GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL — GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

8º Ano | Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

SISTEMA DE EQUAÇÕES COM SOLUÇÃO GRÁFICA

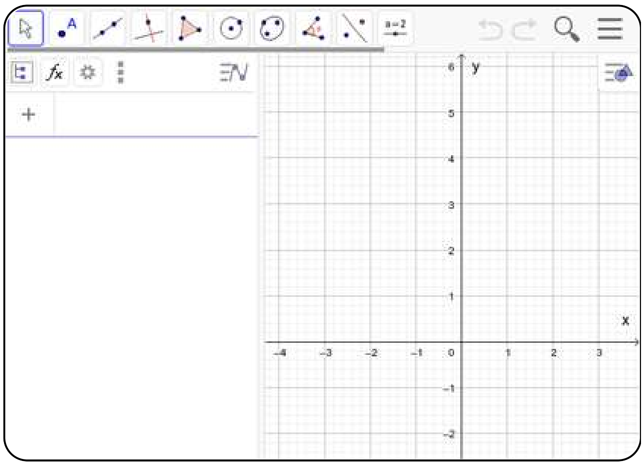
HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EF08MA08 - Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.	• Resolver um sistema de duas equações lineares a duas variáveis algébrica e geometricamente. • Identificar a posição relativa das retas que representam no plano cartesiano um sistema de duas equações lineares a duas variáveis. • Resolver problemas que podem ser modelados por sistemas lineares do 1º grau.	**D077_M** Corresponder um sistema de equações polinomiais de 1º grau à uma situação problema descrita textualmente. **D089_M** Utilizar sistemas de equações polinomiais de 1º grau na resolução de problemas. **D149_M** Interpretar informações apresentadas por meio de coordenadas cartesianas.

Contextualização

O GEOGEBRA

O GeoGebra é uma poderosa ferramenta tecnológica que transforma o estudo da Matemática em uma experiência dinâmica e interativa. No contexto da representação gráfica de sistemas de equações, ele permite visualizar a relação entre as equações e suas soluções de maneira intuitiva. Com o GeoGebra, é possível traçar retas relacionadas a equações, identificar pontos de interseção e explorar diferentes cenários ao modificar coeficientes em tempo real. Dessa forma, os estudantes desenvolvem uma compreensão mais profunda dos conceitos algébricos e geométricos, tornando a aprendizagem mais acessível e envolvente.

O GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter em 2001, durante seu doutorado na Universidade de Salzburg, Áustria, com o objetivo de unir geometria, álgebra e cálculo em uma única ferramenta interativa. Desde então, tornou-se um dos softwares educacionais mais utilizados no ensino da Matemática, permitindo a visualização e exploração de conceitos de forma dinâmica.



https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT

Considere o seguinte problema: em uma sessão de cinema, foram vendidos dois tipos de ingressos: meia-entrada e inteira. No total, 300 ingressos foram vendidos, arrecadando R$ 6 600,00. Sabendo que o ingresso de meia-entrada custa R$ 15,00 e o ingresso inteiro custa R$ 30,00, quantos ingressos de cada tipo foram vendidos?

Veremos nesse material como ***utilizar o software geogebra*** para encontrar uma solução gráfica para este sistema. Você aprenderá a ***modelar e resolver problemas utilizando sistemas de equações do 1º grau***, além de ***interpretar informações no plano cartesiano***. Esses conceitos são fundamentais para compreender relações entre grandezas e resolver situações cotidianas de forma matemática.

Conceitos e Conteúdos

CORRESPONDÊNCIA ENTRE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES E SITUAÇÕES-PROBLEMA

Um sistema de equações do 1° grau é um conjunto de duas ou mais equações com duas ou mais incógnitas. Podemos usá-lo para representar e resolver situações do dia a dia. Exemplo:

Uma sorveteria vende casquinhas de sorvete nos tamanhos pequeno e grande. No total, foram vendidas 120 casquinhas, arrecadando R$ 540,00. Sabendo que a casquinha pequena custa R$ 4,00 e a grande R$ 6,00, quantas de cada tipo foram vendidas?

Modelagem do problema: Seja ***x*** o número de ***casquinhas pequenas*** e ***y*** o número de ***casquinhas grandes***.

$$\begin{cases} x + y = 120 & \longrightarrow \textit{total de casquinhas} \\ 4x + 6y = 540 & \longrightarrow \textit{valor total obtido} \end{cases}$$

Esse sistema de equações representa matematicamente o problema e pode ser resolvido por substituição ou adição.

Resolução pelo Método da Substituição

Seguiremos 3 passos:

1° - Isolamos uma incógnita na primeira equação:

$$x + y = 120$$
$$x = 120 - y$$

2° - Substituímos x = 120 - y na segunda equação:

$$4x + 6y = 540$$
$$4 \cdot (120 - y) + 6y = 540$$
$$480 - 4y + 6y = 540$$

Somamos (- *480)* nos dois membros.

$$480 - 480 - 4y + 6y = 540 - 480$$
$$2y = 60$$
$$y = \frac{60}{2}$$
$$y = 30$$

3° - Substituímos y = 30 na equação x = 120−y:

$$x = 120 - y$$
$$x = 120 - 30$$
$$x = 90$$

Resposta: Foram vendidas 90 casquinhas pequenas e 30 casquinhas grandes.

Resolução pelo Método da Adição

Também seguiremos 3 passos:

1° Multiplicamos a primeira equação por (- 4) para que os coeficientes de x nas duas equações se tornem opostos:

$$(-4) \cdot (x + y) = (-4) \cdot 120$$
$$-4x - 4y = -480$$
$$\begin{cases} -4x - 4y & = -480 \\ 4x + 6y & = 540 \end{cases}$$

2° Somamos as equações:

$$\begin{array}{rr} & -\cancel{4}x - 4y = -480 \\ + & \cancel{4}x + 6y = 540 \\ \hline & 2y = 60 \end{array}$$
$$y = \frac{60}{2}$$
$$y = 30$$

3° Substituímos y = 30 na equação x + y = 120:

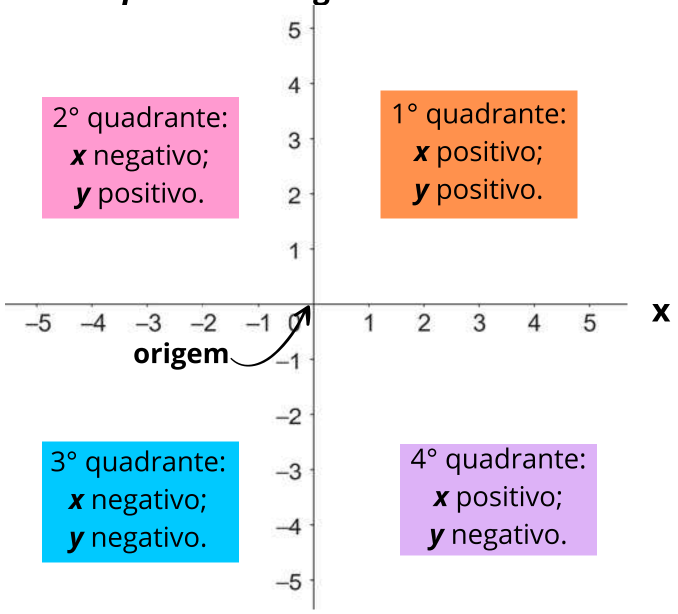
$$x + 30 = 120$$
$$x = 120 - 30$$
$$x = 90$$

Logo, foram vendidas 90 casquinhas pequenas e 30 casquinhas grandes.
Ambos os métodos levaram à mesma solução!

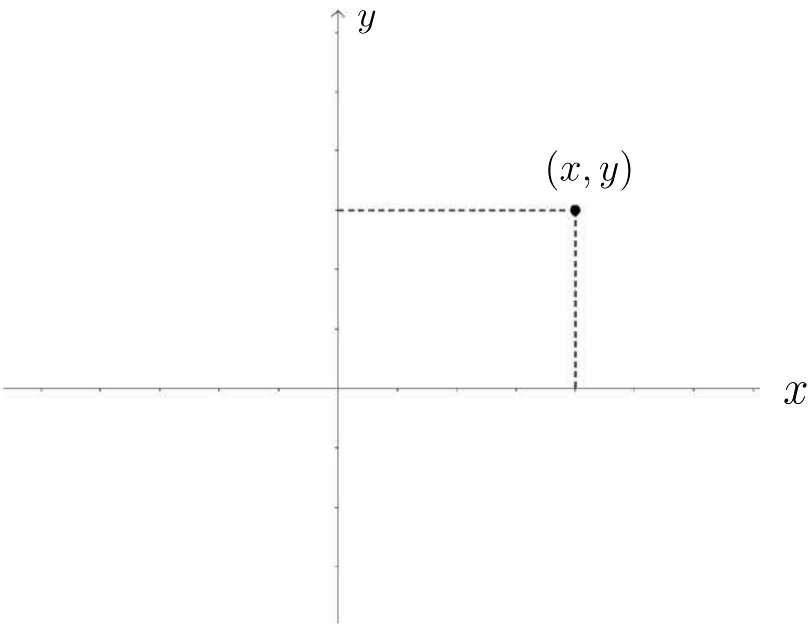
INTERPRETAÇÃO DE COORDENADAS CARTESIANAS

O plano cartesiano é um sistema de coordenadas formado por dois eixos perpendiculares que se intersectam no valor (0,0) que é a coordenada do centro ou origem. O plano cartesiano é dividido em 4 quadrantes ou regiões. Em cada quadrante os valores de ***x*** e ***y*** variam entre ***positivo*** e ***negativo***.

