GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL — GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

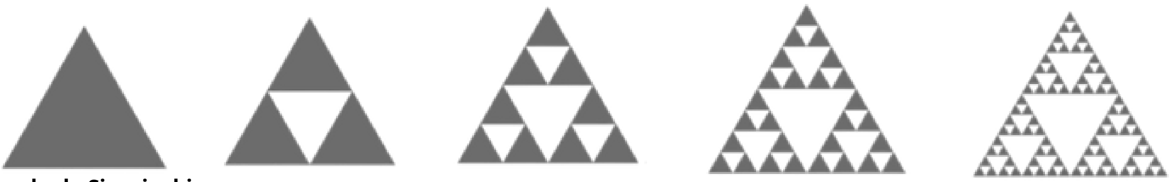
MATEMÁTICA

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT403 Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.	• Identificar a regularidade existente em sequências numéricas ou de figuras, em que, por recursão, cada termo a partir do segundo é obtido pelo produto do anterior por um fator constante. • Identificar a regularidade que permite a dedução do Termo Geral de Uma Progressão Geométrica. • Corresponder os termos de uma Progressão Geométrica à expressão de uma função exponencial. • Resolver problemas envolvendo Progressões Geométricas.	**D097_M** Utilizar propriedades de progressões geométricas na resolução de problemas.

Contextualização

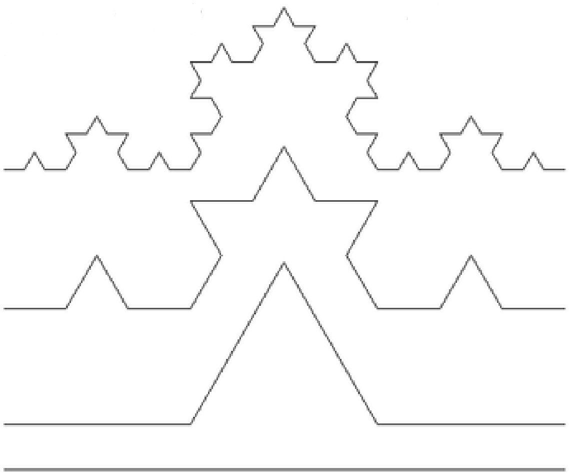
Você deve se recordar da nossa 10ª quinzena de estudos onde vimos alguns fractais, como, por exemplo, o triângulo de Sierpinski.



Triângulo de Sierpinski
Disponível em: https://abrir.link/HirqN. Acesso em 27 de janeiro de 2025.

Note que, em um primeiro momento, temos 1 triângulo cinza; depois, 3 triângulos cinzas; depois, 9 triângulos cinzas; 27 triângulos cinzas; e 81 triângulos cinzas. Observe que a cada passo, multiplicamos o número de triângulos cinzas da posição anterior por 3.

Um outro fractal observado foi a Curva de Koch:



Curva de Koch
Disponível em: https://abrir.link/bqKtL. Acesso em 27 de janeiro de 2025.

Na base temos um único segmento, em seguida passamos para 4 segmentos, depois para 16 segmentos e, na sequência, para 64 segmentos. Note que a cada passo multiplicamos o número de segmentos da posição anterior por 4.

Na Matemática, esse tipo de padrão é chamado de Progressão Geométrica e será nosso objeto de estudos nessa semana.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Progressão geométrica (PG) é toda sequência de números não nulos na qual o quociente entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior, é constante. Esse quociente constante é chamado **razão da progressão** e é representado pela letra *q*.

Vejamos as sequências descritas na contextualização:

1 $(1, 3, 9, 27, 81)$

Esta sequência de termos é uma progressão geométrica, pois $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = 3.$

Portanto, sua razão é q=3.

2 $(1, 4, 16, 64)$

Esta sequência de termos é uma progressão geométrica, pois $\frac{4}{1} = \frac{16}{4} = \frac{64}{16} = 4.$

Portanto, sua razão é q=4.

Por outro lado, as sequências abaixo não são progressões geométricas:

3 $(4, 8, 16, 48)$

Observe que $\frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2 \text{ e } \frac{48}{16} = 3.$ Como a divisão entre os termos consecutivos não é constante, essa sequência não pode ser classificada como uma PG.

4 $(5, -20, 80, -320, 640)$

Efetuando as divisões entre termos consecutivos, temos:

$$\frac{-20}{5} = \frac{80}{-20} = \frac{-320}{80} = -4 \text{ e } \frac{640}{-320} = -2.$$

Da mesma forma como a sequência anterior, a divisão entre os termos consecutivos não é constante. Logo, essa sequência não pode ser classificada como uma PG.

Representação da PG

Representamos uma PG pela sequência:

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \cdots)$$

em que a_n é o n-ésimo termo da PG.

Classificação da PG

Considerando o primeiro termo (a_1) e o valor da razão (q), podemos classificar uma PG como crescente, decrescente, oscilante ou constante.

- **Crescente:** Se cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior:

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ q > 1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a_1 < 0 \\ 0 < q < 1 \end{cases}.$$

- **Decrescente:** Se cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior:

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ 0 < q < 1 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a_1 < 0 \\ q > 1 \end{cases}.$$

- **Constante:** se todos os termos são iguais, isto é, quando $q = 1$.
- **Oscilante (Alternada) :** se a_1 é diferente de zero e todos os termos são alternadamente positivos e negativos, isto é, quando $q < 0$.

Vamos classificar as seguintes sequências:

1. $(1, 2, 4, 8)$

   Note que, a partir do segundo termo, cada termo é maior que o anterior, portanto, a PG é crescente. Observe que: $a_1 = 1 > 0$ e $q = 2 > 0$.

2. $(3, 3, 3, 3)$

   Note que todos os termos são iguais, portanto, a PG é constante. Observe que: $q = 1$.

3. $\left(-\frac{1}{2}, -1, -2, -4\right)$

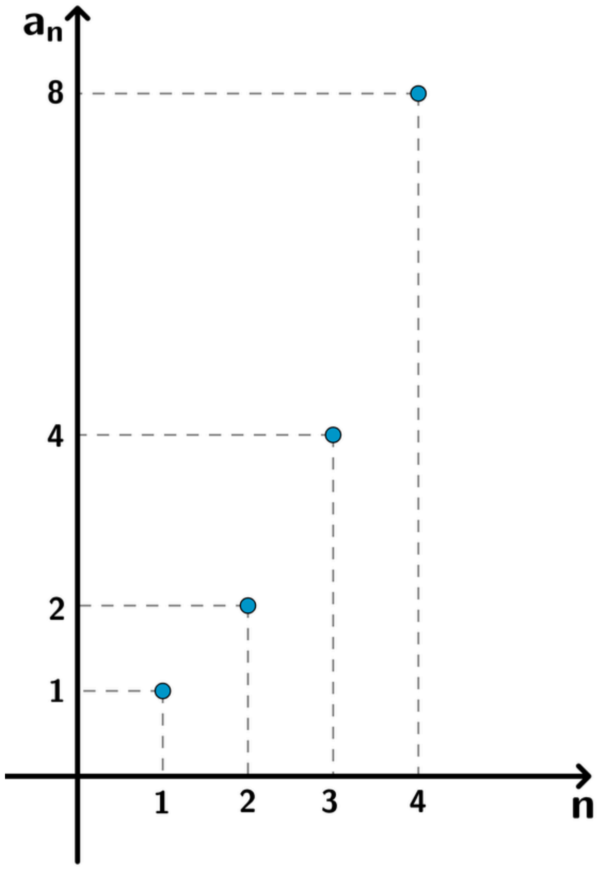
   Note que, a partir do segundo termo, cada termo é menor que o anterior, portanto, a PG é decrescente. Observe que: $a_1 = -\frac{1}{2} < 0$ e $q = 2 > 0$.

4. $(8, -4, 2, -1)$

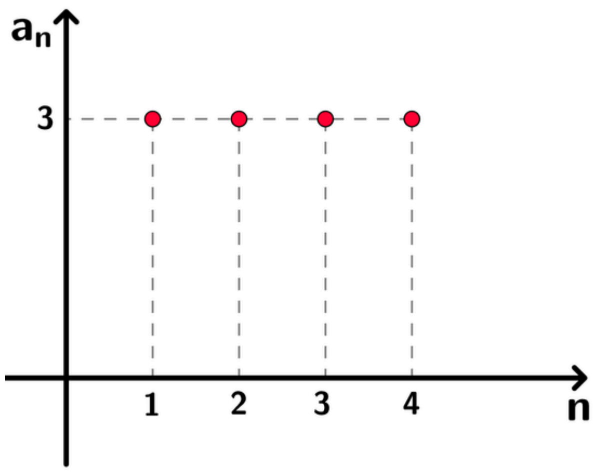
   Note que os termos ficam alternando entre valores positivos e negativos, portanto, a PG é oscilante. Observe que: $q = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} < 0$.

