GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO

Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

8º Ano | Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

TRIÂNGULOS: CONSTRUÇÃO E CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA.

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM
EF07MA26 Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados. **EF08MA14** Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.	• Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados. • Compreender e aplicar os critérios de congruência de triângulos. • Identificar relações de congruência e simetrias em quadriláteros. • Diferenciar quadriláteros (quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e losangos) por suas propriedades geométricas relativas a lados, ângulos, diagonais e simetrias.

Contextualização

GEOMETRIA EM TODA PARTE

Você já percebeu como a geometria está presente em nosso dia a dia? Por exemplo, o triângulo é uma das formas geométricas mais poderosas e fundamentais na arquitetura, sendo amplamente utilizado tanto em estruturas de sustentação quanto em aspectos estéticos. Ele é muitas vezes escolhido para sua estabilidade , eficiência estrutural visual e concreto visual.

Um exemplo famoso do uso do triângulo na arquitetura é o Museu do Louvre , em Paris, especificamente a pirâmide de vidro projetada pelo arquiteto chinês-americano Ieoh Ming Pei. A pirâmide foi inaugurada em 1989 e é uma das edificações mais conhecidas do complexo do Museu do Louvre, que já existia desde o século XII.

Museu do Louvre
Design: Pixabay /Fonte: Canva

A pirâmide é composta por vidro e metal, e suas faces triangulares estabelecem um contraste marcante com a arquitetura clássica do Louvre, um dos museus mais tradicionais do mundo. Com 21,64 metros de altura e 35,24 metros de largura, sua base quadrada sustenta uma estrutura que evidencia o uso do triângulo tanto no formato das faces quanto na disposição dos painéis de vidro.

Para planejar e executar a construção dessa edificação, foram necessários conhecimentos sobre triângulos e polígonos.

Neste material, vamos aprender sobre os ***triângulos***, sua ***condição de existência***, ***propriedades*** e ***congruência***. Além disso, vamos estudar os ***quadriláteros*** de forma prática e fácil.

Conceitos e Conteúdos

O QUE SÃO TRIÂNGULOS?

Triângulos são figuras geométricas formadas por três lados e três ângulos. Eles podem ter diferentes formatos e tamanhos, mas sempre seguem algumas regras importantes.

Ele é uma das formas mais fortes e traz resultados na arquitetura e na engenharia. Isso acontece porque os triângulos distribuem o peso de maneira equilibrada, o que ajuda a suportar grandes pressões sem desmoronar.

Por exemplo, quando vemos uma ponte com uma treliça (aquela estrutura de ferro com formas triangulares), ou o telhado de uma casa em forma de "V" invertido (em duas águas), é o triângulo que ajuda a manter tudo firme e seguro.

Ponte treliçada
Design: Getty Images /Fonte: Canva

Telhado de duas águas
Design: Getty Images /Fonte: Canva

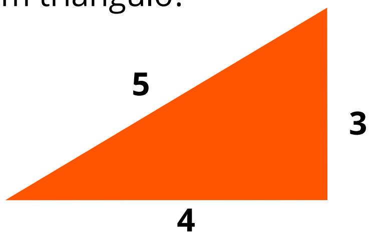
Como saber se podemos formar um triângulo?

Para que três segmentos formem um triângulo, eles precisam obedecer à seguinte regra: A soma de dois lados quaisquer deve ser sempre maior que o terceiro lado.

Exemplo:

Com os lados 3 cm, 4 cm e 5 cm, podemos formar um triângulo?

3 + 4 = 7 e 7 > 5 (lemos: 7 é maior que 5)
3 + 5 = 8 e 8 > 4 (lemos: 8 é maior que 4)
4 + 5 = 9 e 9 > 3 (lemos: 9 é maior que 3)

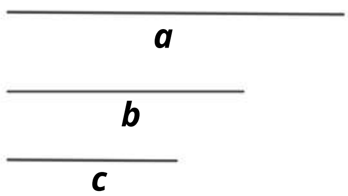


Design: Juswanda / Fonte: Canva

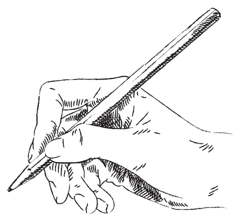
Sim! Esses segmentos formam um triângulo. Lembre: as três condições devem ser satisfeitas. Caso uma falhar, não é possível fechar e formar o triângulo.

Passos do algoritmo para desenhar o triângulo

Para esse procedimento utilizaremos um lápis, um compasso e uma régua.
Sejam ***a***, ***b*** e ***c*** três segmentos que satisfazem a condição de existência de um triângulo, tal que: **a > b > c** e **a < b + c**.

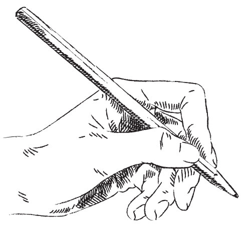


- Escolher um ponto como a base inicial.



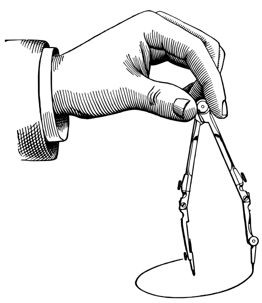
Design: Sketchify Education / Fonte: Canva

- Desenhar um segmento de reta correspondente ao lado ***a***, com extremidades em **A** e **B**.

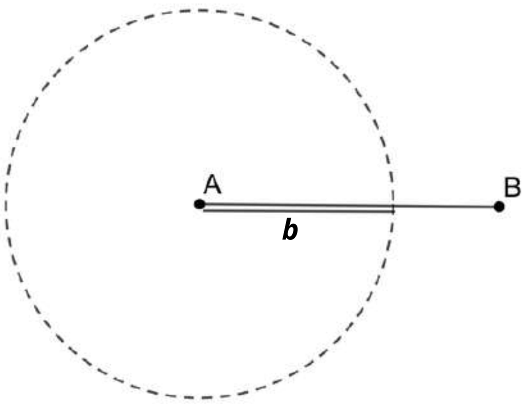


Design: Sketchify Education / Fonte: Canva

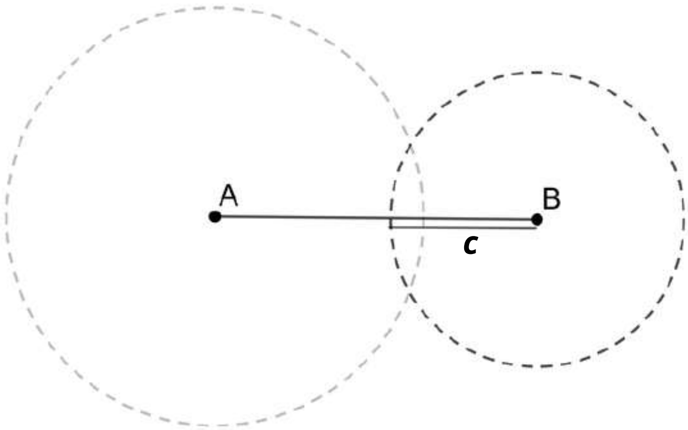
- Com um compasso, traçar uma circunferência de raio ***b*** a partir de uma extremidade do segmento **AB**. Escolheremos a extremidade **A**.

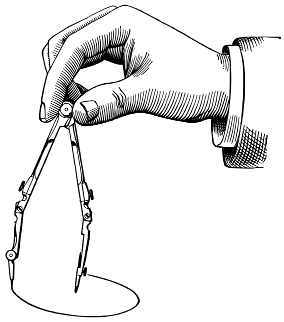


Design: Pixabay / Fonte: Canva



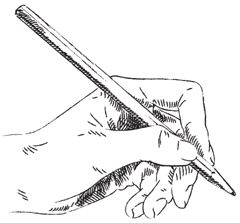
- Traçar outra circunferência de raio ***c*** a partir da outra extremidade do segmento.