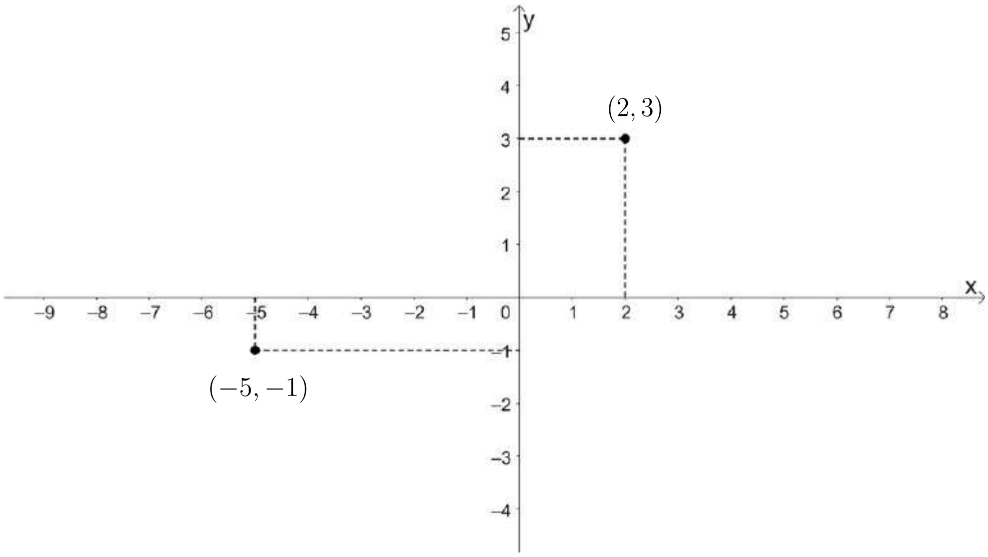
- Eixo ***x*** (horizontal).
- Eixo ***y*** (vertical).
- Quadrantes (1°, 2°, 3° e 4°).
- Origem (0,0).



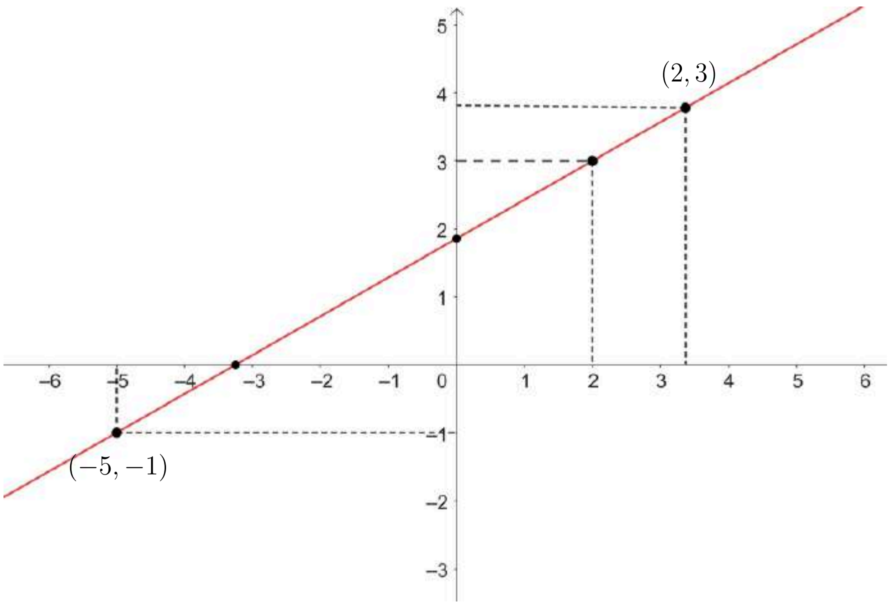
Cada ponto no plano cartesiano é representado por um par ordenado (***x***,***y***), onde ***x*** indica a posição no eixo horizontal e ***y*** no vertical.



Exemplo de Aplicação: Os pontos A (2, 3) e B (−5, −1) representam locais em um mapa. Você pode usar o GeoGebra para visualizar pontos e gráficos de equações no plano cartesiano.



Agora vamos aprofundar nosso conhecimento. Se traçarmos uma reta passando por estes dois pontos, esta representará uma equação do 1° grau. Todos os pontos desta reta serão as **soluções reais** da equação do 1° grau.



Você pode usar o GeoGebra para visualizar pontos e gráficos de equações no plano cartesiano. Observe os seguintes passos:

Passo 1: Acesse o GeoGebra

1. Abra um navegador e acesse https://www.geogebra.org/.

2. Na aba superior encontre "Calculadoras". Clique em "Calculadora Gráfica".

Você sabia?

As **soluções reais** de uma equação são os valores que, quando atribuídos à(s) incógnita(s), tornam a igualdade verdadeira e pertencem ao conjunto dos Números Reais.
Chamamos de **Números Reais** o conjunto de elementos representados pela letra maiúscula R, que inclui os:

- **Números Naturais (N):**

  N = {0, 1, 2, 3, 4, 5,...}

- **Números Inteiros (Z):**

  Z= {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}

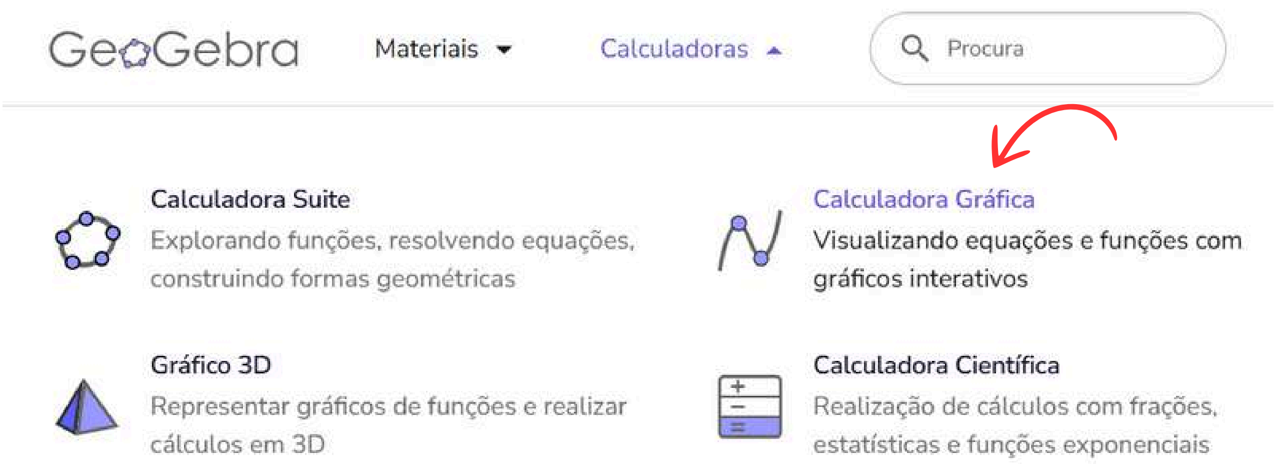
- **Números Racionais (Q):**

  Q $=\{\ldots,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{-5}{4},\ \ldots\}$

- **Números Irracionais (I):**

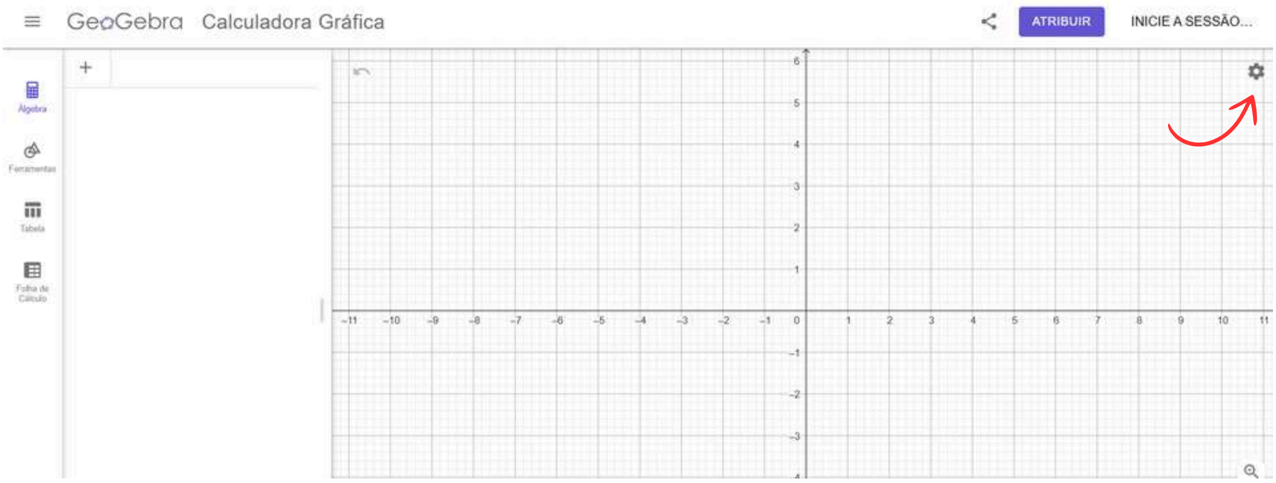
  I $=\{\ldots,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{7},\ \pi\ldots\}$

O conjunto dos Números Irracionais e dos Números Reais serão estudados com mais profundidade a partir do 9° ano.