Podemos representar essas progressões geométricas graficamente:

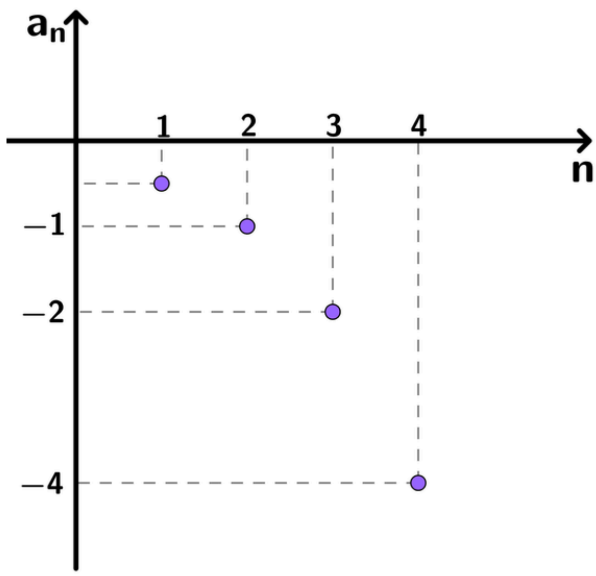
① $(1, 2, 4, 8)$



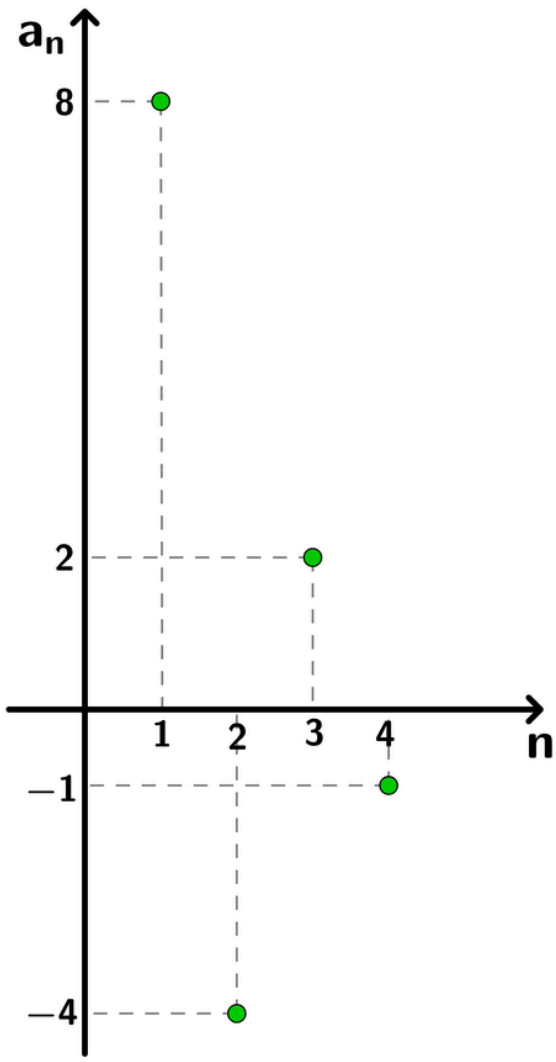
② $(3, 3, 3, 3)$



③ $\left(-\frac{1}{2}, -1, -2, -4\right)$



④ $(8, -4, 2, -1)$



Termo Geral da PG

Considere uma PG de primeiro termo a_1 e razão q. Podemos obter os demais termos dessa PG fazendo a multiplicação do termo anterior pela razão:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q \\ a_4 = a_3 \cdot q \\ \quad\vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{cases}$$

É possível, ainda, reescrever todos os termos, a partir do segundo, em função do primeiro termo. Observe o processo abaixo:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = {\color{red}a_2} \cdot q = {\color{red}a_1 \cdot q} \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = {\color{red}a_3} \cdot q = {\color{red}a_1 \cdot q^2} \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = {\color{red}a_4} \cdot q = {\color{red}a_1 \cdot q^3} \cdot q = a_1 \cdot q^4$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Desse modo, um termo qualquer de índice n da sequência, chamado de termo geral da PG, é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ com } n \geq 1.$$

Assim, por exemplo, no Triângulo de Sierpinski, onde $a_1 = 1$ e $q = 3$, temos que a 8ª figura terá $a_8 = 1 \cdot 3^{8-1} = 3^7$ triângulos.

Prezada Professora, Prezado Professor,

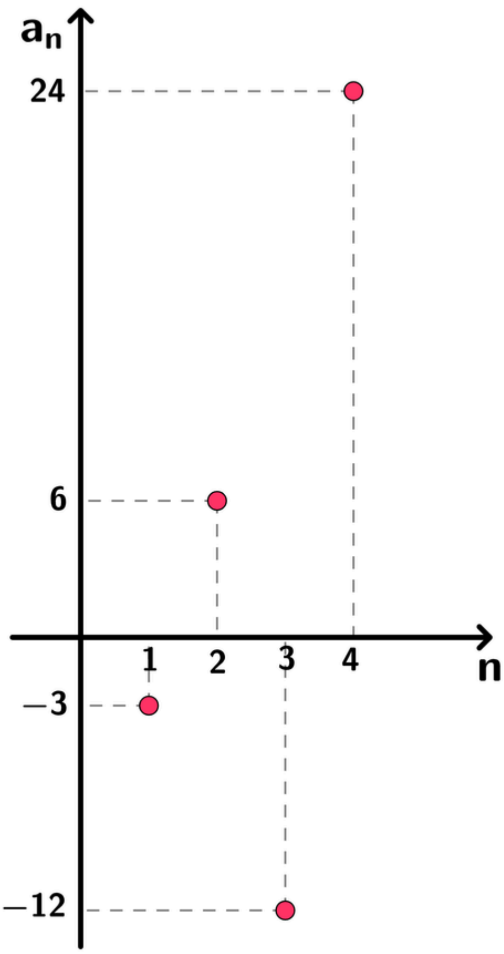
as expectativas de aprendizagem desta semana não abrangem a soma dos termos de uma PG, no entanto, caso julgue necessário e houver tempo, o conteúdo pode ser conduzido com base nos livros didáticos nos volumes e páginas indicadas na sessão “material extra”.

Exercícios Resolvidos

Exercício 1. Ao lado temos representada graficamente um PG.

a) Determine a razão desta PG.

b) Determine o 7º termo dessa PG.



Solução. Podemos escrever a PG representada ao lado da seguinte forma:

$$(-3, 6, -12, 24)$$

a) Como temos uma PG, para determinarmos sua razão basta fazer o quociente de dois termos consecutivos:

$$q = \frac{6}{-3} = -2.$$

b) Dado o resultado do item a), temos

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ q = -2 \end{cases}.$$

Assim, o 7º termo dessa PG é

$$\begin{aligned} a_7 &= -3 \cdot (-2)^{7-1} = -3 \cdot (-2)^6 \\ &= -3 \cdot 64 = -192. \end{aligned}$$

Exercício 2. (Adaptado de Dante e Viana, 2020) A população de uma cidade cresce 2% ao ano. Atualmente a cidade possui 200 000 habitantes, qual a quantidade de habitantes dessa cidade após 5 anos?

Solução. Podemos modelar o crescimento da população dessa cidade como uma PG, com

$$\begin{cases} a_1 = 200\,000 \\ q = 1,02 \end{cases}.$$

!

$$\begin{aligned} q &= 100\% + 2\% \\ &= 1 + 0,02 \\ &= 1,02 \end{aligned}$$

$$(1,02)^4 = 1,08243216$$

Assim, o termo geral da nossa PG é dado por

$$a_n = 200\ \ 000 \cdot (1,02)^{n-1}$$

Portanto, após 5 anos, a população dessa cidade será

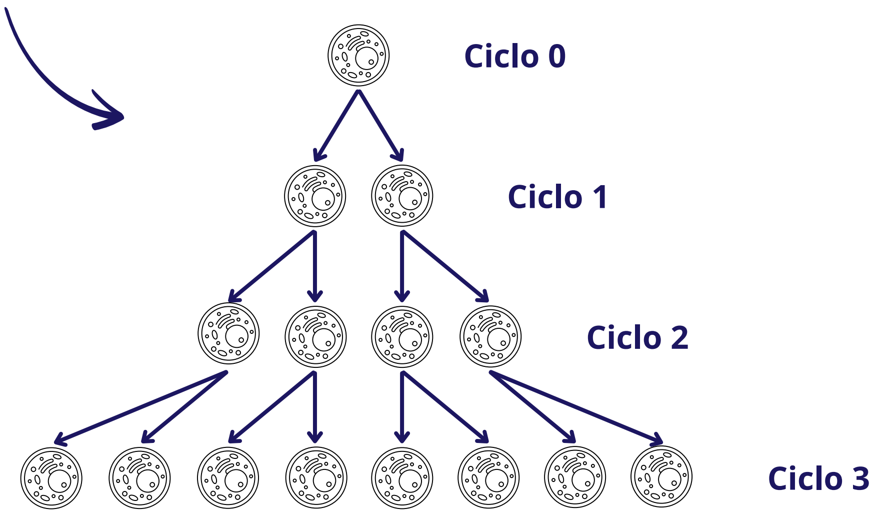
$$a_5 = 200\,000 \cdot (1,02)^4 = 200\,000 \cdot 1,08243216 = 216\,486,432 \approx 216\,487 \text{ habitantes}.$$

Exercício 3. (Dante e Viana, 2020) A mitose é um processo de divisão celular que acontece com a maioria das células do corpo humano. A partir de uma célula inicial, formam-se duas células idênticas, cada uma com a mesma quantidade de cromossomos. Ao levarmos em consideração a formação de um embrião humano, percebemos que ele começa com a formação do zigoto, que se divide em 2 células, que, por sua vez, geram 4 células que, após passarem por muitos ciclos de divisões celulares, vão se fixar na parede do útero. Considere esse processo de desenvolvimento do embrião humano desde o primeiro ciclo. Após quantos ciclos serão obtidas 8 192 células?