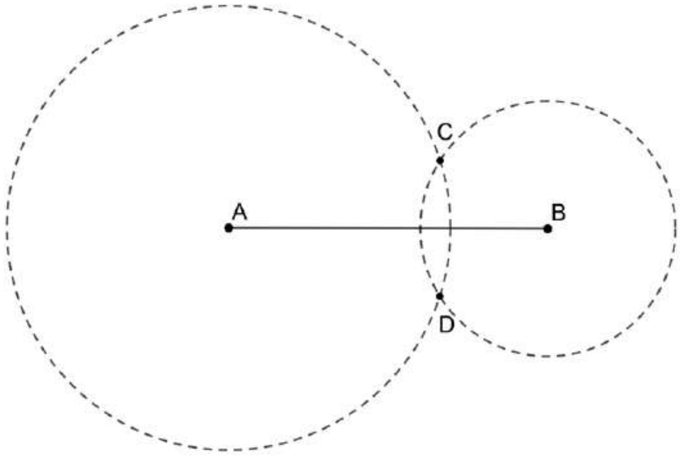


Design: Pixabay / Fonte: Canva

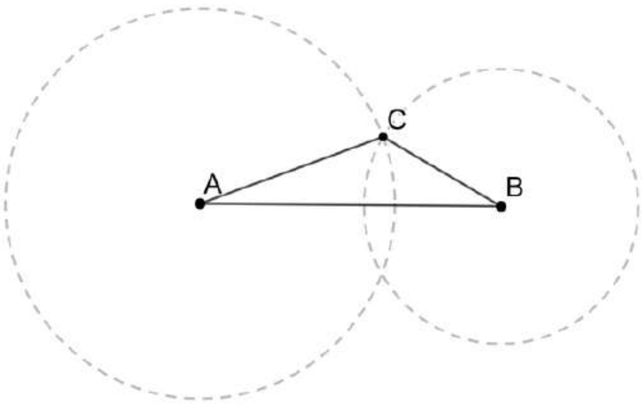
- Os arcos possuem dois pontos de intersecção **C** e **D**. Vamos escolher o ponto **C** como terceiro vértice do triângulo.

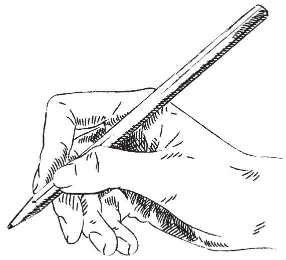


Design: Sketchify Education / Fonte: Canva

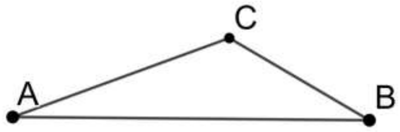


- Unir os pontos com segmentos de reta. O triângulo está construído.





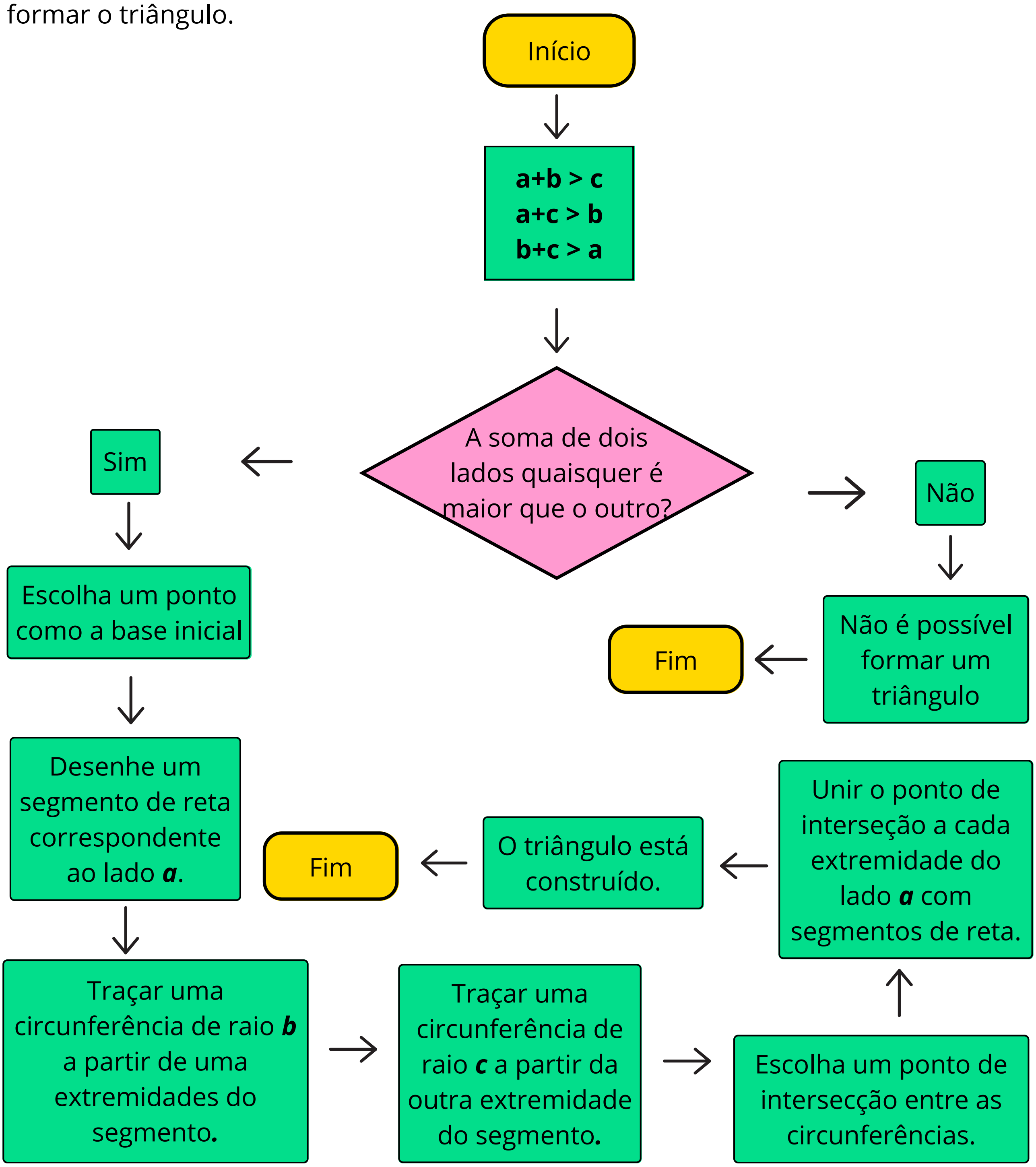
Design: Sketchify Education / Fonte: Canva



Agora, vamos utilizar um algorimo por meio de um ***fluxograma*** para nos ajudar nesse processo de construção de um triângulo.

Passos do Algoritmo para verificar a condição de existência

1°) ***Entrada dos Dados***: Ler as medidas dos três lados do triângulo, chamadas de ***a***, ***b*** e ***c***.
2°) ***Verificação da Existência do Triângulo***:
Conferir a condição de existência de um triângulo. Se a condição não for satisfeita, exibir uma mensagem informando que não é possível formar um triângulo e encerrar o algoritmo. Se acondição for satisfeita prosseguir com o algoritmo para formar o triângulo.



Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo

Vamos investigar como as medidas dos ângulos internos de um triângulo se relacionam por meio de uma atividade prática.
Siga as instruções abaixo.

1º) Pegue uma folha separada, desenhe um triângulo de qualquer tamanho e pinte cada ângulo com uma cor diferente.

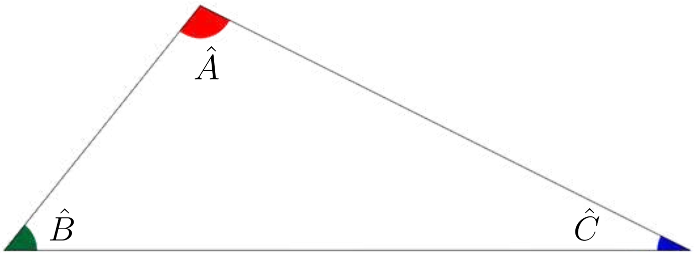


Imagem produzida no Geogebra

2º) Corte o triângulo em três partes, garantindo que cada pedaço contenha um dos ângulos internos.

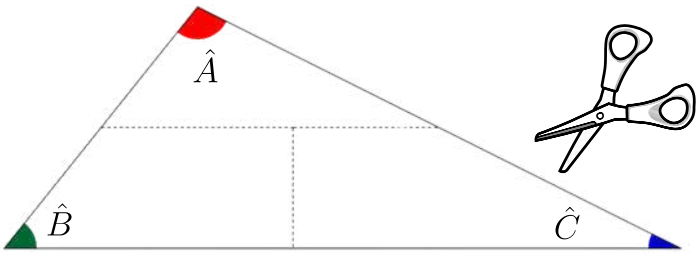


Imagem produzida no Geogebra

Design: Pixabay / Fonte: Canva

3º) Movimente os pedaços e alinhe os três ângulos de modo que seus vértices se encontrem, formando um ângulo raso (180°), como ilustrado na imagem.

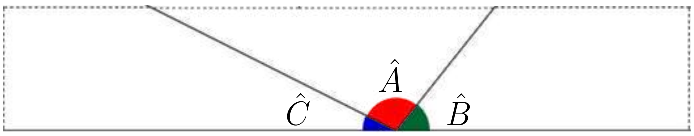


Imagem produzida no Geogebra

Se você medir os três ângulos internos de qualquer triângulo e somá-los, o resultado sempre será o ângulo raso, que mede **180°**.