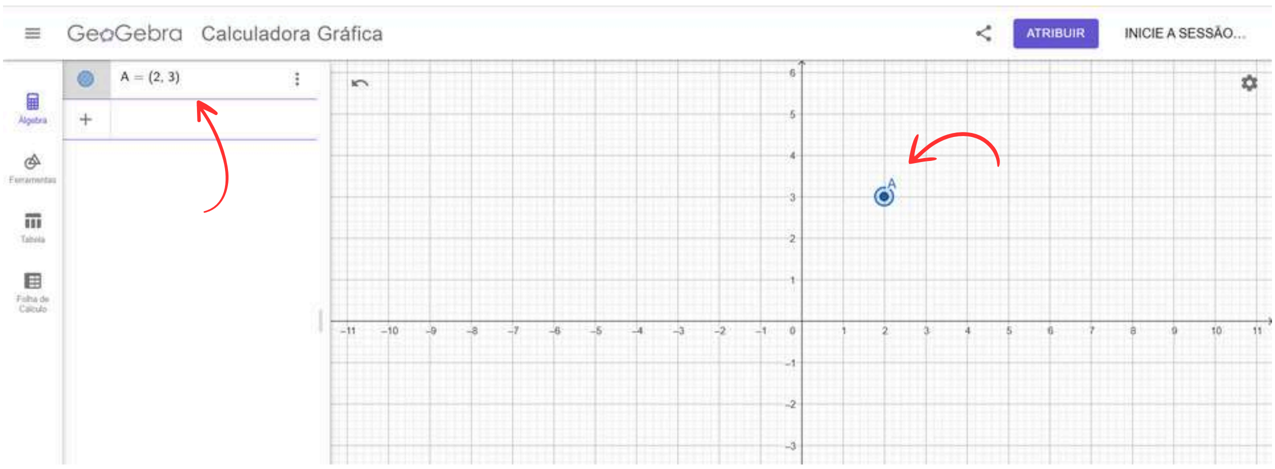
Passo 2: Configure a Janela Gráfica

- Você verá o plano cartesiano. Se necessário, use o botão de configuração (ícone de engrenagem) para ajustar a grade e eixos.



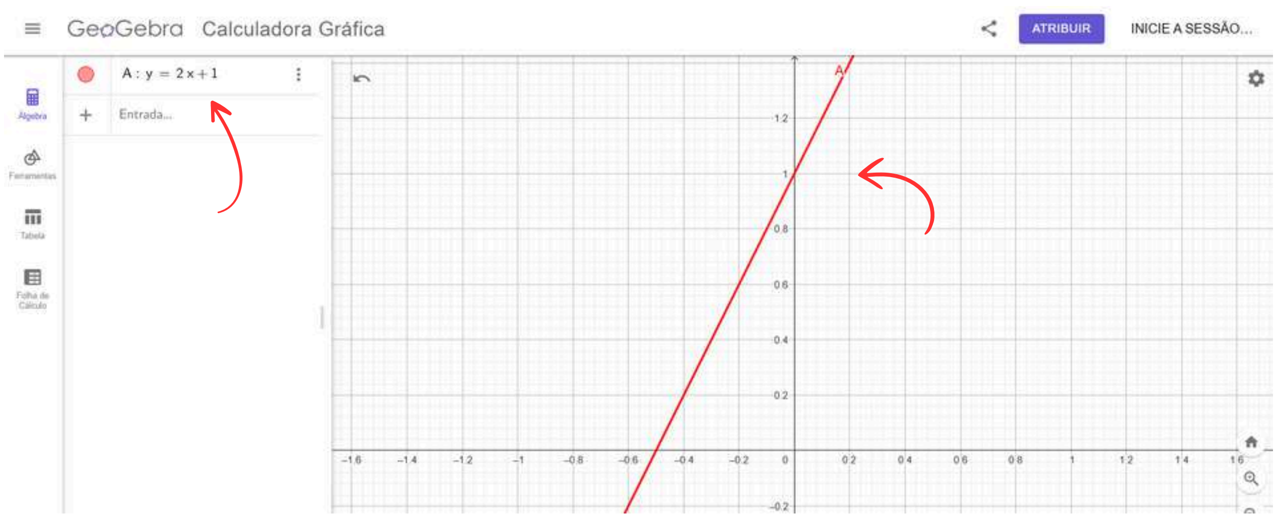
Passo 3: Inserindo Pontos no Plano Cartesiano

No campo de entrada na parte inferior, digite um ponto no formato (x, y). Exemplo: (2,3). Pressione Enter e o ponto aparecerá no plano cartesiano.



Passo 4: Inserindo Equações de Retas e Funções

No mesmo campo de entrada, digite a equação da reta, como ***-2x + y = 1***.
Pressione Enter e o gráfico da equação será desenhado automaticamente.



Nota: a equação ***-2x + y = 1*** é equivalente à equação ***y = 2x +1***.

Com o estudo dos sistemas de equações e do plano cartesiano, você desenvolverá habilidades para modelar problemas do dia a dia e interpretar informações matematicamente. Pratique resolvendo exercícios e explorando gráficos no GeoGebra! Você se lembra do problema abordado na contextualização desse material? Vamos resolver com a ajuda desse *software* gráfico.

"*Em uma sessão de cinema, foram vendidos dois tipos de ingressos: meia-entrada e inteira*". Para construir um sistema de equações que represente esse problema, vamos modelar a quantidade de ingressos de meia-entrada para ser representada por ***x*** e os ingressos de uma entrada inteira por ***y***. "*No total, 300 ingressos foram vendidos, ...*" logo a primeira equação será:

$$x + y = 300$$

Continuando "... *arrecadando R$ 6.600,00. Sabendo que o ingresso de meia-entrada custa R$ 15,00 e o ingresso inteiro custa R$ 30,00, quantos ingressos de cada tipo foram vendidos?*"

$$15x + 30y = 6600$$

Assim nosso sistema será:

$$\begin{cases} x + y & = 300 \\ 15x + 30y & = 6\ 600 \end{cases}$$

Utilizando o *software* Geogebra, vamos inserir as duas equações acima. Agora basta clicar no encontro das retas que o Geogebra mostrará o ponto de intersecção. Este ponto é a solução do sistema.

Portanto serão 160 ingressos de meia-entrada e 140 ingressos de uma entrada inteira.

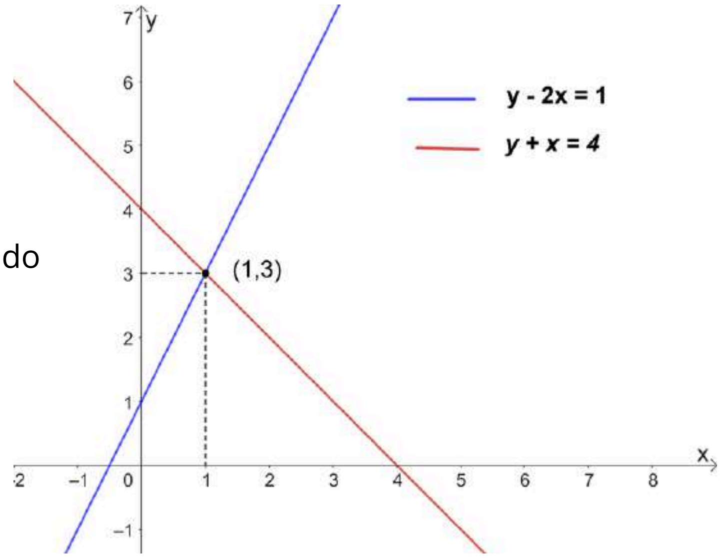
Identificando a posição relativa das retas no plano cartesiano

A partir da posição relativa de duas retas no plano cartesiano, é possível classificar sistema de equações do 1º grau. Assim temos:

- ***duas retas concorrentes*** - sistema de equações do 1º grau com um par ordenado (x,y) como solução. As retas se encontram neste par ordenado.