Solução. Vamos iniciar a solução montando uma tabela de valores e determinando nossa PG:

Ciclo	Número de células
0	1
1	2
2	4
3	8

$$\longrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow a_n = 2 \cdot 2^{n-1}.$$



Design: Amethyststudio / Fonte: Canva

Desejamos saber quantos ciclos (n) serão necessários para obtermos 8 192 células, portanto, devemos resolver a equação $2{\cdot}2^{n-1} = 8\,192$:

$$2{\cdot}2^{n-1} = 8\,192 \Rightarrow 2^{n-1} = \frac{8\,192}{2} = 4\,096 = 2^{12} \Rightarrow n-1 = 12 \Rightarrow n = 13.$$

Portanto, são necessários 13 ciclos, ou 13 divisões celulares, para atingirmos 8 192 células.

Prezada Professora, Prezado Professor,

para a resolução adotada utilizamos equação exponencial. É importante retomar esse conteúdo, pois ele poderá ser necessário em outros momentos nesta e nas próximas semanas de estudo. Para isso, sugerimos utilizar o livro didático, também é possível acessar o material extra disponibilizado na RPE da 2ª série (você pode acessá-lo através da sessão "Material extra").

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 2 (Funções e progressões) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**

- p. 132-134.

2. **Volume 2 (Função exponencial, função logarítmica e sequências) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**

- p. 133-139.

PORTAL DA MATEMÁTICA

O módulo ‘Progressões Geométricas’ do portal da matemática apresenta vídeos e materiais para o aprofundamento sobre progressão geométrica.

EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Na RPE da 2ª série é apresentado um material extra sobre equações exponenciais que pode ser usado caso o professor sinta necessidade de revisar esse conceito visto na série anterior.

Atividades

ATIVIDADE 1

Uma cultura de bactérias está crescendo em um laboratório. As contagens do número de bactérias em diferentes intervalos de tempo estão apresentadas na tabela abaixo:

Tempo (horas)	Número de Bactérias
0	50
1	150
2	450
3	1350
4	4050

Assumindo que a população de bactérias continua a crescer seguindo o mesmo padrão exponencial observado, quantas horas, aproximadamente, serão necessárias para que a cultura atinja um total de 328 050 bactérias?

ATIVIDADE 2

Priscilla está considerando investir em um fundo que oferece rendimentos mensais a juros compostos. Para entender melhor o potencial de crescimento, o gerente da instituição financeira simulou os montantes que ela receberia nos três primeiros meses, caso decidisse aplicar seu capital.

Dados da Simulação:

- Final do 1º mês: R$ 52.500,00
- Final do 2º mês: R$ 55.125,00
- Final do 3º mês: R$ 57.881,25

Considerando que a simulação apresentada reflete a aplicação de uma taxa de juros compostos mensal constante sobre o investimento inicial de Priscilla, responda:

A) Qual é a taxa de juros mensal que o fundo de investimentos utiliza nessa simulação? Expresse sua resposta em porcentagem.

B) Qual foi o valor do capital inicial que Priscilla considerou para essa simulação de investimento?

ATIVIDADE 3

Um tanque de água, inicialmente com 1000 litros, apresenta um vazamento constante na base, o que faz com que a cada hora o volume restante diminua na mesma razão. Após a primeira hora, restam 800 litros de água no tanque, e após a segunda hora, o volume é de 640 litros. Decorridas 5 horas, qual será o volume de água restante nesse tanque?

ATIVIDADE 4

Considere a sequência (–3, 18, –108, 648, ...) e, determine:

A) Sua razão.

B) O seu 8º termo.

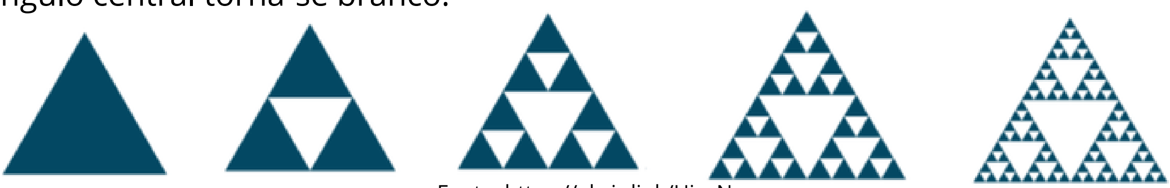
ATIVIDADE 5

A seguir, são apresentadas duas listas: uma com sequências de Progressões Geométricas (PG) e outra com expressões de Funções do tipo Exponenciais. Para cada função exponencial (com x natural e maior que zero), escreva a letra da Progressão Geométrica que a representa.

Progressões Geométricas	Funções Exponenciais
(A) **2**, **6**, **18**, **54**, ...	( ) $f(x) = 5 \cdot 1^{x-1}$
(B) **10; 5; 2,5; 1,25**, ...	( ) $f(x) = 10 \cdot 0{,}5^{x-1}$
(C) **–3**, **12**, **–48**, **192**, ...	( ) $f(x) = 2 \cdot 3^{x-1}$
(D) **5**, **5**, **5**, **5**, ...	( ) $f(x) = (-3) \cdot (-4)^{x-1}$
(E) **1**, $\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}$, ...	( ) $f(x) = 1 \cdot (-0{,}5)^{x-1}$

ATIVIDADE 6

Considere a construção do Triângulo de Sierpinski, começando com um triângulo equilátero azul. A cada etapa subsequente, cada triângulo azul é dividido em quatro triângulos equiláteros menores e congruentes: três deles permanecem azuis e o triângulo central torna-se branco.



Fonte: https://abrir.link/HirqN

Qual das seguintes fórmulas gerais expressa corretamente o número de triângulos azuis a_n na etapa **n** da construção do Triângulo de Sierpinski?

A) $a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$

B) $a_n = a_1 \cdot 3^{n-1}$

C) $a_n = a_1 - 4^{n-1}$

D) $a_n = a_1 + 3^{n-1}$

E) $a_n = a_1 \cdot (n - 1)$

ATIVIDADE 7

A tabela abaixo representa a relação entre duas variáveis, x e y. Analise os valores apresentados e identifique qual das alternativas descreve corretamente a natureza dessa relação.

x	y
0	4
1	12
2	36
3	108
4	324

A) A relação entre x e y é linear, com um aumento constante de 8 unidades em y para cada aumento de 1 unidade em x.
B) A relação entre x e y é linear, com uma diminuição constante de 8 unidades em y para cada aumento de 1 unidade em x.
C) A relação entre x e y é exponencial, com uma base de 3, representando um crescimento.
D) A relação entre x e y é exponencial, com uma base de $\frac{1}{3}$, representando um decaimento.
E) A relação entre x e y não pode ser classificada como linear ou exponencial com base nos dados apresentados.

ATIVIDADE 8

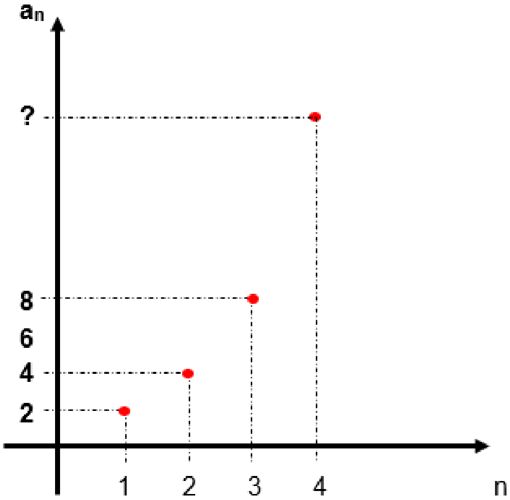
Em uma área de preservação marinha em Guarapari, biólogos estão monitorando a população de uma espécie de ouriço-do-mar. No início do monitoramento, foram contados 50 ouriços. Observou-se que a população cresce a uma taxa constante a cada mês, seguindo uma progressão geométrica. Ao final do terceiro mês, a população total de ouriços era de 450.

Qual será a população total de ouriços-do-mar ao final do quinto mês?

A) 1 215
B) 2 025
C) 3 645
D) 4 050
E) 6 075

ATIVIDADE 9

Os pontos no gráfico representam os termos de uma progressão, onde o eixo horizontal indica o número do termo (n) e o eixo vertical indica o valor do n-ésimo termo:



Se essa progressão continua seguindo o mesmo padrão, o valor do quarto termo (**a_4**) é:

A) 10
B) 12
C) 14
D) 16
E) 20

ATIVIDADE 10

Uma empresa de tecnologia de ponta lançou um supercomputador revolucionário cuja capacidade de processamento evolui de maneira espetacular, seguindo um padrão de crescimento geométrico ano após ano. Observe a capacidade de processamento nos primeiros anos de sua operação:

- Ano 1: 2 gigaflops
- Ano 2: 6 gigaflops
- Ano 3: 18 gigaflops
- Ano 4: 54 gigaflops

Se essa tendência de crescimento persistir, qual das seguintes fórmulas representa a capacidade de processamento do supercomputador **C_t** no ano **t** de sua operação?