Maneiras de representar um ângulo

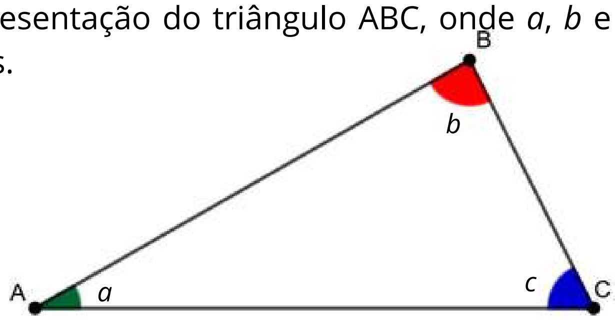
Podemos representar um ângulo de diferentes formas. Veja as mais usadas:

- Com o símbolo de ângulo (∠):
  ∠ABC → indica o ângulo com vértice em B, formado pelos pontos A, B e C.
  ∠A → se o contexto for claro, podemos usar só a letra do vértice.
- Com acento circunflexo (^) sobre a letra do vértice:
  Â → significa "ângulo A".
- Com letras gregas:
  Usamos símbolos como θ (teta), α (alfa) ou β (beta) para representar ângulos de forma geral.

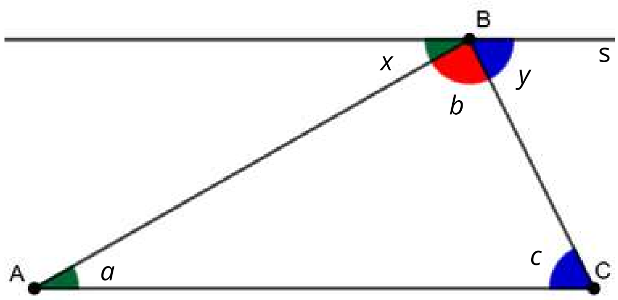
Exemplo: θ = 45°

Existe outra maneira de comprovar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso, isto é, igual a 180°. Para isso vamos retomar o que sabemos sobre ângulos determinados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

Consideremos a representação do triângulo ABC, onde *a*, *b* e *c* são as medidas dos seus ângulos internos.



Tracemos uma reta s, paralela à reta que contém o lado AC, passando por B. Essa paralela vai formar, com os lados AB e BC, dois ângulos cujas medidas indicaremos por *x* e *y*, conforme a figura.



Temos que:

$x + b + y = 180°$ (ângulo raso).

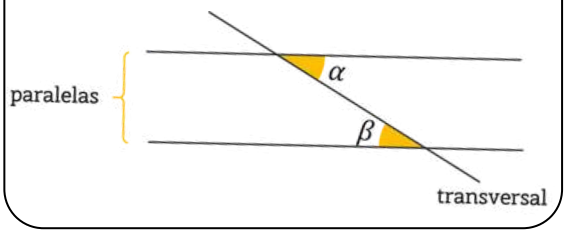
Como $x = a$ e $y = b$ então:

$a + b + c = 180°$.

Você se lembra?

Ângulos ***alternos internos*** são pares de ângulos que se formam na parte interna de duas retas paralelas, em lados opostos de uma reta transversal. São ângulos congruentes, ou seja, têm a mesma medida.

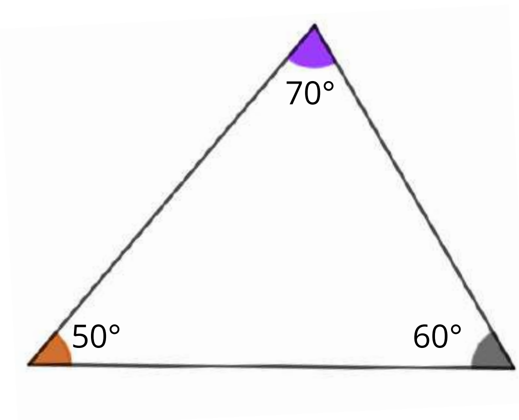
$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$$



Exemplo: Se um triângulo tem ângulos de 50° e 60°, qual será o terceiro ângulo?

Solução:

$$50^\circ + 60^\circ + x = 180^\circ$$
$$110^\circ + x = 180$$
$$Somamos\ \ -110^\circ\ \ no\ \ dois\ \ membros$$
$$-\cancel{1}10^\circ + \cancel{1}10^\circ + x = 180 - 110^\circ$$
$$x = 70^\circ$$



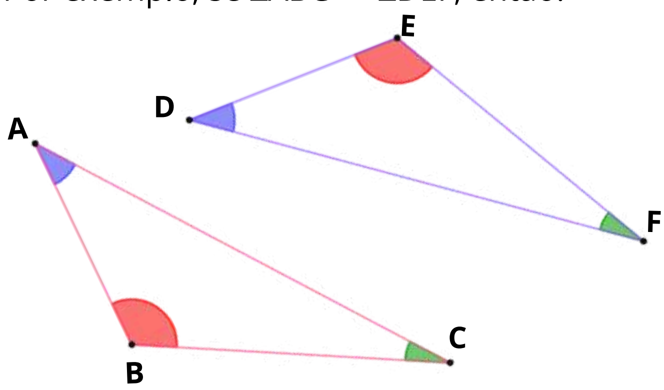
Portanto, o terceiro ângulo mede 70°.

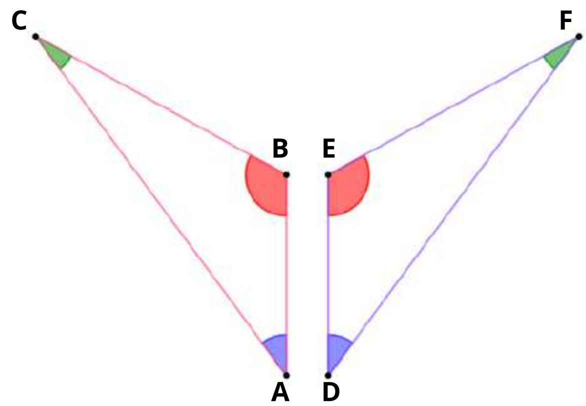
Congruência de Triângulos

Dois triângulos são **congruentes** quando possuem a mesma forma e tamanho. Isso significa que seus lados e ângulos correspondentes têm a mesma medida.

Quando comparamos dois triângulos, dizemos que lados correspondentes são aqueles que ocupam posições equivalentes em cada figura. Em triângulos congruentes, os lados correspondentes têm mesmo comprimento, e os ângulos correspondentes têm mesma medida.

Por exemplo, se ΔABC ≅ ΔDEF, então:



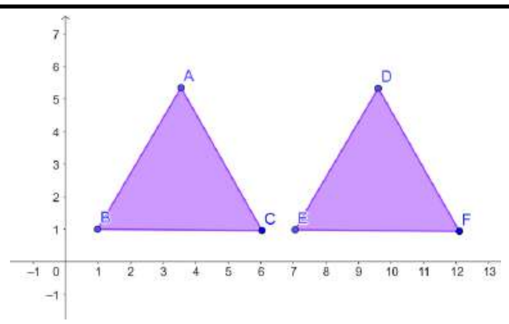
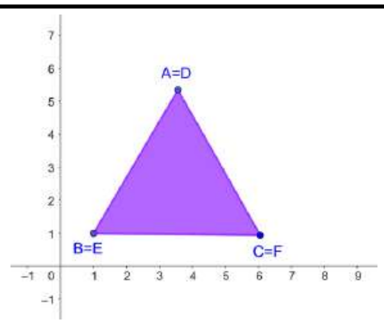


O lado AB corresponde ao lado DE
O lado BC corresponde ao lado EF
O lado AC corresponde ao lado DF

E, da mesma forma, os ângulos correspondentes são:

$$\angle \mathbf{A} \cong \angle \mathbf{D}$$
$$\angle \mathbf{B} \cong \angle \mathbf{E}$$
$$\angle \mathbf{C} \cong \angle \mathbf{F}$$

Essa correspondência é importante para comparar os triângulos e identificar suas partes congruentes.

Congruente	**Igual**
A posição da imagem em um sistema de coordenadas não influencia na sua congruência.	Figuras são iguais se forem colocadas na mesma posição e ocupando os mesmos pontos em um sistema de coordenadas
	

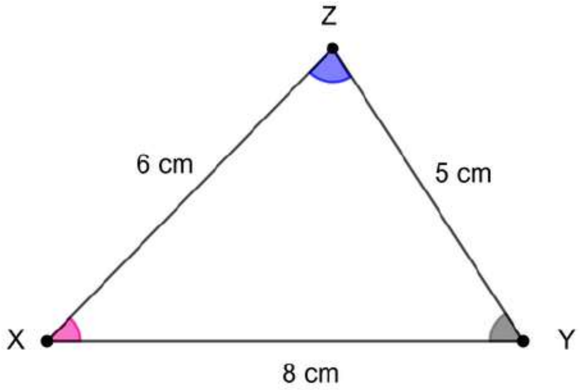
Relação entre Lados e Ângulos em um Triângulo

Dentro de um único triângulo, existe uma relação importante entre os lados e os ângulos opostos:

- Ao maior lado se opõe o maior ângulo;
- Ao menor lado se opõe o menor ângulo.

