana, estudaremos as relações proporcionais e como elas se associam com a função do primeiro grau. Veremos também como obter o gráfico da função de primeiro grau e qual sua relação com as progressões geométricas.

Bons estudos!


Design: Getty Images Siganture / Fonte: Canva

A equação do movimento uniforme na física.


Design: Pexels / Fonte: Canva

O balanceamento de reações químicas.


Design: Snap Sketch Design / Fonte: Canva

O valor pago por comprar em hortifruti.

ATIVIDADE 10

Um laboratório de química está realizando um experimento que envolve o uso de mercúrio, um líquido denso e pesado, para medir a pressão em um sistema fechado. Para isso, os cientistas precisam encher completamente um vaso cilíndrico com mercúrio. O vaso possui as seguintes dimensões internas:

- Raio: 6 cm
- Altura: 18 cm

Sabendo que a densidade do mercúrio é de 13,6 g/cm³, os pesquisadores precisam calcular a massa total de mercúrio necessária para encher o vaso. Dessa forma, determine o valor aproximado da massa de mercúrio, em quilogramas, necessária para encher completamente o vaso cilíndrico.

Utilize:
π = 3,14

$$densidade = \frac{massa}{volume}$$

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: geometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em Contextos**: geometria plana e espacial. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

DOCE, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LAUNAY, M. A Fascinante História da Matemática: da pré-história aos dias de hoje. Trad. Clóvis Marques. 2. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2021.

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de**. Prisma matemática:** geometria e trigonometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DOCE, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 10:** geometria espacial, posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2015 - Exame Nacional do Ensino Médio 2015:** 2º dia. Brasília: INEP, 2011. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/2015_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 09 mar. 2025.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2018 - Exame Nacional do Ensino Médio 2018:** 2º dia. Brasília: INEP, 2016. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf. Acesso em: 09 mar. 2025.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL — GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT302 Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	• Interpretar situações que envolvem proporcionalidade direta em contextos matemáticos e em outras áreas do conhecimento, expressando algebricamente essa relação por meio de uma função linear. • Construir gráficos de funções polinomiais do 1º a partir de translações e reflexões aplicadas em funções elementares [f(x) = a.x] com ou sem o uso de softwares. • Modelar situações em contextos diversos por funções polinomiais do 1º grau, da linguagem verbal para a linguagem algébrica e geométrica e vice-versa. • Resolver situações-problema envolvendo funções polinomiais do 1º grau. • Corresponder os termos de uma sequência numérica (PA) com a expressão de uma função polinomial de 1º grau de mesmo domínio que a progressão aritmética.	• **D086_M** Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela. • **D071_M** Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos. • **D078_M** Corresponder uma função polinomial do 1º grau a seu gráfico. • **D145_M** Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau por meio de seus coeficientes. • **D132_M** Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau. • **D096_M** Utilizar propriedades de progressões aritméticas na resolução de problemas.