A) $C_t = 2 \cdot 3^{t-1}$
B) $C_t = 3 \cdot 2^{t-1}$
C) $C_t = 3 \cdot 2^{t}$
D) $C_t = 2 \cdot 3^{t}$
E) $C_t = 3^{t}$

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: Funções e progressões. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em Contextos**: Função exponencial, função logarítmica e sequências. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

ATIVIDADES

BONJORNO, José R.; GIOVANNI JUNIOR, José R.; SOUSA, Paulo R. C. **Prisma matemática:** conjuntos e funções. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BONJORNO, José R.; GIOVANNI JUNIOR, José R.; SOUSA, Paulo R. C. **Prisma matemática:** funções e progressões. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE, Luís R.; VIANA, Fernando. **Matemática em Contextos:** Função exponencial, função logarítmica e sequência. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL
GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

FUNÇÃO EXPONENCIAL

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT403 Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.	• Identificar e definir a função exponencial e suas características, como a base, o expoente e o comportamento de crescimento ou decrescimento. • Reconhecer situações, em diferentes contextos práticos, que possuem crescimento ou decrescimento que podem ser modelados por uma função exponencial. • Construir e interpretar gráficos de funções exponenciais. • Resolver problemas envolvendo funções exponenciais em diferentes contextos, tais como crescimento populacional e decaimento radioativo.	• **D074_M** Corresponder as representações algébrica e gráfica de uma função exponencial. • **D088_M** Utilizar função exponencial na resolução de problemas.

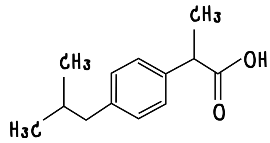
Contextualização

Na semana anterior estudamos as progressões geométricas. Vejamos uma situação:

Quando tomamos um medicamento não é de se espantar que em um determinado tempo ele deixe de fazer o efeito esperado, isso acontece pois os medicamentos possuem uma propriedade chamada de meia vida, ou seja, um período de tempo necessário para que nosso organismo excrete metade da concentração de tal medicamento presente no nosso corpo, este valor de meia vida é importante para que se defina a posologia do mesmo. Observe o caso do Acetaminofeno, conhecido popularmente, como Ibruprofeno:

O Acetaminofeno é indicado para redução da febre e para o alívio temporário de dores leves a moderadas, tais como: dores associadas a gripes e resfriados comuns, dor de cabeça, dor de dente, dor nas costas, dores musculares, dores associadas a artrites, dores de cólica menstrual e reações pós-vacinais.

Hospital Sírio-Libanês. PARACETAMOL (ACETAMINOFENO). Disponível em: https://guiafarmaceutico.hsl.org.br/paracetamol-(acetaminofeno). Acesso em: 07 abril 2025.



Design: Paweeillus / Fonte: Canva.

Segundo a Sociedade Brasileira de Geriatria e Gerontologia, a meia-vida do Acetaminofeno é de 4h

SBGG. FARMACOCINÉTICA DOS MEDICAMENTOS . Disponível em: https://sbgg.org.br/wp-content/uploads/2016/06/farmacocinetica-dos-medicamentos.pdf. Acesso em: 07 abril 2025.

Isso significa que a cada 4h, metade da concentração do Acetaminofeno é eliminada pelo nosso organismo, assim, podemos construir a seguinte tabela, considerando que uma pessoa ingeriu um comprimido de Ibuprofeno de 600 mg:

Tempo decorrido após a ingestão do medicamento	0h	4h	8h	12h
Quantidade de Acetamifeno no organismo (mg)	600	300	150	75

No entanto, será que é possível determinar a quantidade de Acetamifeno no organismo humano decorridos 1,5 h após a ingestão? E após 2,3 h? A resposta para essas perguntas é sim e, para isso, necessitaremos revisitar a função exponencial!

Diferente da progressão geométrica, a função exponencial consegue descrever eventos contínuos. Este será o objeto de estudos desta semana.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

FUNÇÃO EXPONENCIAL

A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x)=a^x$, com $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ e $a\neq 1$, é chamada de **função exponencial de base a**.

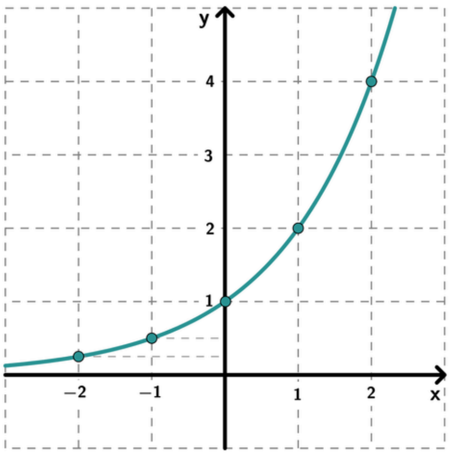
Veja abaixo alguns exemplos de leis de funções exponenciais:

$$f(x)=2^x \quad f(x)=0,7^x \quad f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x \quad f(x)=\pi^x \quad f(x)=\sqrt{2}^x$$

Assim como vimos com as demais funções estudadas até aqui, vamos representá-las de duas maneiras: algebricamente, por sua lei de formação, e graficamente. Passaremos a investigar o gráfico da função exponencial.

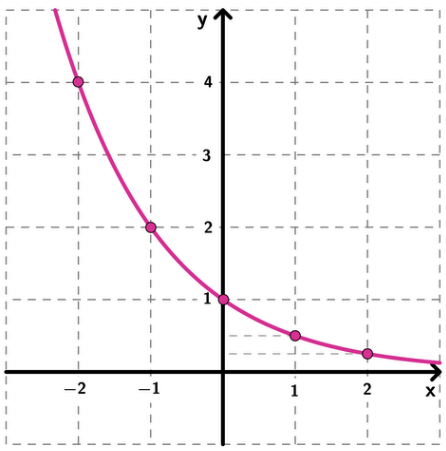
Vamos construir o gráfico da função $f(x)=2^x$:

x	$f(x)=2^x$
-2	$f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$
-1	$f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$
0	$f(0)=2^0=1$
1	$f(1)=2^1=2$
2	$f(2)=2^2=4$



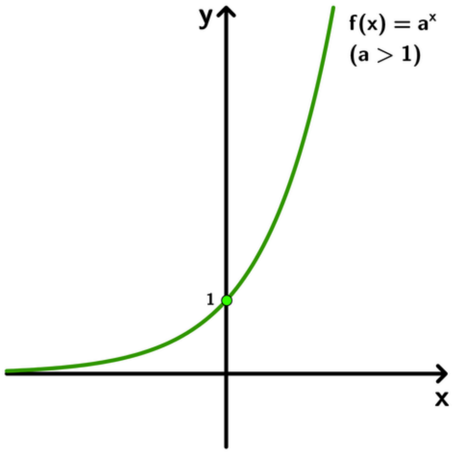
Considere, agora, a função $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

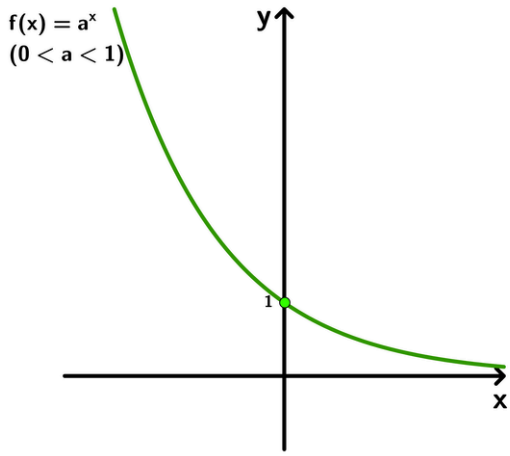
x	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	$f(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$
-1	$f(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2^1=2$
0	$f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$
1	$f(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$
2	$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$



Propriedades da Função Exponencial

- O gráfico da função exponencial não toca o eixo das abscissas, ou seja, $f(x) = a^x$ não assume o valor 0 e não tem zeros, o eixo x é chamado de assíntota da função;
- O gráfico intersecta o eixo das ordenadas (eixo y) no ponto (0, 1);
- A função exponencial pode ser crescente (caso $a > 0$) ou decrescente (caso $0 < a < 1$);

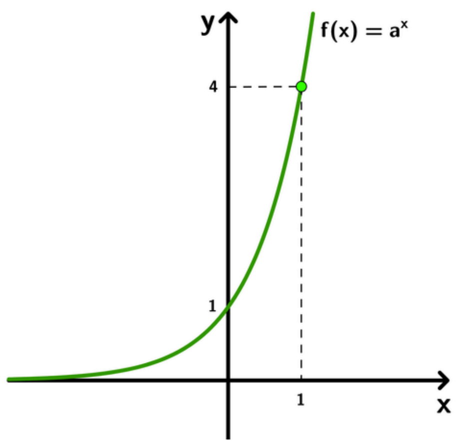


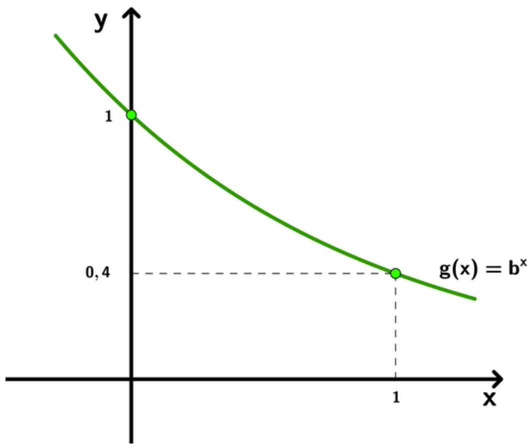


- Considerando a função $f(x) = a^x$, temos $f(1) = a^1 = a$.

Esta última propriedade é importante para que possamos, a partir do gráfico de uma função de função exponencial, determinar sua lei de formação. Vejamos um exemplo:

Considere as funções exponenciais f(x) e g(x) cujos gráficos são mostrados abaixo.