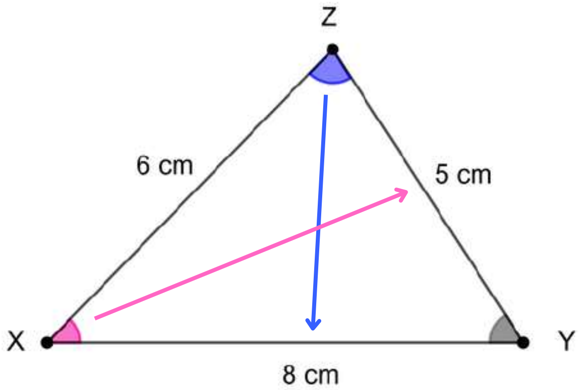
Isso acontece porque, quanto maior for a abertura do ângulo, mais distante ficam os dois lados que o formam — ou seja, o lado oposto precisa ser maior. Da mesma forma, um ângulo menor aproxima seus lados, formando um lado oposto menor.

Exemplo:
Considere o triângulo XYZ, com os seguintes lados:
XY = 8 cm
YZ = 5 cm
XZ = 6 cm



Nesse triângulo:

- O maior lado é XY, então o maior ângulo será o que está oposto a esse lado, ou seja, $\angle Z$.
- O menor lado é YZ, então o menor ângulo será $\angle X$.

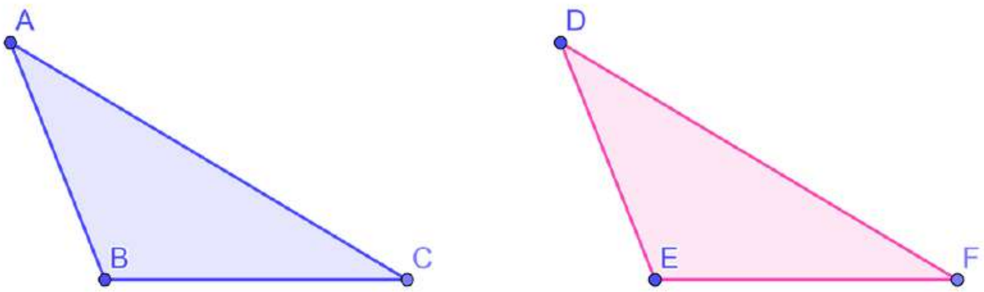


Entender quais são os lados correspondentes em dois triângulos nos permitirá compreender como comprovar a congruência entre eles e aplicar critérios, assunto que será considerado na próxima seção.
Além disso, dentro de um mesmo triângulo, saber que ao maior lado se opõe o maior ângulo (e vice-versa) ajuda a resolver problemas, fazer classificações e justificar construções geométricas.

Critérios para Congruência de Triângulos

Os quatro principais critérios para saber se dois triângulos são congruentes são:

1°) Lado-Lado-Lado (LLL): Quando as medidas dos três lados de um triângulo são iguais as medidas dos três lados de outro.
<u>Exemplo</u>: Considere os triângulos ABC e DEF.



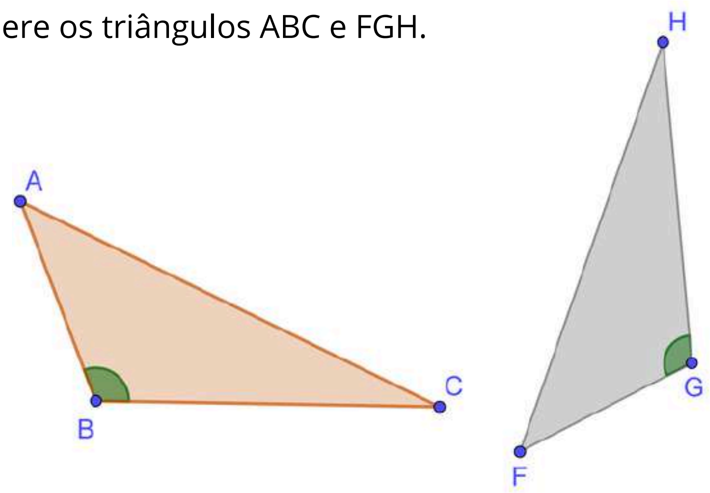
Símbolo para segmento

Símbolo de Congruência

$$Se \begin{cases} medida(\overline{AB}) = medida(\overline{DE}) \\ medida(\overline{AC}) = medida(\overline{DF}) \\ medida(\overline{BC}) = medida(\overline{EF}) \end{cases} \quad então \;\; \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

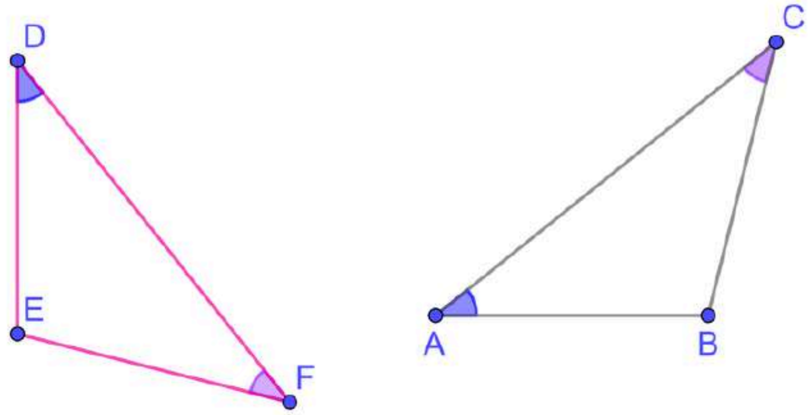
Símbolo para Triângulo

2°) Lado-Ângulo-Lado (LAL): Quando dois lados e o ângulo entre eles têm as mesmas medidas.
<u>Exemplo</u>: Considere os triângulos ABC e FGH.



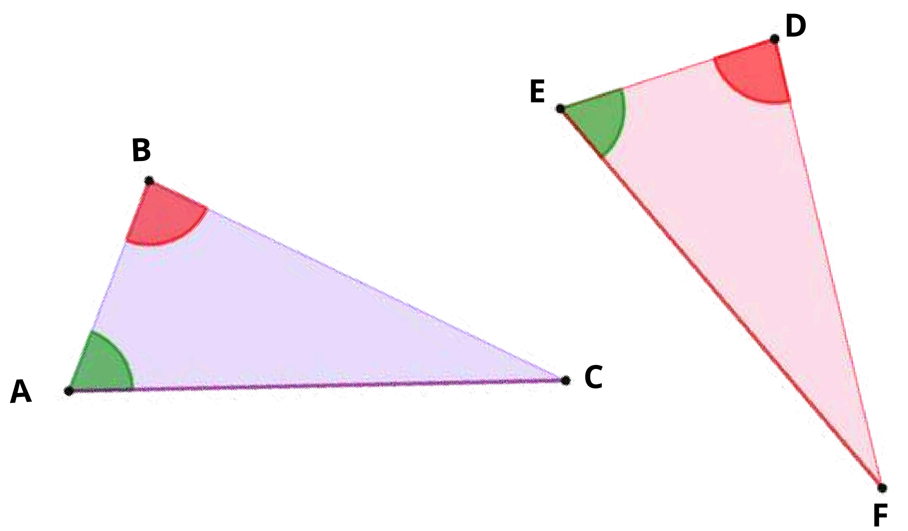
$$Se \begin{cases} medida\ (\overline{AB}) = medida\ (\overline{FG}) \\ medida\ (\hat{B}) = medida\ (\hat{G}) \\ medida\ (\overline{BC}) = medida\ (\overline{GH}) \end{cases} \quad então \quad \triangle\, ABC \cong \triangle FGH$$

3°) Ângulo-Lado-Ângulo (ALA): Quando dois ângulos e o lado entre eles são iguais.
Exemplo: Considere os triângulos *ABC* e *DEF*.



$$Se \begin{cases} medida\ (\hat{A}) = medida\ (\hat{D}) \\ medida\ (\overline{AC}) = medida\ (\overline{DF}) \\ medida\ (\hat{C}) = medida\ (\hat{F}) \end{cases} então \quad \triangle\ ABC \cong \triangle DEF$$

4°) Lado - Ângulo - Ângulo Oposto (LAAo): Quando um lado, um ângulo vizinho a esse lado e o ângulo oposto a esse lado são congruentes.
Exemplo: Considere os triângulos *ABC* e *DEF*.



$$Se \begin{cases} medida(\overline{AC}) & = medida(\overline{EF}) \\ medida(\hat{A}) & = medida(\hat{E}) \\ medida(\hat{B}) & = medida(\hat{D}) \end{cases} então \ \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Nosso estudo sobre congruência de triângulos também nos permite ampliar o entendimento sobre outras figuras geométricas muito importantes. Neste material, trataremos dos quadriláteros.