Exemplo:

$$\begin{cases} y - 2x &= 1 \\ y + x &= 4 \end{cases}$$

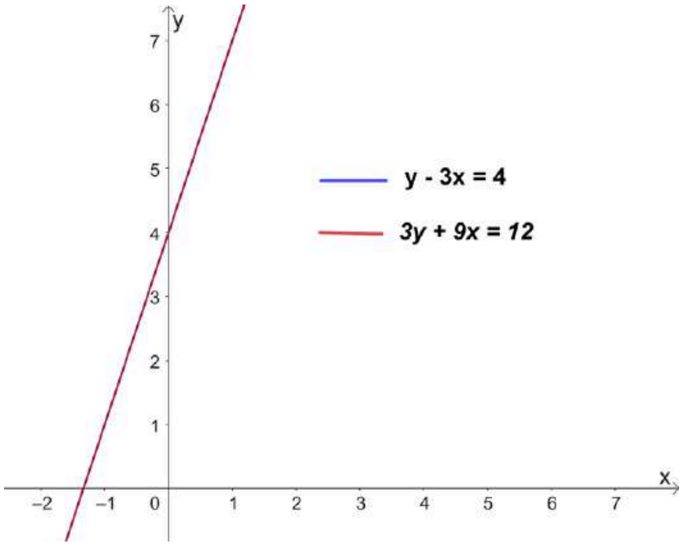


As retas se cruzam no ponto (1,3). Podemos comprovar isso substituindo o ponto (1,3) nas duas equações.

$$\boxed{\begin{aligned} y - 2x &= 1 \\ 3 - 2 \cdot 1 &= 1 \\ 3 - 2 &= 1 \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} y + x &= 4 \\ 3 + 1 &= 4 \end{aligned}}$$

- ***duas retas coincidentes*** - sistema de equações do 1º grau com infinitas soluções. As retas representam a mesma equação.

$$\begin{cases} y - 3x &= 4 \\ 3y - 9x &= 12 \end{cases}$$



Observe que se multiplicarmos a primeira equação por 3 obteremos a segunda equação.

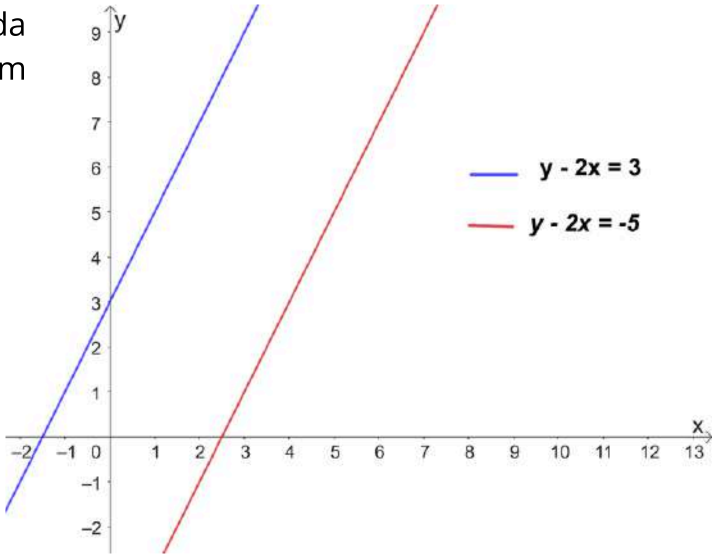
$$\boxed{\begin{aligned} 3 \cdot y + 3 \cdot (-3x) &= 3 \cdot 4 \\ 3y - 9x &= 12 \end{aligned}}$$

- ***duas retas paralelas*** - o sistema de equações do 1º grau não possui solução, ou seja, não existe um mesmo par ordenado (x,y) que seja solução das duas equações.

$$\begin{cases} y - 2x &= 3 \\ y - 2x &= -5 \end{cases}$$

Observe que se subtrairmos a segunda equação da primeira chegaremos a um resultado impossível (falso).

$$\begin{array}{r} \cancel{y} - \cancel{2}x = 3 \\ -(\cancel{y} - \cancel{2}x) = -(-5) \\ \hline 0 = 3 + 5 \\ 0 = 8 \end{array}$$



As retas paralelas possuem a mesma inclinação.

Conclusão

- Retas Paralelas: Nunca se cruzam, pois possuem a mesma inclinação, mas equações diferentes.
- Retas Coincidentes: São a mesma reta, pois possuem a mesma equação (ou equações equivalentes).
- Retas Concorrentes: Se cruzam em um único ponto, pois possuem inclinações diferentes.

Essas classificações ajudam a entender como as retas se comportam no plano cartesiano e como resolver sistemas de equações de forma prática.

Retomando o que você aprendeu

Vimos, nesse material, como utilizar o *software* Geogebra para encontrar uma solução gráfica para um sistema de equações do 1º grau. Aprendemos a:

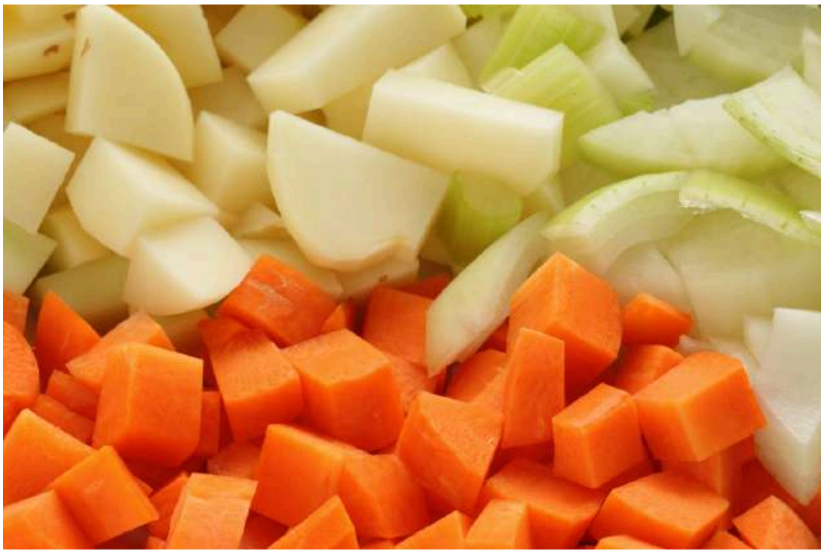
- modelar e resolver problemas utilizando sistemas de equações do 1º grau;
- interpretar informações no plano cartesiano; e
- identificar a posição relativa das retas no plano cartesiano.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

A cenoura e a batata são dois ingredientes bastante nutritivos. A cenoura é provavelmente uma das melhores fontes de vitamina A. Também se destaca pelo teor de fibras alimentares, potássio e vitamina B3. A batata é rica em fibras, vitaminas C e do complexo B, e potássio, minerais essenciais para o bom funcionamento do organismo.
Considerando esses benefícios, os dois amigos que moram dentro do mesmo condomínio, Lucas e Wellington, a pedido de suas mães, se encontraram em um domingo pela manhã para ir à feira do bairro. A mãe de Lucas pediu para ele comprar 3 kg de batata e 2 kg de cenoura, e ele gastou um total de R$ 28,00. Já a mãe de Wellington solicitou que comprasse 5 kg de batata e 4 kg de cenoura, pagando um total de R$ 50,00. Os itens comprados, mais a cebola que já havia sido comprada, serão utilizados para fazer salada de batata com cenoura e alimentar a grande família que irá se reunir no almoço.

a) Monte um sistema de equações do 1º grau que represente essa situação, considerando que o preço do quilograma (kg) de batata seja ***x*** e o de cenoura seja ***y***.
b) Resolva o sistema pelo método da adição e determine os preços por quilograma de cada item (batata e cenoura).



Design: Getty Images / Fonte: Canva

Resolução:
a) Podemos montar o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} 3x + 2y = 28 \\ 5x + 4y = 50 \end{cases}$

b) Resolvendo pelo método da adição:
Multiplicamos a primeira equação por (-2) para tornar os coeficientes de y opostos quando comparamos as duas equações.

$$(-2) \cdot (3x + 2y) = (-2) \cdot 28$$
$$-6x - 4y = -56$$

Somando a primeira equação com a segunda, eliminamos o valor de ***y*** e encontramos o valor de ***x***.

$$\begin{array}{r} -6x - \cancel{4}y = -56 \\ 5x + \cancel{4}y = 50 \\ \hline -x = -6 \end{array}$$
$$(-1) \cdot (-x) = (-1) \cdot (-6)$$
$$x = 6$$

Substituímos ***x*** = ***6*** na primeira equação:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 6 + 2y &= 28 \\ 18 + 2y &= 28 \\ 2y &= 28 - 18 \\ 2y &= 10 \\ y &= \frac{10}{2} \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Resposta: O preço de cada quilograma de batata é R$ 6,00 e o da cenoura é de R$ 5,00.