Usando a última propriedade, $f(1) = a^1 = a$, obtemos:

$$\begin{cases} f(x) = a^x \Rightarrow f(1) = a \text{ e } f(1) = 4 \Rightarrow a = 4 \\ g(x) = b^x \Rightarrow g(1) = b \text{ e } g(1) = 0,4 \Rightarrow b = 0,4 \end{cases}$$

Portanto, $f(x) = 4^x$ e $g(x) = (0,4)^x$.

Funções Obtidas a Partir da Função Exponencial

As funções do tipo exponencial são funções obtidas por transformações na função exponencial. A forma geral dessas funções é:

$$f(x) = k \cdot a^x + b$$

com k e b duas constantes reais.

Os valores de k e b alteram a forma do gráfico da função exponencial da seguinte maneira:

Efeito de k

- Fator multiplicativo que pode alongar ou encolher o gráfico da função.
- Conforme aumentamos o valor de k, os valores de f(x) aumentam rapidamente, se k>0; ou diminuem rapidamente, se k<0.
- Alterando o valor de k, alteramos a intersecção com o eixo y para (0, k).

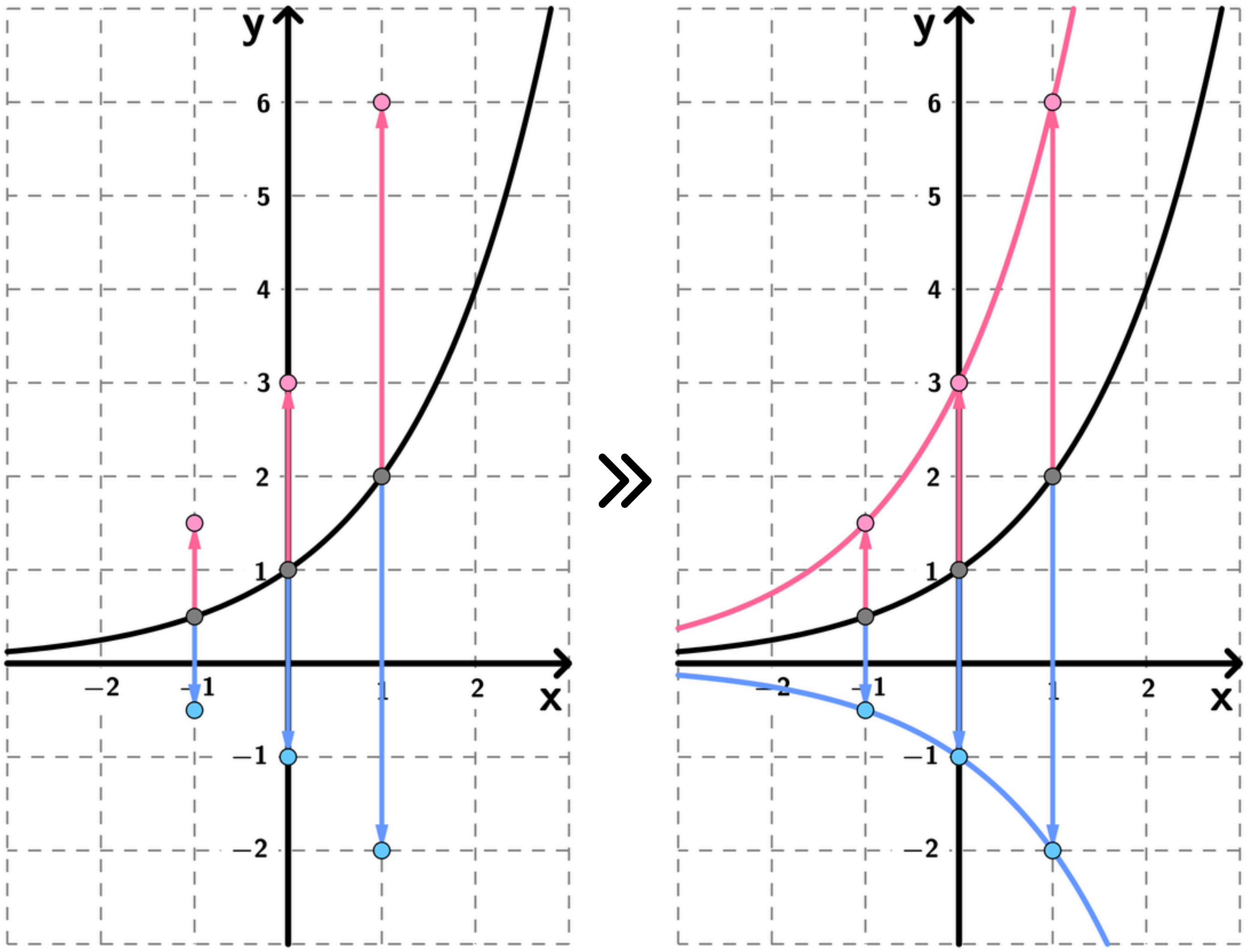
Efeito de b

- Fator aditivo que desloca verticalmente o gráfico da função.
- Conforme aumentamos o valor de b, transladamos o gráfico da função para cima, e conforme diminuímos o valor de b, o transladamos para baixo.
- Alterando o valor de b, alteramos a intersecção com o eixo y para (0, 1+b).
- Alterando o valor de b, alteramos a assíntota do gráfico de y=0 (eixo x) para y=b (uma reta horizontal passando por (0, b)).

Prezada Professora, Prezado Professor,

A partir da próxima página iremos mostrar como os valores de k e b afetam a forma do gráfico da função exponencial, no entanto, deixamos aqui uma atividade que pode ser desenvolvida com os estudantes a fim de explorar essas alterações antes de uma aula expositiva.
Para acessar a atividade você pode ler o QR Code abaixo ou acessar por este **link**.

Considere a função exponencial $f(x) = 2^x$. Vamos construir o gráfico das funções $g(x) = 3 \cdot 2^x$ e $h(x) = -1 \cdot 2^x$.



$f(x) = 2^x$ $g(x) = 3 \cdot 2^x$ $h(x) = -1 \cdot 2^x$

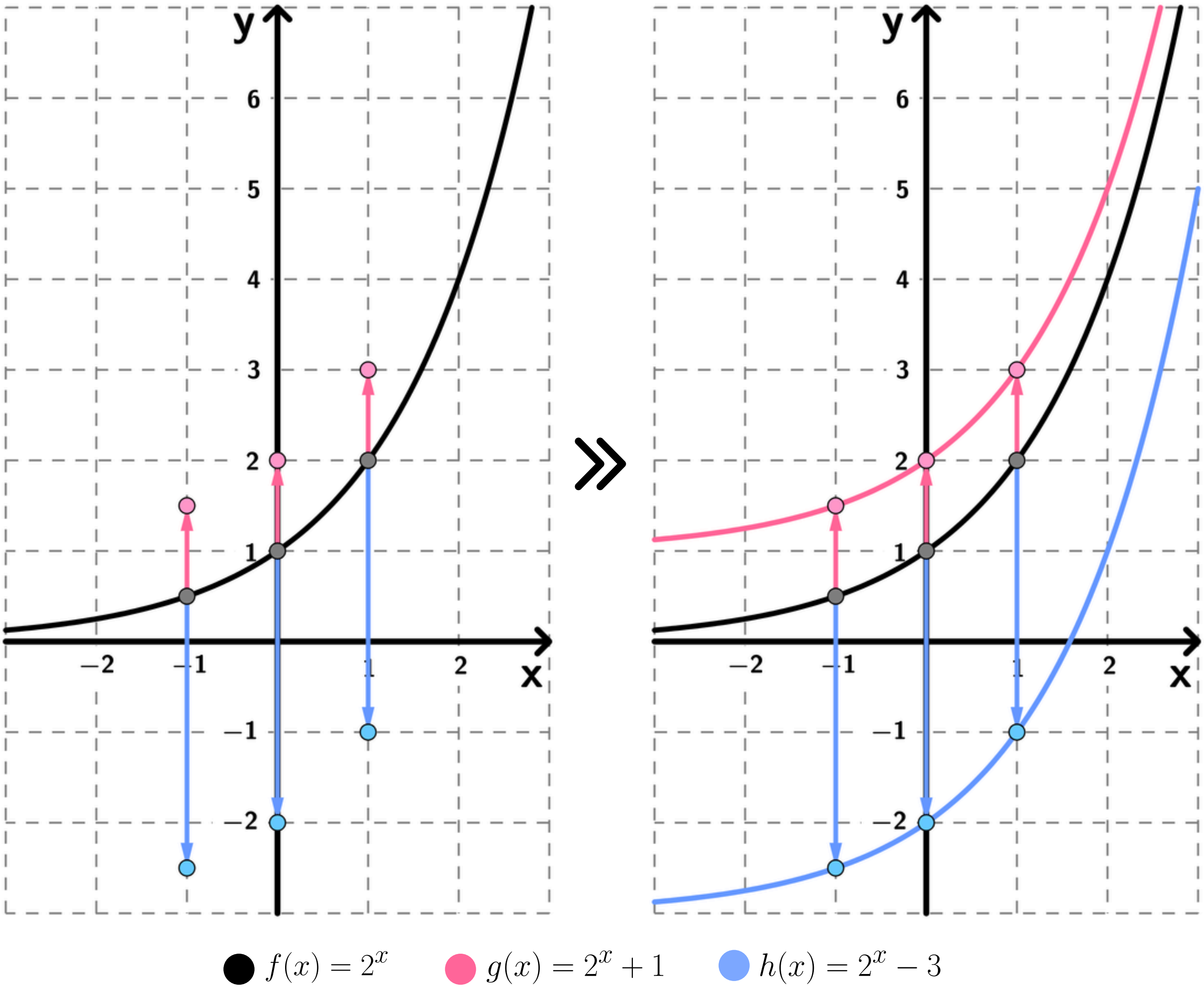
Observações Importantes:

Ao multiplicarmos o gráfico de uma função exponencial a assíntota não é alterada.