QUADRILÁTEROS E SUAS PROPRIEDADES

Quadriláteros são figuras planas que possuem quatro lados. Cada lado é um segmento de reta. Essas figuras também possuem quatro vértices (pontos de encontro dos lados) e quatro ângulos internos.
Existem diferentes tipos de quadriláteros, e cada um tem características próprias. Vamos conhecer os principais tipos:

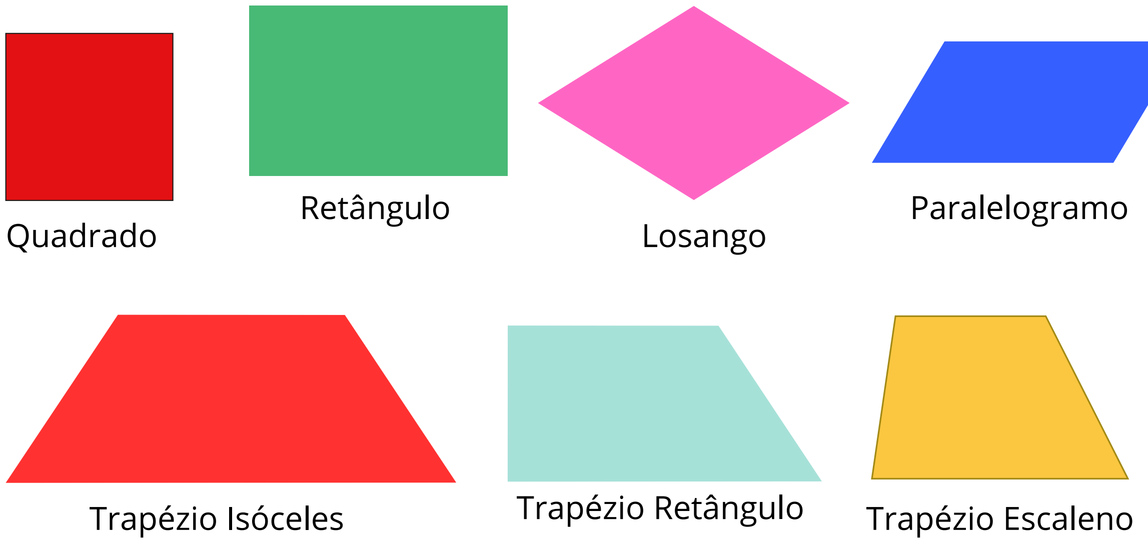


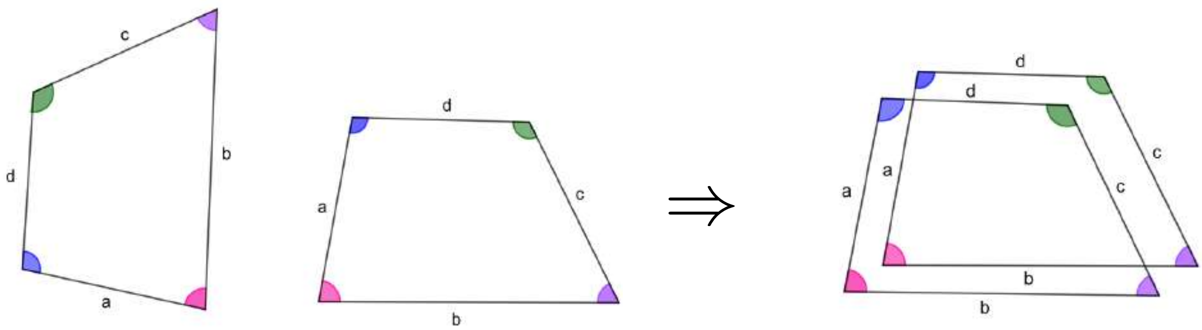
Imagem produzida no Canva

Quaisquer outras figuras de quatro lados que não se enquadrem nestas categorias são quadriláteros ***genéricos***. Um quadrilátero ***genérico*** é simplesmente um quadrilátero ***qualquer***, sem nenhuma característica especial além de ter quatro lados e quatro ângulos internos. Ele não precisa ser regular, simétrico ou ter ângulos ou lados de mesma medida.

O que é Congruência em Quadriláteros?

Dois quadriláteros são congruentes quando têm:

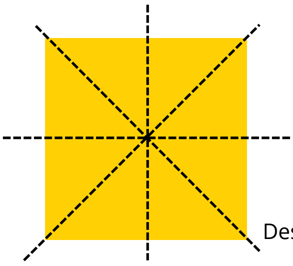
1. Mesma forma
2. Mesma medida de lados e ângulos
3. E podem ser sobrepostos perfeitamente, mesmo que um esteja girado ou espelhado.



O que é Simetria?

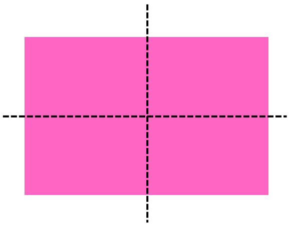
Simetria é quando podemos dividir uma figura ao meio e as duas partes ficam congruentes como se fossem uma imagem refletida num espelho. Essa "divisão" se chama eixo de simetria. Exemplos:

- O quadrado tem 4 eixos de simetria.



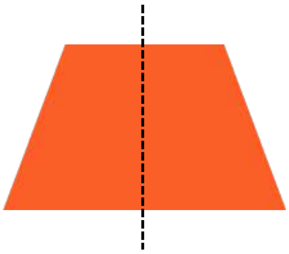
Design: Sparklestroke / Fonte: Canva

- O retângulo tem 2 eixos de simetria.



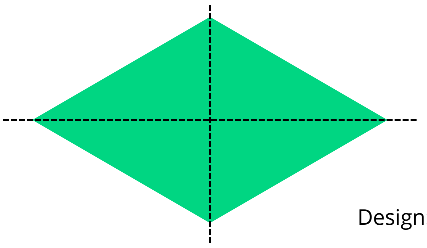
Design: Sketchify/ Fonte: Canva

- O trapézio isósceles tem 1 eixo de simetria.



Design: Cgdeaw's Images/ Fonte: Canva

- O losango também tem 2 eixos de simetria.



Design: Sparklestroke / Fonte: Canva

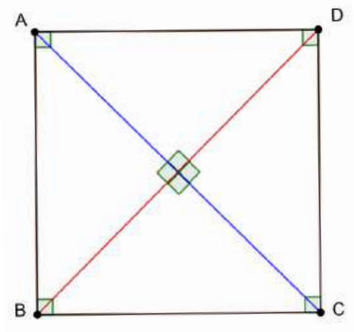
- O paralelogramo não tem eixo de simetria.

Design: Karacis Studio/ Fonte: Canva

Conhecendo os Quadriláteros

Vamos compreender as propriedades dos principais quadriláteros com o auxílio da congruência de triângulos.

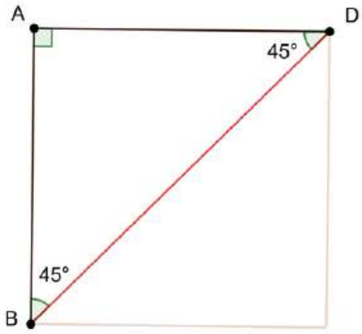
Quadrado

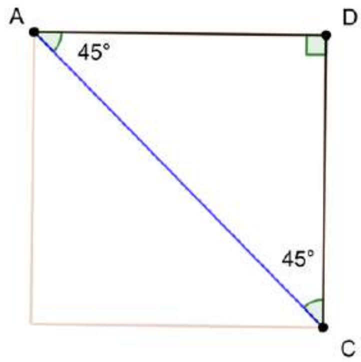


O quadrado possui quatro lados congruentes, quatro ângulos retos de 90° e quatro eixos de simetria.

Propriedade: As diagonais se cruzam no meio (ponto médio), têm a mesma medida e formam um ângulo de 90° entre elas.

Para demonstrar que as diagonais têm a mesma medida, observe que os triângulos retângulos BAD e ADC são congruentes pelo caso Lado Ângulo Lado (LAL). Assim, os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ tem a mesma medida.