EXERCÍCIO 2

Dois ciclistas partem de pontos diferentes e seguem trajetórias retilíneas que podem ser modeladas em um plano cartesiano. O primeiro ciclista parte do ponto (0, 4) e segue uma trajetória descrita pela equação $y = -\frac{1}{2}x + 4$. O segundo ciclista parte do ponto (2, 0) e segue uma trajetória descrita pela equação $y = x - 2$.

a) Determine o ponto de encontro das duas trajetórias, resolvendo o sistema de equações do 1º grau formado pelas equações das trajetórias.
b) Interprete a resposta no contexto do plano cartesiano.

Respostas:
a) Temos o sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Igualando as equações:

$$-\frac{1}{2}x + 4 = x - 2$$

Multiplicamos ambos os membros por (-2) para eliminar a fração:

$$(-2) \cdot (-\frac{1}{2}x + 4) = (-2) \cdot (x - 2)$$
$$x - 8 = -2x + 4$$

Somamos $2x$ e adicionamos 8 em ambos os membros da equação:

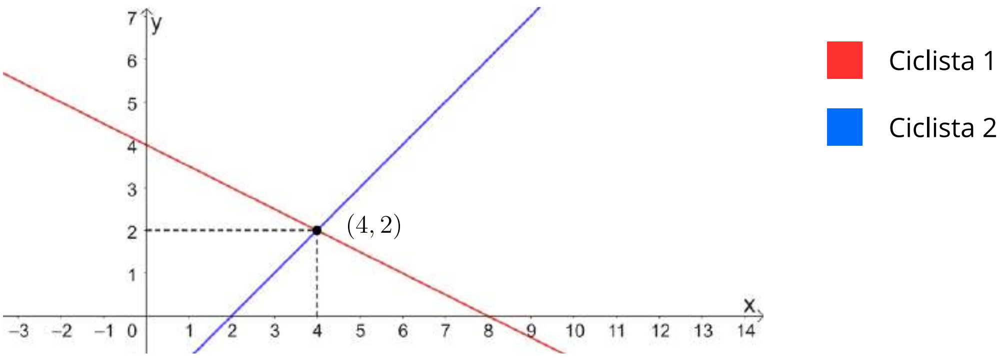
$$+x + 2x - \cancel{8} + \cancel{8} = -\cancel{2}x + \cancel{2}x + 4 + 8$$
$$3x = 12$$
$$x = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Substituímos ***x*** = ***4*** em uma das equações:

$$y = x - 2$$
$$y = 4 - 2$$
$$y = 2$$

Portanto o ponto de encontro será (4, 2).

b) No plano cartesiano, o ponto (4, 2) representa a posição onde as duas trajetórias se encontram. Ou seja, em algum momento eles passarão pelo mesmo ponto.



EXERCÍCIO 3

Represente graficamente os sistemas de equações do 1° grau abaixo em um plano cartesiano e classifique a posição de suas retas em paralelas, concorrentes ou coincidentes.

$$A)\begin{cases} x-2y &= 10 \\ x-y &= 6 \end{cases} \qquad B)\begin{cases} 2x+3y &= 11 \\ 4x+6y &= 22 \end{cases} \qquad C)\begin{cases} 3x+y &= 7 \\ 6x+2y &= 1 \end{cases}$$

Resposta: **Vamos resolver o sistema do item *A*.**

$$\begin{cases} x-2y=10 \\ (x-y)\cdot(-1)=6\cdot(-1) \end{cases} \longrightarrow$$

Multiplicamos os dois membros da segunda equação por (-1).

$$+\begin{array}{r} \cancel{x}-2y=10 \\ -\cancel{x}+y=-6 \\ \hline -y=4 \end{array} \longrightarrow$$

Somamos as duas equações.

$$\begin{aligned} -y\cdot(-1)&=4\cdot(-1) \longrightarrow \\ y&=-4 \end{aligned}$$

Multiplicamos os dois membros por (-1) novamente.

Agora vamos substituir $y=-4$ na primeira equação.

$$\begin{aligned} x-2y&=10 \\ x-2\cdot(-4)&=10 \\ x+8&=10 \\ x+8+(-8)&=10-8 \longrightarrow \\ x&=2 \end{aligned}$$

Somamos (-8) nos dois membros.

Visto que o item ***A*** possui um par ordenado como solução do sistema, trata-se de um gráfico com duas retas concorrentes.

Vamos resolver o sistema do item *B*.

$$B)\begin{cases} 2x+3y &= 11 \\ 4x+6y &= 22 \end{cases}$$

Observando os coeficientes das incógnitas destas equações, podemos concluir que se trata da mesma equação com os coeficientes multiplicados por dois (ao comparar a primeira equação com a segunda).

$$\begin{cases} 2x+3y &= 11 \\ 4x+6y &= 22 \end{cases}$$

4 multiplicado por 2 é igual a 2.
6 multipicado por 2 é igual a 3.
22 multipicado por 2 é igual a 11.

Portanto, temos a mesma equação. Logo trata-se de um gráfico com duas retas coincidentes.

Vamos resolver o sistema do item C.

$$C)\begin{cases} 3x + y &= 7 \\ 6x + 2y &= 1 \end{cases}$$

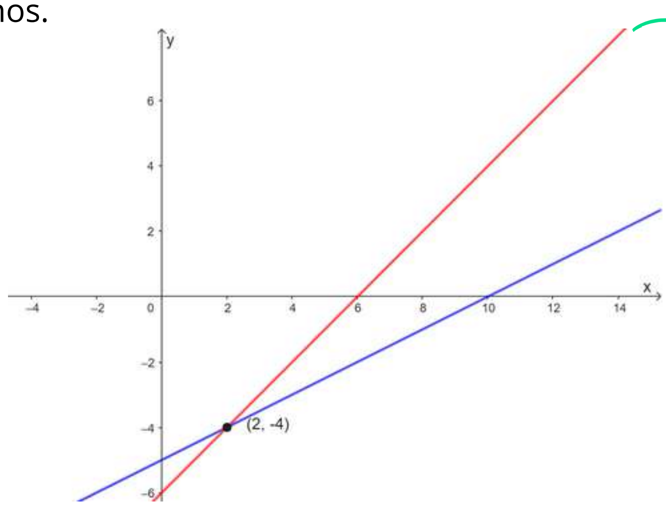
Multiplicamos os dois membros da primeira equação por (-2) para podermos ter valores opostos nos coeficientes de x.

$$\begin{cases} (-2) \cdot (3x + y) = (-2) \cdot 7 \\ 6x + 2y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{r} -6x - 2y = -14 \\ 6x + 2y = 1 \\ \hline 0 = -13 \end{array}$$

Mas isso é impossível!!!

Assim, como chegamos a um resultado impossível (falso), não temos um par ordenado que seja solução para as duas equações. Logo, trata-se de um gráfico com retas paralelas. A seguir, esboçaremos os gráficos dos três sistemas de equações do 1º grau que resolvemos.

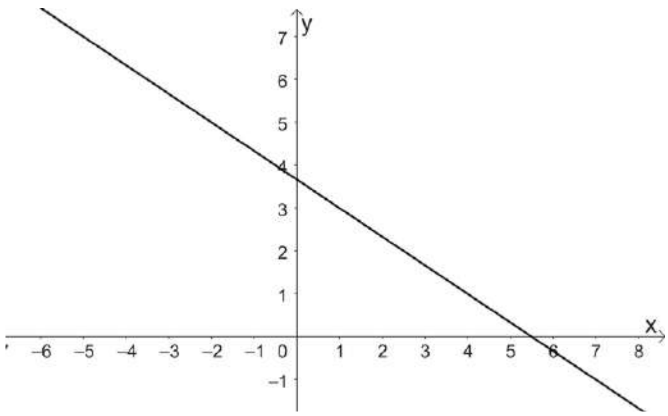
$$A)\begin{cases} x - 2y &= 10 \\ x - y &= 6 \end{cases}$$



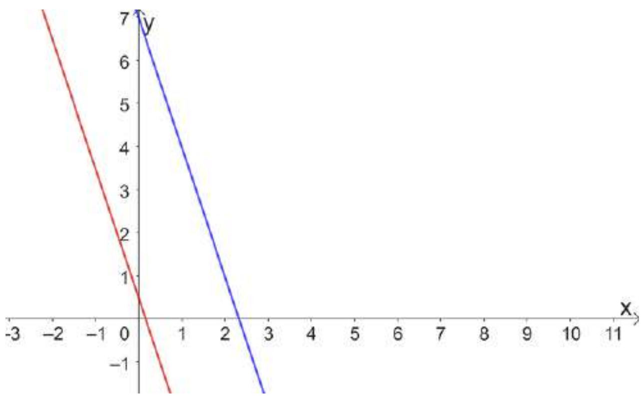
$x - y = 6$

$x - 2y = 10$

$$B)\begin{cases} 2x + 3y &= 11 \\ 4x + 6y &= 22 \end{cases}$$



$$C)\begin{cases} 3x + y &= 7 \\ 6x + 2y &= 1 \end{cases}$$



$6x + 2y = 1$

$3x + y = 7$

Material Extra

Equação da reta
https://www.geogebra.org/m/mvwtzg6s#material/dt8hkpej

Giovanni Júnior, José Ruy A conquista matemática : 8° ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2022. Páginas 161 a 163. Clique aqui.