Se k<0, a nova função tem um comportamento de crescimento ou decrescimento diferente da função original.

Quando k<0, o gráfico da função está nos 3º e 4º quadrantes, ao contrário do que temos usualmente da função exponencial se encontrar no 1º e 2º quadrantes.

Vejamos a seguir a construção das funções $g(x) = 2^x + 1$ e $h(x) = 2^x - 3$:



Observações Importantes:

Nessa mudança da função exponencial a assíntota é alterada para y=b.

Quando b<0, o gráfico da função função exponencial passa a ter um zero, isto é, ele passa a cortar o eixo x.

Independente do valor de b, a nova função sempre terá o mesmo comportamento de crescimento ou decrescimento da função original.

Resolução de Problemas Envolvendo a Função Exponencial

Antes de apresentarmos algumas classes de problemas envolvendo a função exponencial, é interessante observar alguns apontamentos sobre o processo de resolução de problemas.

1. **Compreender o Problema**
   Leia o problema com atenção e identifique o que está sendo pedido. Identifique os valores conhecidos e desconhecidos.

2. **Estabelecer a Função Exponencial**
   Caso não seja fornecida a função exponencial que modela o problema, devemos estabelecer sua regra, para isso, podemos usar um modelo que se enquadra em uma ampla gama de problemas:
   $$f(x) = k \cdot a^x$$
   onde **k** representa o valor inicial, **a** o fator de crescimento ou decrescimento e **x** a variável independente.

3. **Manipulação Algébrica**
   Dependendo do que for solicitado, pode ser necessário calcular o valor numérico da função para um determinado valor da variável independente x ou então determinar o valor da variável x, dado uma situação específica. Neste último caso pode ser necessário resolver uma equação exponencial. Um material sobre o assunto é disponibilizado na sessão "Material Extra".

A função exponencial possui diversas aplicações no mundo real, no entanto, três delas são mais frequentes: juros compostos, decaimento radioativo e crescimento populacional. Vejamos cada uma delas.

Juros compostos

Considere a seguinte situação: você vai aplicar R$ 1 000,00 em um banco que paga juros compostos de 2% ao mês. No 1ºmês você terá em sua conta, seus R$ 1 000,00 mais os juros de R$ 20,00, isto é, você terá R$ 1 020,00. Já no segundo mês os juros incidem sobre os R$ 1 020,00, assim, você terá em sua conta R$ 1 020,00 mais os juros de R$ 20,40, ou seja, R$1 040,40, e assim por diante.

Note que o valor inicial da aplicação foi de R$ 1 000,00 e esse dinheiro cresce 2% a cada mês, ou seja, a cada mês deve-se multiplicar o valor anterior por 1,02 (100%+2%). Dessa forma, a função exponencial que modela esse problema é:

$$f(t) = 1\,000 \cdot 1,02^t.$$

A função f é também chamada de **montante**.

Desta forma, o valor que você terá no banco no 10º mês, por exemplo, será igual a

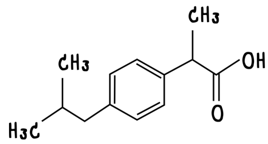
$$f(10) = 1\,000 \cdot 1,02^{10} \approx 1\,218,99.$$

Decaimento radioativo/Processo de meia vida

Vamos relembrar do nosso problema da abertura desse material.

O Acetaminofeno é indicado para redução da febre e para o alívio temporário de dores leves a moderadas, tais como: dores associadas a gripes e resfriados comuns, dor de cabeça, dor de dente, dor nas costas, dores musculares, dores associadas a artrites, dores de cólica menstrual e reações pós-vacinais.

Hospital Sírio-Libanês. PARACETAMOL (ACETAMINOFENO). Disponível em: https://guiafarmaceutico.hsl.org.br/paracetamol-(acetaminofeno). Acesso em: 07 abril 2025.



Design: Paweeillus / Fonte: Canva.

Segundo a Sociedade Brasileira de Geriatria e Gerontologia, a meia-vida do Acetaminofeno é de 4h

SBGG. FARMACOCINÉTICA DOS MEDICAMENTOS . Disponível em: https://sbgg.org.br/wp-content/uploads/2016/06/farmacocinetica-dos-medicamentos.pdf. Acesso em: 07 abril 2025.

Tempo decorrido após a ingestão do medicamento	0h	4h	8h	12h
Quantidade de Acetamifeno no organismo (mg)	600	300	150	75

Observe que a cada 4 horas a quantidade de Acetamifeno no organismo reduz à metade e a quantidade inicial da substância é de 600 mg. Assim, podemos descrever o processo de decaimento da quantidade de Acetamifeno no organismo pela seguinte função:

$$f(x) = 600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

No entanto, só podemos contar 1 inteiro a cada 4 horas, então, para facilitar o processo de cálculo podemos reescrever esta equação fazendo uma mudança no expoente da função:

$$f(t) = 600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}.$$

Portanto, podemos determinar o tempo necessário para que a quantidade do medicamente no organismo seja, por exemplo, de 9,375 mg:

$$9,375 = 600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} = \frac{9,375 \cdot 1000}{600 \cdot 1000} = \frac{9\,375}{600\,000}.$$

fatorando 9 375 e 600 000, obtemos:

$$\begin{aligned} 9\,375 &= 3 \cdot 5^5 \\ 600\,000 &= 2^6 \cdot 3 \cdot 5^5 \end{aligned}$$

Daí,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} = \frac{3 \cdot 5^5}{2^6 \cdot 3 \cdot 5^5} = \frac{1}{2^6} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Leftrightarrow \frac{t}{4} = 6 \Leftrightarrow t = 6 \cdot 4 = 24h.$$

Ou seja, após 24 horas da ingestão de 600 mg de Acetamifeno, a quantidade do medicamento no organismo humano será de 9,375 mg.

Em geral, dada uma substância cujo tempo de meia-vida seja igual a P e sua concentração inicial seja igual a C, então a função exponencial que modela o decaimento da quantidade (ou concentração) dessa substância é

$$f(t) = C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{P}}.$$

Crescimento populacional

Em Biologia, a curva de potencial biótico é um gráfico que representa a capacidade inata de uma população aumentar, em geral descrita por uma função exponencial. No entanto, essa curva é um modelo teórico considerando falta de predadores e disposição de alimento e espaço suficiente para todos os indivíduos da população.

Aqui é interessante ressaltar que, apesar desse fenômeno ser modelado por uma função exponencial, ele é essencialmente discreto, pois não há como ter parte de um indivíduo.

Vejamos alguns exemplos:

1. Uma população de bactérias se reproduz de forma binária a cada 1 hora e possui, inicialmente, 10 indivíduos. Podemos modelar seu crescimento de acordo com a seguinte função:

$$f(t) = 10 \cdot 2^t.$$

Assim, após 10 horas, teremos uma população com

$$f(10) = 10 \cdot 2^{10} = 10 \cdot 1\,024 = 10\,240 \; bactérias.$$

2. O aguapé é uma planta nativa da América do Sul que forma tapetes densos e extensos na superfície da água que nem mesmo barcos comerciais conseguem penetrar. Essa planta consegue dobrar sua população a cada duas semanas.

Usando o mesmo artifício que fizemos no exemplo do decaimento da quantidade de Acetamifeno no organismo, podemos modelar o crescimento de uma população de aguapé, que contava, inicialmente, com 12 indivíduos pela seguinte função:

$$f(t) = 12 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$$

Assim, na 16ª semana, teremos,

$$f(16) = 12 \cdot 2^{\frac{16}{2}} = 12 \cdot 2^8 = 12 \cdot 256 = 3\,072 \; plantas.$$

Exercícios Resolvidos

Exercício 1. (ENEM 2016 - 2ª aplicação) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população $P(t) = 40 \cdot 2^{3t}$, em que t é o tempo, em hora, e P(t) é a população, em milhares de bactérias.
Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será:
a) reduzida a um terço.
b) reduzida à metade.
c) reduzida a dois terços.
d) duplicada.
e) triplicada.

Solução. Como devemos estabelecer uma comparação entre a população inicial e a população após 20 minutos, devemos calcular P(0) e P(20), no entanto, o tempo é contado em horas, portanto, deve-se transformar 20 minutos para horas:

$$20 \text{ minutos} = \frac{20 \text{ minutos}}{60 \text{ minutos/hora}} = \frac{1}{3} \text{ h}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{cases} P(0) = 40 \cdot 2^{3 \cdot 0} = 40 \cdot 2^0 = 40 \\ P\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 40 \cdot 2^1 = 80 \end{cases}$$

Note que, após 20 minutos, a população de bactérias passa a ser 80 mil, o dobro do que havia no início (40 mil). Logo, a alternativa correta é a alternativa **d)**.

Exercício 2. (Adaptado de Dante e Viana, 2020) O uso indiscriminado de agrotóxicos, as mudanças climáticas, os grandes desmatamentos e o aparecimento de alguns tipos de parasita podem levar à extinção das abelhas em poucas décadas. Conforme a quantidade de insetos dessa população vai diminuindo, a polinização das plantas vai ficando cada vez mais comprometida, o que pode gerar um colapso na produção de alimentos, bem como causar a morte de animais herbívoros, por falta de alimentos, e de animais carnívoros que se alimentam dos herbívoros. Diante desse quadro preocupante, especialistas estudam maneiras de evitar a redução da quantidade de abelhas. Suponha uma situação preocupante em que a população de uma colmeia de abelhas, inicialmente com 20.000 indivíduos, esteja se reduzindo à taxa de aproximadamente 10% ao mês, por causa do uso de agrotóxicos.

a) Determine a função que relaciona o número N de abelhas após t meses.

b) Qual o tempo necessário para que a quantidade de abelhas seja igual a 13.122 ?