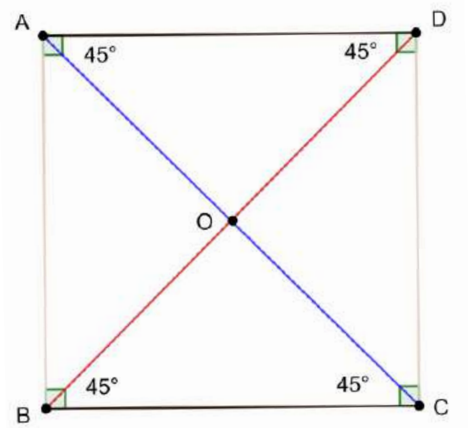




$$Se \begin{cases} \overline{BA} & \cong \overline{AD} \\ \hat{A} & \cong \hat{D} \\ \overline{AD} & \cong \overline{DC} \end{cases}$$

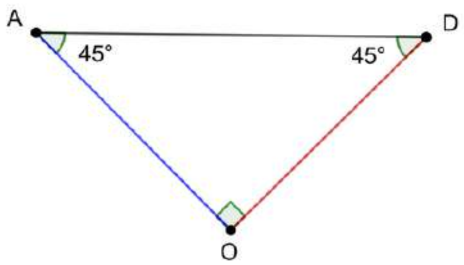
$$então \quad \triangle BAD \cong \triangle ADC$$

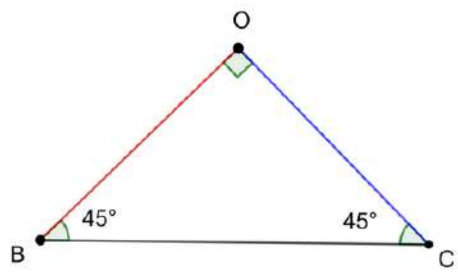
Para demonstrar que as diagonais se encontram no meio, observe na figura abaixo que os triângulos AOD e BOC são congruentes pelo caso Ângulo-Lado-Ângulo (ALA). Assim, os lados AO e OC têm a mesma medida, o que mostra que O é o ponto médio de AC. Da mesma forma, BO e OD também têm a mesma medida, indicando que O é o ponto médio dos segmentos AC e BD, respectivamente.



$$Se \begin{cases} O\hat{A}D = O\hat{B}C \\ \overline{AD} = \overline{BC} \\ O\hat{D}A = O\hat{C}B \end{cases} \quad então \quad \triangle\, AOD \cong \triangle BOC$$

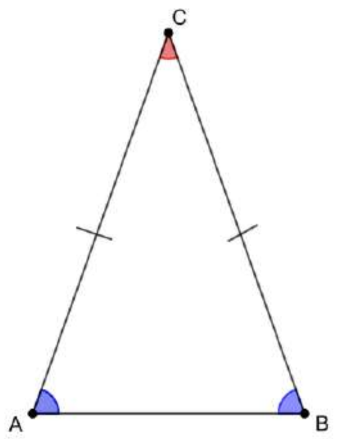
Por fim, para demonstrar que os ângulos formados pelo encontro das diagonais são retos, observe que o triângulo AOD é **isósceles**. Assim, os ângulos $D\hat{A}O$ e $O\hat{D}A$ são congruentes e medem 45°. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, o ângulo AÔD será reto (90°). Além disso, o ângulo BÔC é **oposto pelo vértice** ao ângulo AÔD e, portanto, é congruente a ele.





Você se lembra?

Um triângulo ***isósceles*** é um triângulo que possui dois lados de mesma medida (congruentes) e, consequentemente, dois ângulos internos também congruentes, que são os ângulos opostos aos lados congruentes.

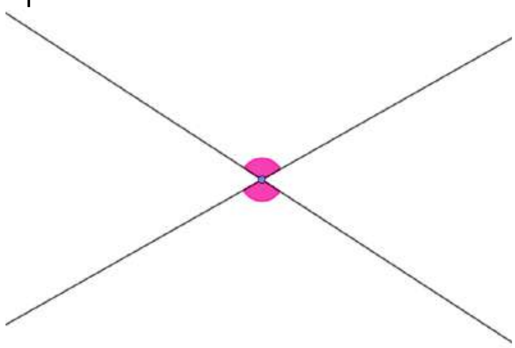


$$medida\ \ de\ \ \hat{A} = medida\ \ de\ \ \hat{B}$$
$$medida\ \ de\ \ \overline{AC} = medida\ \ de\ \ \overline{BC}$$

Um ângulo ***oposto pelo vértice*** é um dos pares de ângulos que se formam quando duas retas se cruzam (são concorrentes). Esses ângulos:

- Estão em lados opostos do ponto de interseção (vértice);
- Têm a mesma medida (são congruentes);

São chamados assim porque ficam "de frente" um para o outro, sem compartilhar lados.



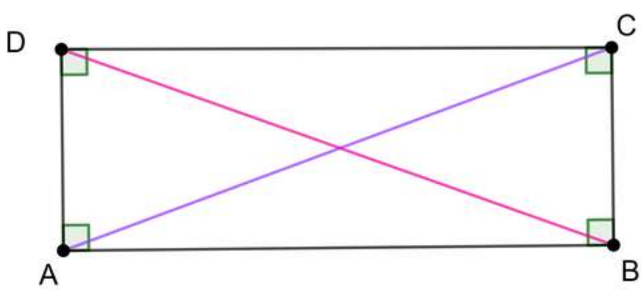
Retângulo

O retângulo tem lados opostos congruentes, quatro ângulos retos e dois eixos de simetria: um vertical e outro horizontal.

Propriedade: As diagonais são do mesmo tamanho e se cruzam no meio (ponto médio), mas não formam ângulo de 90° entre si.

Todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado.

Cada propriedade do retângulo pode ser demonstrada da mesma maneira como fizemos com o quadrado, ou seja, utilizando congruência de triângulos.

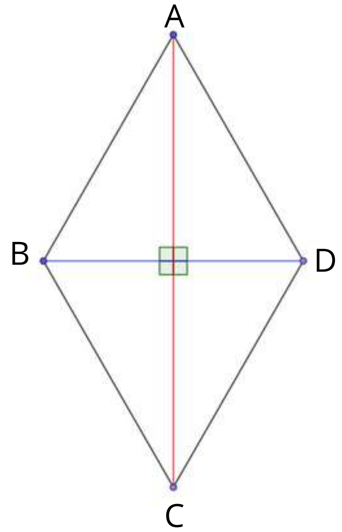


Losango

O losango possui lados de mesma medida, assim como o quadrado, mas seus ângulos internos não são retos. Além disso, seus ângulos opostos são congruentes, e ele apresenta dois eixos de simetria que coincidem com suas diagonais.

Propriedade: As diagonais se cruzam em seus pontos médios e formam ângulo de 90° entre elas.

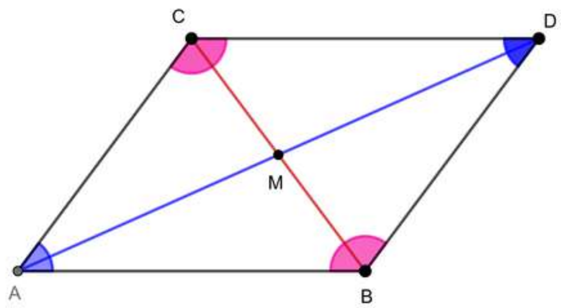
Cada propriedade do losango pode ser demonstrada da mesma maneira como fizemos com o quadrado, ou seja, utilizando congruência de triângulos.



Paralelogramo

O paralelogramo possui lados opostos paralelos e congruentes. Suas diagonais se cruzam, mas não são congruentes entre si e não formam ângulos de 90°. Além disso, o paralelogramo não possui nenhuma linha de simetria.

Propriedades: Os lados opostos são congruentes e paralelos. Os ângulos opostos são congruentes.
As diagonais se cruzam no ponto médio tanto de uma quanto da outra.

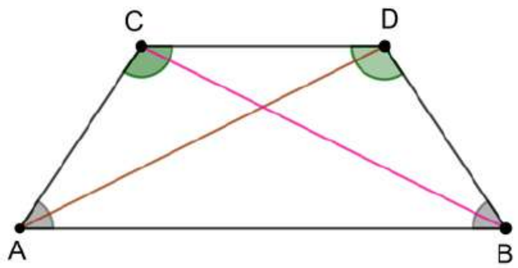


Trapézio

Existem tipos diferentes de trapézios. Os mais comuns são o **trapézio isósceles**, **trapézio retângulo** e o **trapézio escaleno**.

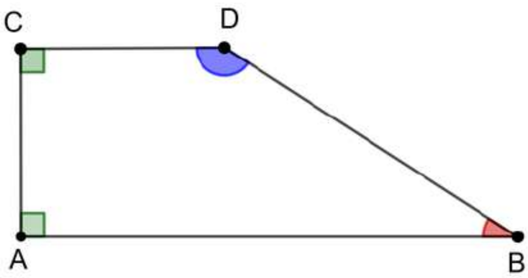
Características do ***trapézio isósceles***:

- Tem um par de lados paralelos $(CD \text{ e } AB)$
- Os lados não paralelos $(AC \text{ e } BD)$ têm o mesmo comprimento.
- Os ângulos da base $(\hat{A} \text{ e } \hat{B})$ são congruentes.
- Possui 1 linha de simetria vertical.