Dante, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática). Página 213 a 215. Clique aqui.

Atividades

ATIVIDADE 1

Resolva o sistema de equações pelo método da adição e o represente graficamente:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

ATIVIDADE 2

Resolva o sistema de equações pelo método da substituição e represente no gráfico:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

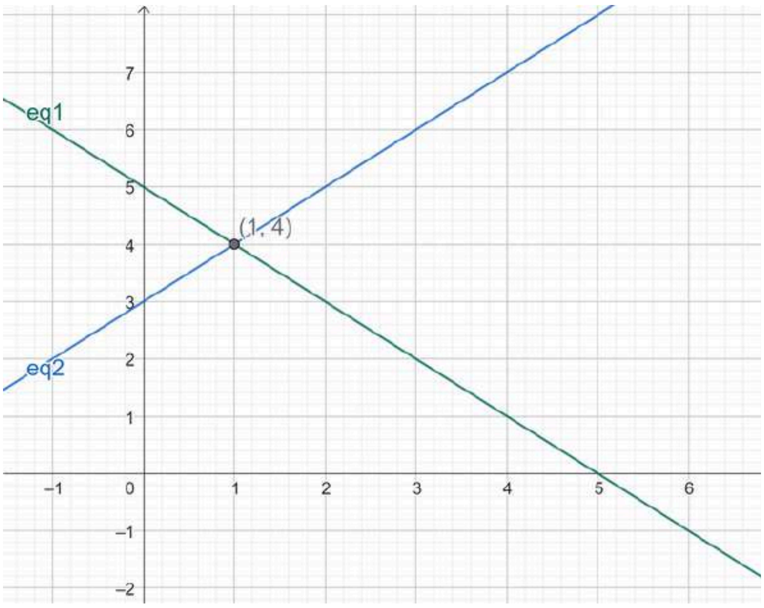
ATIVIDADE 3

O dobro de x adicionado ao triplo de y resulta em 17. Se a diferença entre x e y é igual a 1, quais são esses números?

Monte um sistema de duas equações do 1º grau, resolva-o e represente-o graficamente.

ATIVIDADE 4

Marque a única opção que mostra o sistema de equação do 1º grau correspondente ao gráfico a seguir.



A) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ C) $\begin{cases} 5x + y = 5 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + y = 3 \end{cases}$

ATIVIDADE 5

Arthur é 8 anos mais velho do que sua irmã Isadora. A soma de suas idades é 26 anos.

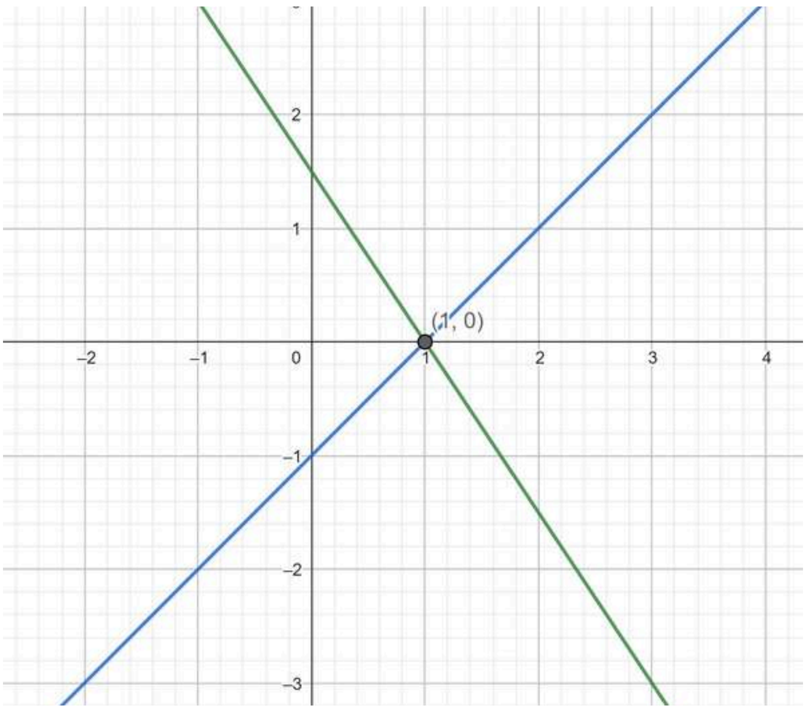
A) Escreva um sistema de equações que possibilite determinar a idade de cada um dos irmãos.

B) Qual é a idade de cada um dos irmãos?

C) Ao representar geometricamente o sistema escrito por você no item a, obteremos retas concorrentes, paralelas ou coincidentes?

ATIVIDADE 6

A imagem a seguir mostra a representação geométrica de um sistema de equações de 1ºgrau. Marque a única opção que apresenta a representação algébrica desse sistema de equações.



A) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

D) $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

ATIVIDADE 7

Resolva graficamente cada sistema de equações do 1º grau apresentado e indique se as retas das equações são concorrentes, paralelas ou coincidentes.

A) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

ATIVIDADE 8

Participaram de uma excursão x homens e y mulheres, sendo a maioria homens. A soma das quantidades de homens e de mulheres é igual a 130 pessoas e a diferença entre a quantidade de homens e a de mulheres é igual a 12 pessoas. Quantos homens e quantas mulheres participaram dessa excursão?

ATIVIDADE 9

(VUNESP) Em um sítio, Marcos cria cavalos e galinhas. Multiplicando o número de cavalos por quatro e somando nove obtemos o número de galinhas no sítio. Sabendo-se que entre esses animais a quantidade de patas (pés) é 186, podemos afirmar que:

A) existem 65 galinhas no sítio.

B) o número de galinhas é um número par.

C) o número de cavalos é um múltiplo de seis.

D) o número de galinhas é menor que o número de cavalos.

E) existem 21 cavalos no sítio.

ATIVIDADE 10

(OBMEP-2021) Na volta de uma pescaria, Paulo disse para César: "Se você me der um de seus peixes, eu ficarei com o dobro do número de peixes com que você ficar". César afirmou: "E se, em vez disso, eu jogar um de seus peixes no rio, ficaremos com o mesmo número". Quantos peixes eles pescaram ao todo?

Referências

Dante, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática)

Giovanni Júnior, José Ruy A conquista matemática : 8° ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2022.

Sobre o Geogebra. Disponível em:
https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html#:~:text=GeoGebra%20foi%20criado%20em%202001,suporte%20para%20o%20seu%20uso.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

8º Ano| Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

EQUAÇÕES DA FORMA $ax^2 = b$

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM
EF08MA09 - Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.	• Resolver problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. • Elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Contextualização

A TERCEIRA PONTE DO ESPÍRITO SANTO

A Terceira Ponte, oficialmente chamada de Ponte Deputado Darcy Castello de Mendonça, é uma das principais obras de engenharia do Espírito Santo. Com cerca de 3,3 km de extensão e 70 metros de altura, é uma das maiores pontes do Brasil e um símbolo da infraestrutura capixaba.

Ponte Darcy Castello de Mendonça -ES.
Foto: Getty Images / Fonte: Canva

Curiosidades sobre a Terceira Ponte:

- A velocidade máxima permitida é de 70 km/h;
- Sua altura foi projetada para permitir a passagem de navios de grande porte;
- Após mais de três décadas, a Ponte é a principal conexão entre Vila Velha e Vitória e conta com um tráfego de cerca de 41 mil veículos por dia.

Disponível em: https://es360.com.br/dia-a-dia/noticia/34-anos-de-terceira-ponte-conheca-a-historia-do-cartao-postal/
Acesso: 16/05/2025.

Considere que em um intervalo de tempo passaram sobre ela 520 automóveis no sentido Vila Velha a Vitória. É possível saber a posição de cada veículo em um determinado instante? Podemos calcular a posição (em metros) em função do tempo (em segundos) dos veículos que se movimentam em movimento uniformemente variado por meio de uma expressão quadrática do tipo $ax^2 = b$.

Mas afinal de contas, o que é uma equação do tipo $ax^2 = b$?
Como resolver equações do tipo $ax^2 = b$?
Você aprenderá sobre isso nesse material. Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

EQUAÇÃO QUADRÁTICA

Uma equação quadrática, também chamada de equação do 2º grau é uma expressão matemática que envolve um termo com a incógnita elevada ao quadrado (sendo esse o maior expoente da incógnita). No caso específico do tipo $ax^2 = b$, temos:

- ***a*** é o coeficiente que multiplica ***x²***. O valor de ***a*** nunca será zero.
- ***b*** é um número qualquer.
- ***x*** é a incógnita, ou seja, o valor que queremos encontrar.