Solução.

a) Observe que, inicialmente, a população de abelhas era de 20.000 indivíduos e que, a cada mês, essa população se reduz em 10%, logo, a população, a cada mês, corresponde a 90% da população do mês anterior. Assim, podemos expressar a relação entre o número de abelhas (N) após t meses, da seguinte forma:

$$N(t) = 20\ \ 000 \cdot 0,9^t.$$

b) Note que, nesse caso, temos a população de abelhas (13.122) e precisamos determinar o tempo necessário para que a população de abelhas atinja esse número, então é necessário resolver a seguinte equação:

$$20\ \ 000 \cdot 0,9^t = 13\ \ 122.$$

Vamos resolvê-la:

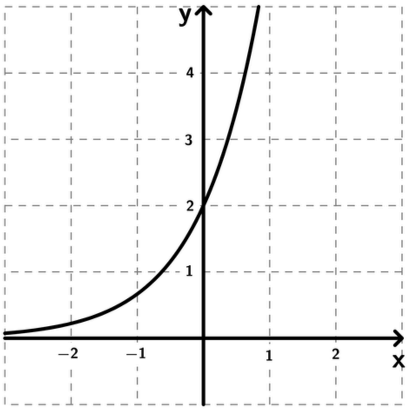
$$20\,000{\cdot}0,9^t = 13\,122 \Rightarrow 0,9^t = \frac{13\,122}{20\,000} \overset{\div 2}{=} \frac{6\,561}{10\,000} = \frac{9^4}{10^4} = \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0,9^4$$

$$\Rightarrow 0,9^t = 0,9^4 \Rightarrow t = 4.$$

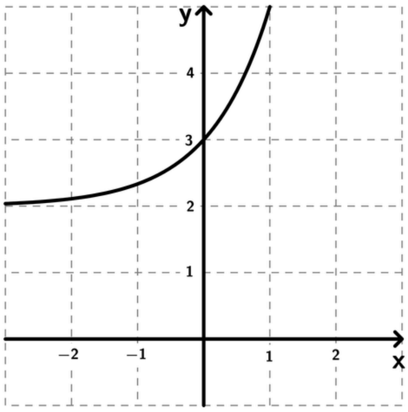
Logo, a população de abelhas será igual a 13.122 após 4 meses.

Exercício 3. O gráfico que representa a função $f(x) = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ está representado em

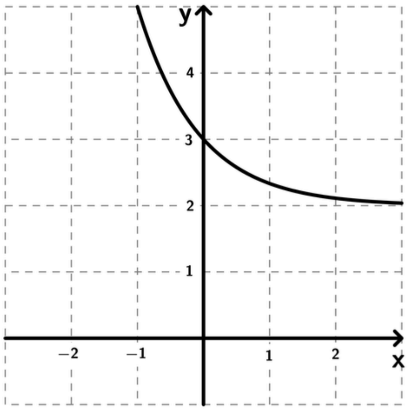
a)



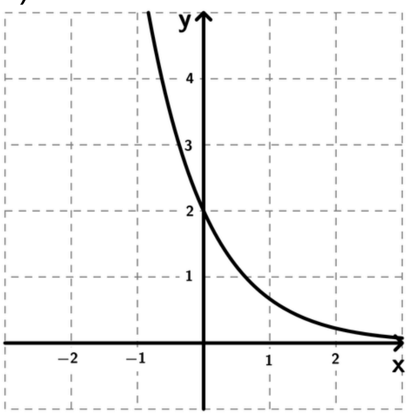
b)



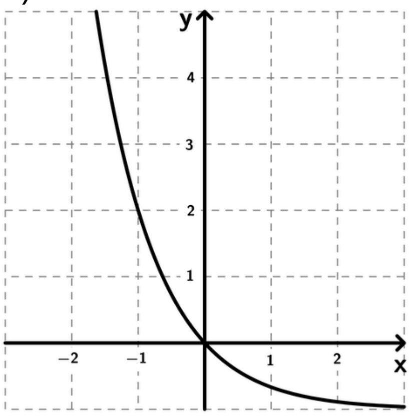
c)



d)



e)



Solução. Vamos observar a função dada:

$$f(x) = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Como vimos anteriormente, somar essa constante na função exponencial faz com que a assíntota se desloque para y=2.

Como a base é um número entre 0 e 1, esta é uma função exponencial decrescente.

Portanto, a alternativa que atende às duas observações feitas e, que representa a alternativa correta para a questão, é **c)**.

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 2 (Funções e progressões) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
   - p. 56-67.
2. **Volume 2 (Função exponencial, função logarítmica e sequências) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
   - p. 42-65.

PORTAL DA MATEMÁTICA

O módulo ‘Função Exponencial’ do portal da matemática apresenta vídeos e materiais para o aprofundamento sobre progressão geométrica.

ASSÍNTOTA DA FUNÇÃO

No material estruturado comentamos sobre a assíntota da função exponencial, caso o professor julgue necessário, o tema pode ser melhor discutido utilizando o material disponibilizado aqui ou pelo QR Code ao lado.

Atividades

Esta atividade de revisão é opcional, e tem como objetivo retomar o estudo sobre resolução de equações exponenciais.

REVISÃO

Resolva as equações exponenciais abaixo:

A) $2^x = 16$

B) $3^{x+1} = 81$

C) $5^{2x-1} = 125$

D) $4^{x+1} = \frac{1}{64}$

E) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = 8$

F) $10^{3x} = 0{,}001$

G) $7^{x^2-2x} = 1$

H) $2^{x+2} = 32^{x-2}$

I) $6^{x-1} + 4 = 40$

J) $3^{x+4} - 3 = 240$

K) $5 + 2^x = 13$

L) $7 + 4^{x-1} = 15$

M) $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{8}{9}$

N) $3 \cdot 2^{x+2} = 24$

O) $5 \cdot 3^{2x-1} = 135$

ATIVIDADE 1

Leia atentamente cada uma das situações descritas abaixo. Assinale a alternativa que representa uma situação cujo comportamento pode ser melhor modelado por uma função exponencial.

A) O valor total a ser pago em uma corrida de táxi que cobra uma taxa fixa inicial mais um valor constante por quilômetro rodado.
B) A quantidade de água em uma piscina que está sendo esvaziada a uma taxa constante de 500 litros por hora.
C) O número de seguidores de um novo perfil em uma rede social que, a cada dia, consegue um número de novos seguidores igual a 10% da sua base atual de seguidores.
D) A temperatura de um forno que aumenta uniformemente 5 graus Celsius a cada minuto até atingir a temperatura desejada.
E) O salário mensal de um vendedor que recebe um valor fixo mais uma comissão de R$ 10,00 por cada produto vendido no mês.

ATIVIDADE 2

Cientistas monitoram o crescimento da área de uma colônia de fungos em um ambiente laboratorial. As medições diárias da área da colônia foram registradas: no primeiro dia, 4 cm²; no segundo dia, 12 cm²; e no terceiro dia, 36 cm². A função exponencial que melhor descreve o crescimento da área dessa colônia de fungos ao longo do tempo (em dias) é:

A) $A(t) = 4 \cdot 2^{t-1}$

B) $A(t) = 4 \cdot 3^{t-1}$

C) $A(t) = 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t-1}$

D) $A(t) = 2 \cdot 6^{t-1}$

E) $A(t) = 36 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{t-1}$

ATIVIDADE 3

Um grupo de pesquisadores do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) está conduzindo um experimento para determinar a taxa de reprodução de uma cepa específica de bactéria. Eles iniciaram a observação com uma quantidade desconhecida de bactérias e monitoraram a população por um período de duas horas. Ao final desse período, a contagem revelou uma população impressionante de 153 600 bactérias. Os dados coletados indicam que a população dessas bactérias dobra a cada 15 minutos. Com base nessas informações, qual era a quantidade inicial de bactérias presentes no micro-habitat no início do experimento?

A) 370 bactérias
B) 600 bactérias
C) 740 bactérias
D) 2.400 bactérias
E) 3.840 bactérias

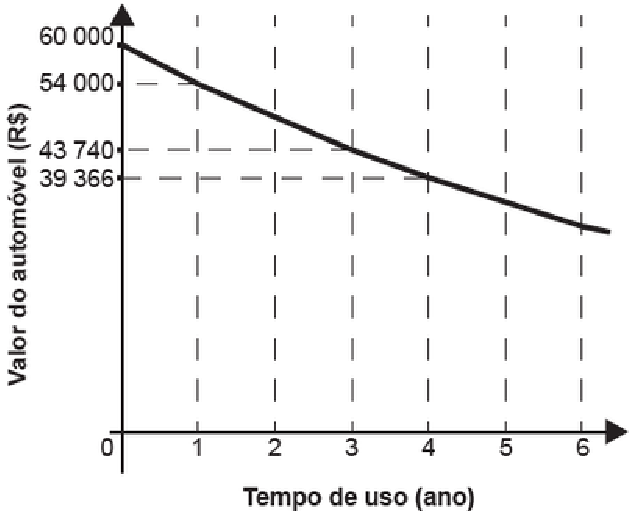
ATIVIDADE 4

O zero da função $f(x) = 2^{x+1} - 8$ é:

A) - 2
B) - 1
C) 0
D) 1
E) 2

ATIVIDADE 5

(Enem 2017) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função **f(t) = b · a^t**, com t em ano. Essa função está representada no gráfico.