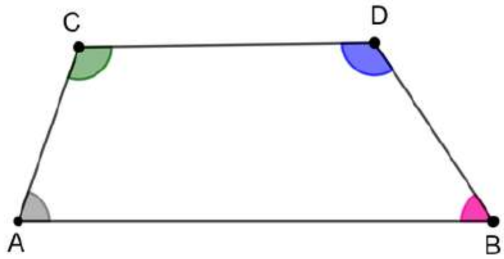
Características do ***trapézio retângulo***:

- Tem um par de lados paralelos $(CD\ e\ AB)$
- Os lados não paralelos $(AC\ e\ BD)$ têm comprimentos diferentes.
- A Altura (AC) possui ângulo reto com a Base menor (CD) e a Base maior (AB).
- Não possui simetria.



Características do ***trapézio escaleno:***

- É um quadrilátero, ou seja, tem 4 lados.
- Possui apenas um par de lados paralelos, chamados de bases $(CD\ e\ AB)$
- Os lados não paralelos têm comprimentos diferentes — por isso é chamado de escaleno.



Retomando o que você aprendeu

Você aprendeu sobre triângulos, quadriláteros e construções geométricas.

- Triângulos são figuras geométricas formadas por três lados e três ângulos.
- Um quadrilátero é uma figura geométrica com quatro lados e quatro ângulos.

Tente observar esses conceitos ao seu redor! Você verá que a Matemática está em tudo: desde as construções da cidade até os padrões da natureza. Pratique bastante e divirta-se explorando a geometria!

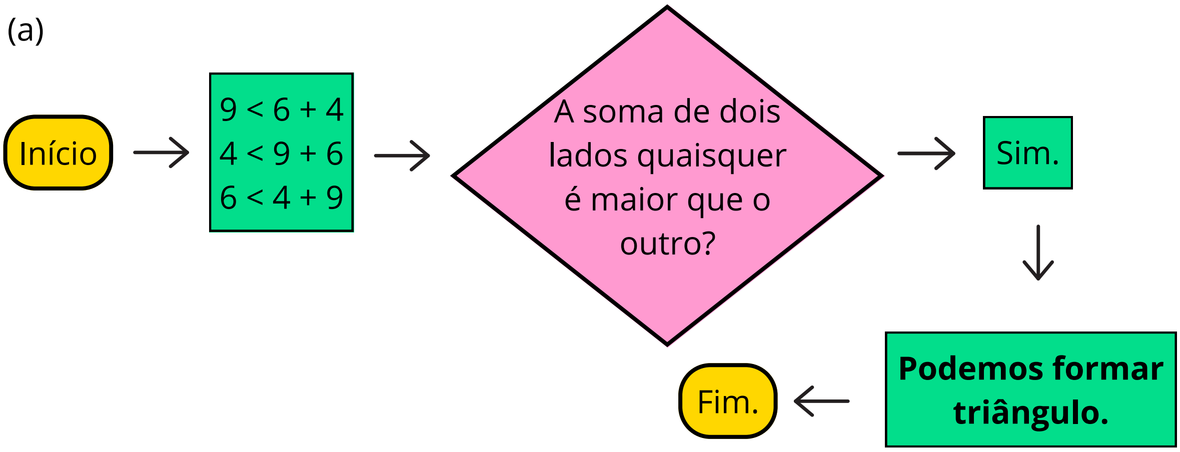
Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

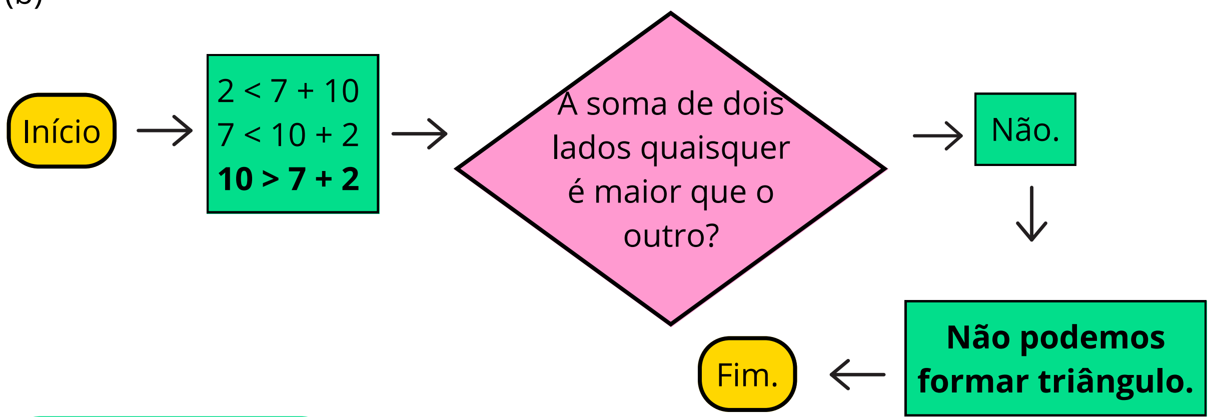
Os conjuntos de segmentos abaixo formam triângulos? Justifique.
(a) 9 cm, 6 cm, 4 cm
(b) 2 cm, 7 cm, 10 cm

Resposta: Vamos utilizar um fluxograma em cada item.

(a)



(b)



EXERCÍCIO 2

Qual é o terceiro ângulo de um triângulo se os dois primeiros medem:
(a) 40° e 90°
(b) 25° e 65°

Resposta:
(a) Vamos chamar este ângulo desconhecido de x. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180°, então:

$$
\begin{aligned}
40^\circ + 90^\circ + x &= 180^\circ \\
130^\circ + x &= 180^\circ \\
\cancel{1}30^\circ - \cancel{1}30^\circ + x &= 180^\circ - 130^\circ \\
x &= 50^\circ
\end{aligned}
$$
(Somamos -130° nos dois membros.)

Portanto o terceiro ângulo é 50°.

(b) Para este item temos:

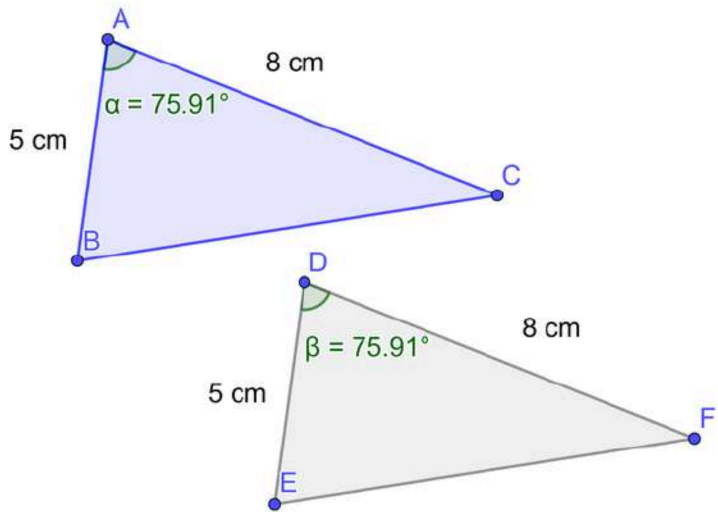
$$
\begin{aligned}
25^\circ + 65^\circ + x &= 180^\circ \\
90^\circ + x &= 180^\circ \\
\cancel{9}0^\circ - \cancel{9}0^\circ + x &= 180^\circ - 90^\circ \\
x &= 90^\circ
\end{aligned}
$$
(Somamos -90° nos dois membros.)

Portanto o terceiro ângulo é 90°.

EXERCÍCIO 3

Observe os triângulos abaixo:

Os triângulos ABC e DEF são congruentes? Justifique utilizando um caso de congruência.



Resposta: Sabemos que dois triângulos são congruentes quando têm mesma forma e tamanho, ou seja, seus lados e ângulos correspondentes possuem mesma medida. Vamos analisar os dados fornecidos:

Dois lados correspondentes são iguais:

$$AB = DE = 5cm$$
$$AC = DF = 8cm$$

O ângulo entre esses lados também é igual:

$$\alpha = \beta = 75,91^\circ$$

Isso corresponde ao caso LAL (lado-ângulo-lado) de congruência, onde dois lados e o ângulo entre eles possuem mesma medida.

EXERCÍCIO 4

Associe corretamente cada figura geométrica (Coluna A) à sua característica principal (Coluna B).

Coluna A – Quadriláteros:
(   ) Quadrado
(   ) Losango
(   ) Retângulo
(   ) Trapézio
(   ) Paralelogramo

Coluna B – Características:
A. Todos os lados são congruentes e os ângulos são retos.
B. Apenas um par de lados opostos é paralelo.
C. Os quatro lados são congruentes, mas os ângulos não são retos.
D. Somente os lados opostos e os ângulos opostos são congruentes.
E. Apenas os lados opostos são congruentes e os quatro ângulos são retos.