Veja alguns exemplos:

$$2x^2 = 18$$

a = 2 ***b = 18***

$$x^2 = 36$$

a = 1 ***b = 36***

$$5x^2 = 125$$

a = 5 ***b = 125***

$$-\frac{x^2}{3} = -48$$

a = $-\frac{1}{3}$ ***b = -48***

RESOLVENDO EQUAÇÕES DA FORMA *ax²* = *b*

Você já estudou que resolver uma equação significa determinar os possíveis valores que satisfazem essa equação em um conjunto universo dado. Agora veremos como resolver equações quadráticas da forma $ax^2 = b$. A solução desse tipo de equação é encontrada isolando ***x²*** e depois extraindo a raiz quadrada dos dois lados da igualdade.

Exemplo 1.
Resolva a equação: $4x^2 = 64$ no conjunto dos números reais.

Passo 1: **Isolamos o termo x^2 dividindo os dois membros da equação por 4.**

$$\frac{\cancel{4}x^2}{\cancel{4}} = \frac{64}{4}$$

$$x^2 = 16$$

Aqui vale ressaltar uma importante propriedade dos número reais.

A **raiz quadrada** de um número real é sempre positiva. A raiz quadrada de um número real não pode ser negativa porque, por definição, um número ao quadrado é sempre positivo. Exemplo:

$$\sqrt{4} = 2 \;\; pois \;\; 2^2 = 4$$

Entretanto, um número negativo **elevado ao quadrado** terá resultado positivo. Exemplo:

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$$

Concluímos então que, sendo ***x*** e ***y*** dois números reais quaisquer:

$$x^2 = y, \; então, x = +\sqrt{y} \; ou \; x = -\sqrt{y}.$$

Agora, voltemos à nossa resolução.

Passo 2: Extraímos a raiz quadrada de ambos os membros da equação.

$$x^2 = 16$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$
$$x = \pm\sqrt{16}$$
$$x = \pm 4$$

Solução: Os valores de x que satisfazem a equação são 4 e -4.

Exemplo 2.
Resolva a equação 5x² = 45 no conjuto dos números reais.

1) Dividimos os dois lados por 5:

$$5x^2 = 45$$
$$\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}}x^2 = \frac{45}{5}$$
$$x^2 = 9$$

2) Aplicamos a raiz quadrada em ambos os membros da equação:

$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

Resposta: x pode ser 3 ou -3.

RESOLVENDO PROBLEMAS

Agora, vamos analisar situações que podem ser resolvidas com esse tipo de equação. Exemplo 1:

Maria está construindo um jardim quadrado. A área planejada do jardim é de 49 m². Qual é o comprimento de cada lado do jardim?

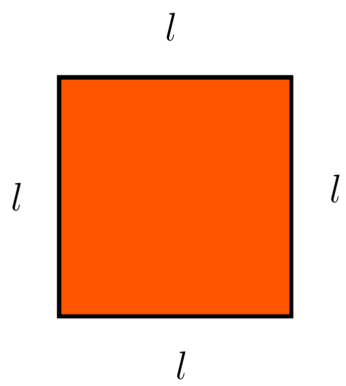
Resolução: A área de um quadrado é dada por:

$$A = l^2$$

onde l representa a medida do lado do quadrado e *A* representa sua área. Como a área é de 49 m², podemos substituir esse valor na equação para encontrar a medida do lado:

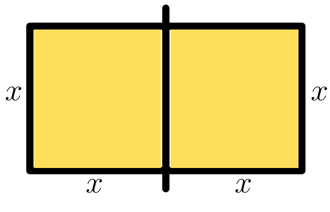
$$l^2 = A$$
$$l^2 = 49$$
$$l = \pm\sqrt{49}$$
$$l = \pm 7$$

Como a medida do lado não pode ser negativa, temos $l = 7$ m.



Exemplo 2:

William e seus amigos resolveram jogar beach tennis. Para demarcar a quadra, fizeram um retângulo composto por 2 quadrados, com uma área total de 50 m², conforme a figura a seguir. Determine a medida x do lado desses quadrados.



Resolução:
O retângulo que demarca a quadra tem como dimensões ***2x*** para o comprimento e ***x*** para a largura. Como a área da quadra é 50 m², podemos organizar a seguinte equação: $b \cdot h = A \rightarrow 2x \cdot x = 50 \rightarrow 2x^2 = 50$

- Dividimos os dois lados por 2:

$$2x^2 = 50$$
$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x^2 = \frac{50}{2}$$
$$x^2 = 25$$

- Tiramos a raiz quadrada de 25.

$$x^2 = 25$$
$$x = \pm\sqrt{25}$$
$$x = \pm 5$$

Assim, o lado de cada quadrado que compõe a quadra mede 5 m (considera-se para medida o valor positivo).

3) Resolver a equação $36x^2 = 1$ no conjunto dos números reais.

$$36x^2 = 1$$
$$\frac{\cancel{36}}{\cancel{36}}x^2 = \frac{1}{36}$$
$$dividimos\ \ os\ \ dois\ \ membros\ \ por\ \ 36.$$
$$x^2 = \frac{1}{36}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{36}}$$
$$x = \pm\frac{1}{6}$$

Logo, os números $+\frac{1}{6}$ e $-\frac{1}{6}$, são as soluções da equação.

4) Resolver a equação $x^2 + 5 = 0$ no conjunto dos números reais.
Neste caso, começamos isolando x² no primeiro membro, somando o número -5 no dois membros.

$$x^2 + 5 = 0$$
$$x^2 + 5 - 5 = 0 - 5$$
$$x^2 = -5$$
$$x = \pm\sqrt{-5}$$

Neste ponto, entendemos que esta equação do 2° grau não possui soluções, visto que a raiz quadrada de -5 não é um número real.

Analisando esses exemplos podemos concluir que uma equação incompleta do 2° grau do tipo $ax^2 = b$:

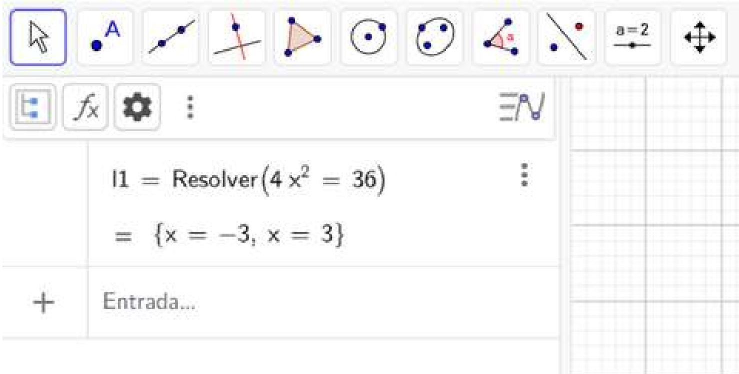
- ou terá duas raízes reais e opostas;
- ou não admitirá raízes reais;
- ou terá uma raiz igual a zero, se b for igual a zero.

USO DE TECNOLOGIAS PARA RESOLVER EQUAÇÕES

Podemos usar calculadoras científicas ou aplicativos como o *GeoGebra* para resolver equações rapidamente. No *GeoGebra*, por exemplo, basta realizar os seguintes passos:

- Acesse o site do GeoGebra em *https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT* ou por meio do *QR Code* abaixo.

- Digite "Resolver(4 x^2=36)" na barra de entrada.



- O software mostrará as soluções imediatamente!

Revisando o que você aprendeu

As equações do segundo grau do tipo $ax^2 = b$ aparecem em muitos problemas do dia a dia. Saber resolvê-las ajuda a entender melhor situações envolvendo áreas e muito mais! Para resolver esse tipo de equação devemos:

- Isolar o termo x^2 no primeiro membro; e
- Extrair a raiz quadrada no segundo membro.

Agora, tente praticar mais para poder identificar e resolver problemas com equações incompletas do 2°grau!

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Resolva a equação $3x^2 = 27$.
Resposta: Para isolar x^2 no primeiro membro, dividimos os dois membros da equação por 3.

$$3x^2 = 27$$
$$\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} = \frac{27}{3}$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

Portanto ***x*** pode ser 3 ou -3.

EXERCÍCIO 2

Resolva a equação $-5x^2 = -1125$.