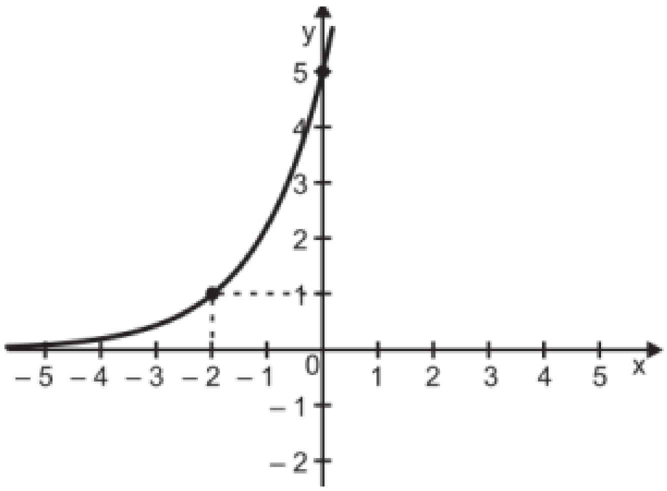


Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

A) 48 000,00
B) 48 114,00
C) 48 600,00
D) 48 870,00
E) 49 683,00

ATIVIDADE 6

Determine a lei de formação que corresponde à função apresentada no gráfico abaixo.



Fonte: https://questoes.grancursosonline.com.br/

ATIVIDADE 7

Determine o valor de **A** para que o gráfico da função $f(x) = A + 2^{-x+5}$ passe pelo ponto de coordenadas **(2, 0)**.

ATIVIDADE 8

(Enem 2020 - Adaptada) Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono 14 nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5 730 anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há 5 730 anos haverá metade do carbono 14 que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula para saber a idade de um fóssil encontrado:

$$Q(t) = Q_0 \cdot (2)^{\frac{-t}{5\,730}}$$

Nessa função, **t** é o tempo, medido em ano, **Q(t)** é a quantidade de carbono 14 medida no instante **t** e $\mathbf{Q_0}$ é a quantidade de carbono 14 no ser vivo correspondente.

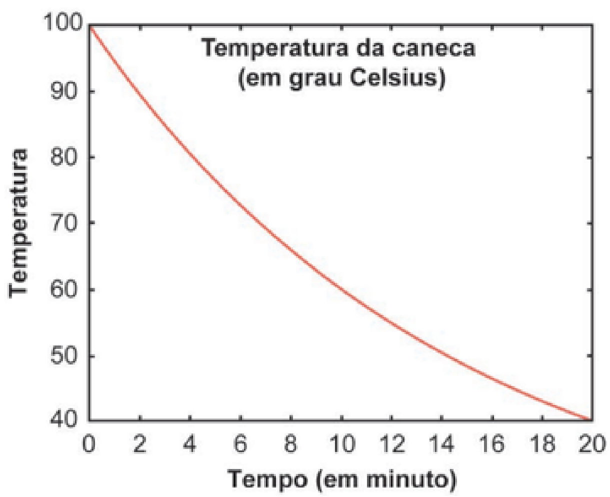
Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou 5 fósseis de espécies conhecidas e mediram a quantidade de carbono 14 neles existente. Na tabela temos esses valores juntamente com a quantidade de carbono 14 nas referidas espécies vivas.

Fóssil	Q_0	Q(t)
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1 024	512
5	2 048	128

A partir desses dados, explique qual foi o fóssil mais antigo encontrado durante a expedição.

ATIVIDADE 9

(Enem 2024 - Adaptada) Uma caneca com água fervendo é retirada de um forno de micro-ondas. A temperatura **T**, em grau Celsius, da caneca, em função do tempo **t**, em minuto, pode ser modelada pela função $T(t) = a + 80 \cdot b^t$, representada no gráfico a seguir.



Dessa forma, determine os valores das constantes **a** e **b**.

ATIVIDADE 10

Num mesmo plano cartesiano, esboce o gráfico das funções:

A) $f(x) = 2^x$

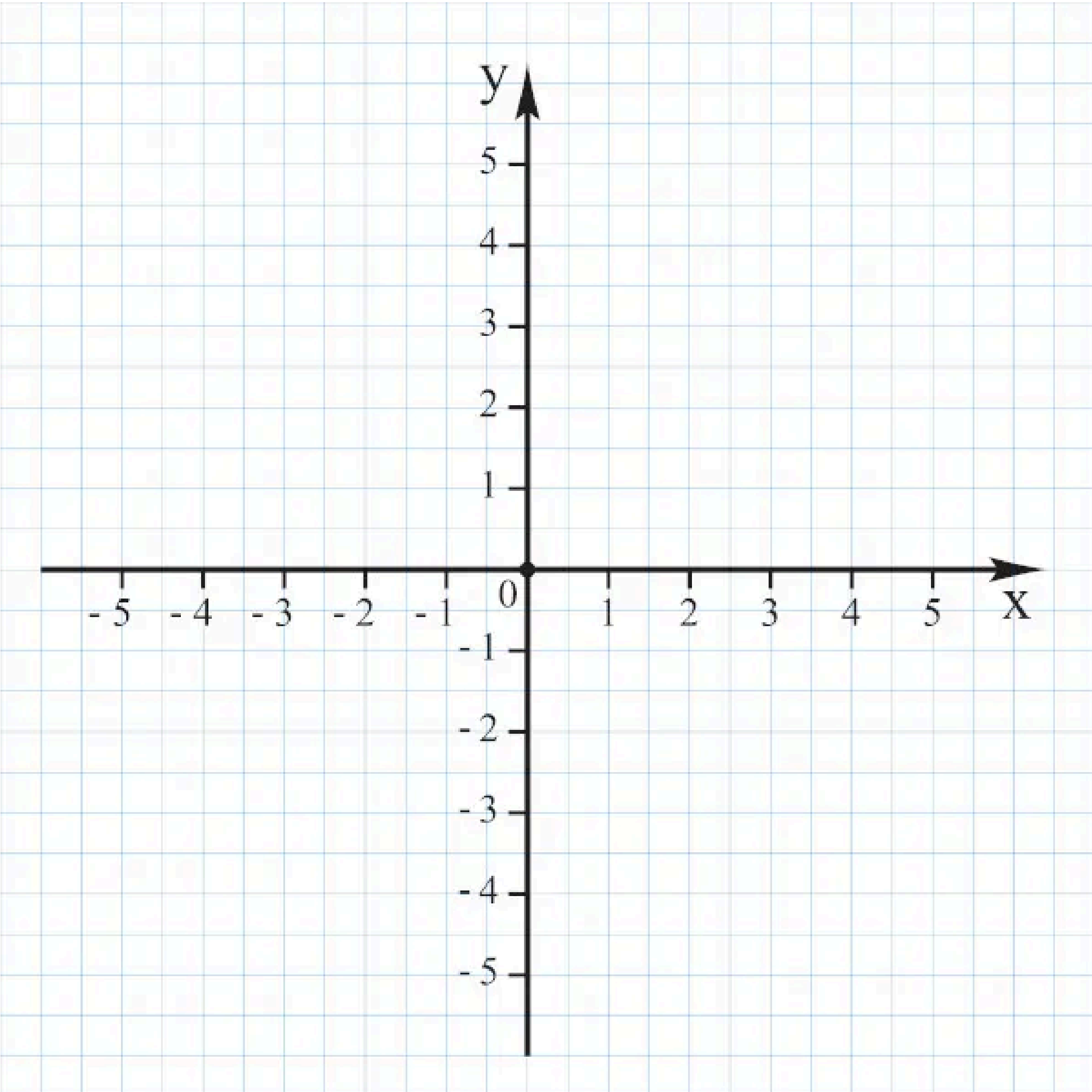
B) $g(x) = 2^{-x}$

C) $h(x) = 1 + 2^x$

D) $i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

E) $j(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Para facilitar, utilize como valores de x: - 1, 0 e 1.



Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: Funções e progressões. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em Contextos**: Função exponencial, função logarítmica e sequências. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2016 - Exame Nacional do Ensino Médio 2016, 2ª aplicação, 2º dia**. Brasília: INEP, 2016. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_2_06_CINZA_2.pdf. Acesso em: 7 abr. 2025.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José R.; GIOVANNI JUNIOR, José R.; SOUSA, Paulo R. C. **Prisma matemática:** conjuntos e funções. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BONJORNO, José R.; GIOVANNI JUNIOR, José R.; SOUSA, Paulo R. C. **Prisma matemática:** funções e progressões. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

DANTE, Luís R.; VIANA, Fernando. **Matemática em Contextos:** Função exponencial, função logarítmica e sequência. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2017 - Exame Nacional do Ensino Médio 2017:** 2º dia. Brasília: INEP, 2017. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/2017_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 5 abr. 2025.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2020 - Exame Nacional do Ensino Médio 2020:** 2º dia. Brasília: INEP, 2020. Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2020_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 5 abr. 2025.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2014 - Exame Nacional do Ensino Médio 2014:** 2º dia. Brasília: INEP, 2024. Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2024_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 5 abr. 2025.

- Sites para a construção dos gráficos:
  - https://www.geogebra.org/
  - https://www.desmos.com/calculator?lang=pt-BR