Resposta: Para isolar x^2 no primeiro membro, dividimos os dois membros da equação por -5.

$$\frac{-5x^2}{-5} = \frac{-1125}{-5}$$
$$x^2 = 225$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{225}$$
$$x = \pm\sqrt{225}$$
$$x = \pm 15$$

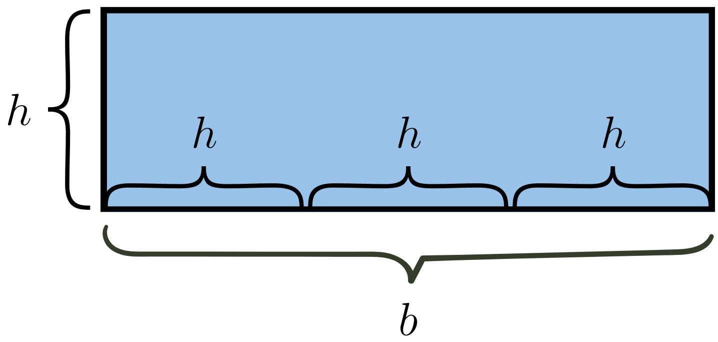
Portanto ***x*** pode ser 15 ou -15.

EXERCÍCIO 3

A área de uma região retangular mede 192 m². Sabendo que a medida da base dessa região é o triplo da medida da altura, determine essas medidas.

Resposta: A área de um retângulo é calculada multiplicando-se a base pela altura.

$$A = b \cdot h$$



Com base nos dados do problema podemos modelar a equação da seguinte maneira:

$$b \cdot h = A$$

Agora, substituímos *A* por 192 e b por $3h$.

$$3h \cdot h = 192$$
$$3h^2 = 192$$

Em seguida, dividimos os dois membros por 3 e calculamos o valor de *h*.

$$3h^2 = 192$$
$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}h^2 = \frac{192}{3}$$
$$h^2 = 64$$
$$h = \pm\sqrt{64}$$
$$h = \pm 8$$

Por se tratar da medida de um lado de um retângulo, o valor negativo não serve.

Como *h* = ***8*** metros, então a base desse retângulo será de ***24*** metros.

Material Extra

Giovanni Júnior, José Ruy A conquista matemática : 8° ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2022. Páginas 171 a 173. Clique aqui.

Dante, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática). Página 139 a 141. Clique aqui.

Atividades

ATIVIDADE 1

Em cada item, escreva uma equação no formato $ax^2 = b$, que possibilite resolver o problema.

A) O quadrado de um número é igual a 9.

B) O dobro do quadrado de um número é igual a 800.

C) O triplo do quadrado de um número é igual a 1875.

D) O dobro do quadrado de um número é igual a 392.

E) O triplo do quadrado de um número é igual a 3675.

ATIVIDADE 2

Em quais itens as equações apresentadas são do 2º grau do tipo $ax^2 = b$?

A) $x^2 = 9$

B) $x = 8$

C) $x^2 + x = 1$

D) $-x^2 = -4$

E) $x = -7$

F) $x^2 = 2^2$

G) $7x = 21$

H) $-2x^2 = x$

I) $2x^2 = 8$

J) $4x^2 - 6x = -5$

K) $5x^2 = 125$

L) $-x = 8$

ATIVIDADE 3

Luciana trabalha como enfermeira na cidade de Vitória. Ela sai de casa todos os dias pela manhã, saindo de Vila Velha para Vitória atravessando a 3ª ponte, localizada entre as duas cidades. O tempo necessário (indicado por t) para que ela se desloque 1568 metros pode ser calculado por meio da equação $2t^2 = 1568$. Determine o valor de t.

ATIVIDADE 4

Um jardim tem o formato de um quadrado e, em seu centro, há um lago e bastante vegetação. A área total do jardim é 144 m²,
Sabendo que x representa o comprimento do lado do jardim e que essa medida obedece à equação do segundo grau $x^2 = 144$, qual é o valor de x, ou seja, o comprimento do lado do jardim?

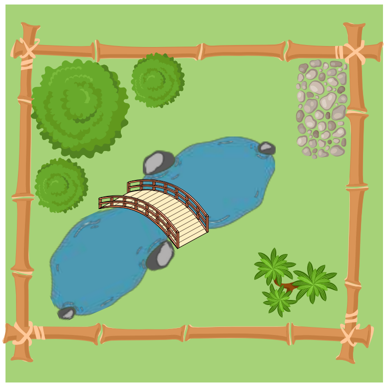


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 5

Roberto está investindo em energia renovável e decidiu instalar painéis solares em sua casa para reduzir sua conta de luz e ajudar o meio ambiente. Para isso, ele comprou 40 placas fotovoltaicas, todas com formato quadrado, que serão usadas para captar a luz do sol e convertê-la em eletricidade.

A área total das placas que ele comprou é de 16 000 cm², e ele quer saber qual é a medida do lado de cada placa para planejar a instalação no telhado.

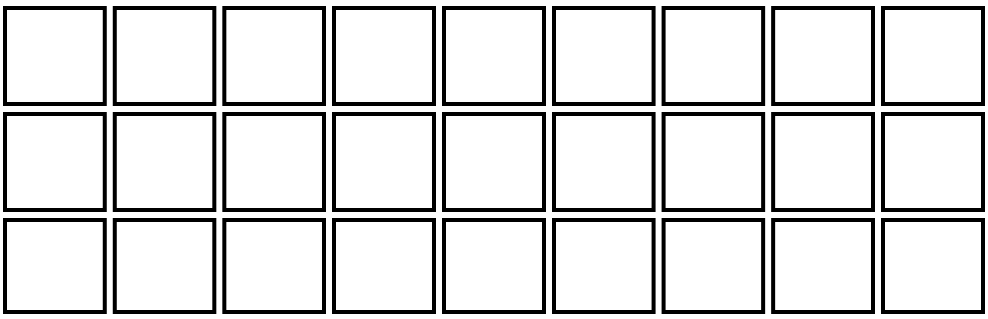
Escreva uma equação do tipo $ax^2 = b$ que represente a situação problema e resolva-o.

Design: Vectortradition / Fonte: Canva

ATIVIDADE 6

Tadeu decidiu revestir uma parede de sua casa com ladrilhos portugueses para resgatar a cultura e a tradição deixada pelos colonizadores em nosso país. Esses ladrilhos, também chamados de azulejos portugueses, são conhecidos por seus belos padrões geométricos e cores vibrantes, que enfeitam igrejas, praças e casarões históricos.

Para valorizar essa herança cultural, ele assentou 27 ladrilhos quadrados em sua parede, cobrindo uma área total de 19 683 cm². Considerando que essa medida corresponde apenas à área dos ladrilhos, desconsiderando o espaço ocupado pelo rejunte, determine qual é a medida do lado de cada ladrilho.



ATIVIDADE 7

Paulo quer contribuir para um mundo mais sustentável e decidiu criar uma horta em um terreno quadrado. Ele sabe que as hortas trazem benefícios ambientais, sociais, econômicos e para a saúde, pois ajudam a:

✅Reduzir o desperdício de alimentos e incentivar a compostagem;
✅Fornecer alimentos saudáveis para sua família e comunidade;
✅Economizar dinheiro, pois não precisará comprar algumas hortaliças no mercado;
✅Melhorar a qualidade do solo e do ar, promovendo a biodiversidade.

O terreno disponível para a horta tem 169 m² de área total e forma um quadrado perfeito. Paulo precisa calcular quanto mede o lado desse terreno para planejar a disposição dos canteiros. Determine essa medida.

Design: Pavelnaumov / Fonte: Canva

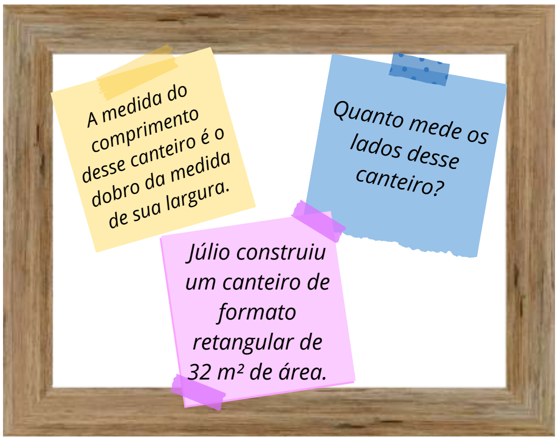
ATIVIDADE 8

Teresa participa de um projeto de sustentabilidade e reaproveitamento de materiais na escola. Para evitar o desperdício de tecido, ela decidiu confeccionar um tapete sustentável utilizando retalhos quadrados do mesmo tamanho, que sobraram de costuras anteriores. Teresa fez um tapete de 640 cm² usando retalhos de formato quadrado e com as mesmas medidas.

Quanto mede o lado de cada retalho quadrado que ela utilizou?

ATIVIDADE 9

Escreva o enunciado do problema formado pelas frases abaixo. Depois resolva-o.



Design: Red Devil's Images / Fonte: Canva

ATIVIDADE 10

Elabore um problema contextualizado em que a solução proposta utilize a equação do 2º grau da forma $ax^2 = b$.

Referências

Dante, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática)

Giovanni Júnior, José Ruy A conquista matemática : 8° ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2022.

Terceira Ponte. disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Terceira_Ponte