Resposta: a partir da definição dos principais quadriláteros podemos preencher corretamente a primeira coluna.

A. Todos os lados são congruentes e os ângulos são retos. Este é o quadrado.
B. Apenas um par de lados opostos é paralelo. Este é o trapézio.
C. Os quatro lados são congruentes, mas os ângulos não são retos. Este é o losango.
D. Somente os lados opostos e os ângulos opostos são congruentes. Este é o paralelogramo.
E. Apenas os lados opostos são congruentes e os quatro ângulos são retos. Este é o retângulo.

Dessa forma, a Coluna A fica da seguinte maneira

(**A**) Quadrado
(**C**) Losango
(**E**) Retângulo
(**B**) Trapézio
(**D**) Paralelogramo

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

[Clique aqui]

A conquista matemática - 8° ano : Ensino Fundamental: Anos Finais / José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2022.

- p. 85-89.

Teláris Essencial Matemática - 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. - 1. ed. - São Paulo : Ática, 2022.

- p. 176 a 185; 193 a 201.

[Clique aqui]

Atividades

ATIVIDADE 1

Descreva por escrito os passos para construir um triângulo, dadas as medidas dos três lados.

ATIVIDADE 2

Descreva, por meio de um fluxograma, como construir um triângulo DEF cujos lados medem DF=4,5 cm, EF=5,5 cm e DE=6,5 cm.

ATIVIDADE 3

Durante a preparação para a festa junina da escola, os alunos do 8º ano ficaram responsáveis por montar barracas feitas com estrutura de madeira em formato triangular.

Para construir uma dessas barracas, João, Ana e Pedro receberam três hastes de madeira com os seguintes comprimentos:

Haste A: 2 metros
Haste B: 4 metros
Haste C: 7 metros

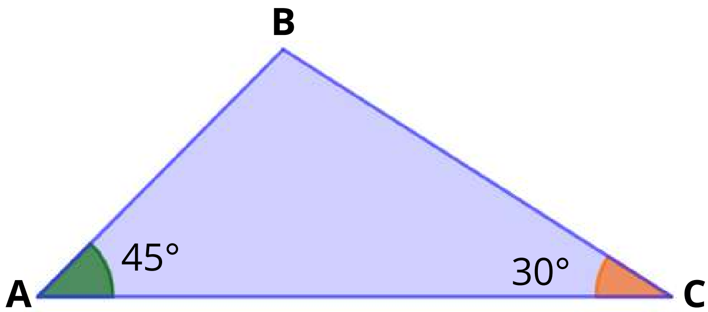
Antes de começar a montagem, a professora de Matemática os desafiou:

"Essas três hastes conseguem formar um triângulo?"

Justifique sua resposta com base na condição de existência dos triângulos.

ATIVIDADE 4

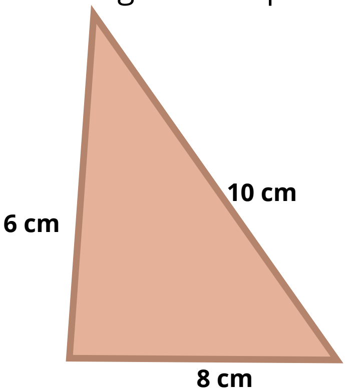
Em uma atividade de artes, Elisa desenhou um triângulo. Ela mediu dois ângulos e descobriu que um deles mede 45° e o outro 30°. Qual é a medida do terceiro ângulo que falta no desenho de Elisa?



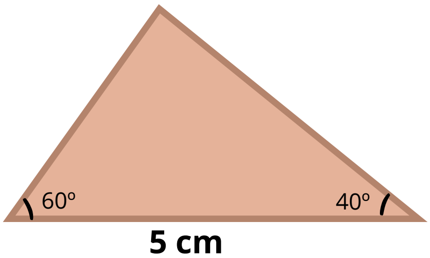
ATIVIDADE 5

Entre as figuras abaixo, encontre os pares de triângulos congruentes e indique o caso de congruência que se aplica a eles.

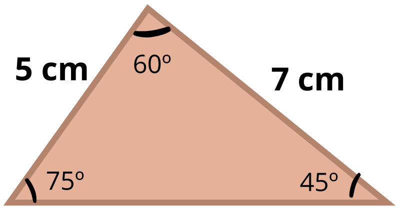
A)



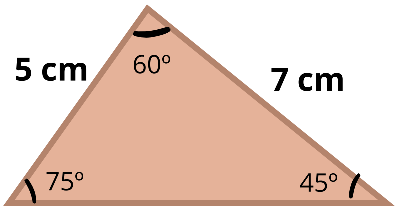
B)



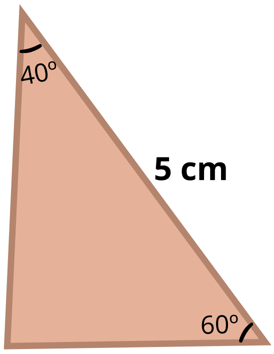
C)



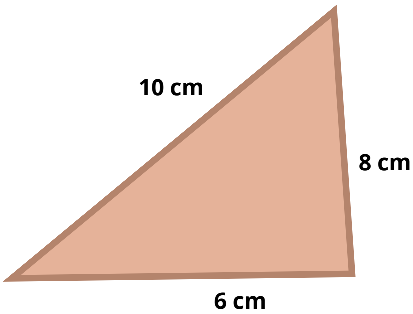
D)



E)



F)



ATIVIDADE 6

A escola onde Karina estuda organizará uma festa junina e solicitou que o 8° ano ficasse responsável pela confecção de convites e bandeirinhas para a decoração do ambiente, com formato de quadrilátero. Abaixo seguem os modelos confeccionados por estudantes da turma de Karina.

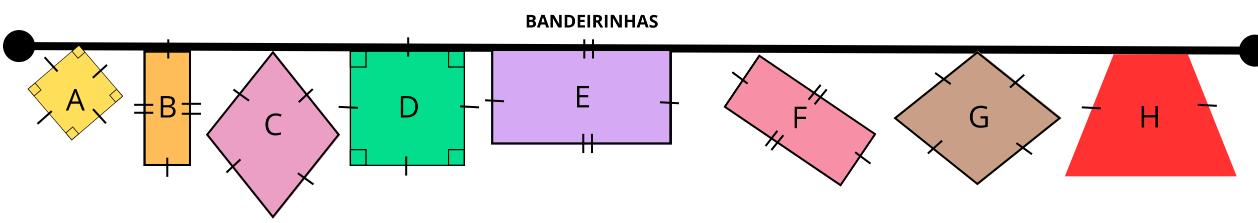


Imagem produzida no Canva

Ao analisar as bandeirinhas:

A) Quais delas são quadriláteros? Justifique

B) Quais delas são quadrados? Justifique

C) Quais delas são retângulos? Justifique

D) Quais delas são losangos? E trapézios? Justifique

E) Quais delas são paralelogramos? Justifique

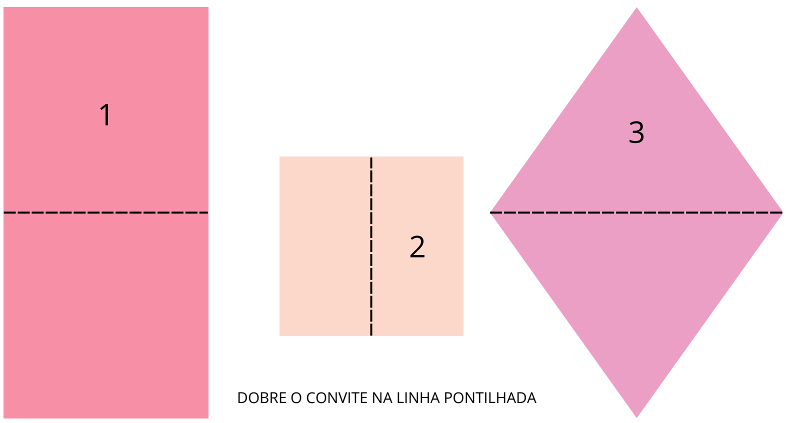
F) Quais apresentam apenas um par de lados paralelos?

G) Quais apresentam dois pares de ângulos congruentes?

Design: Mus Illustrations / Fonte: Canva

ATIVIDADE 7

Karina e seus colegas do 8º ano, escolheram os modelos abaixo para a confecção dos convites da festa Junina.



Ao analisar os convites abertos:

A) Quais deles são quadriláteros? Justifique

B) Quais deles são quadrados? Justifique

C) Quais deles são retângulos? Justifique

D) Quais deles são losangos? Justifique

E) Quais apresentam apenas um par de lados paralelos?

F) Quais apresentam dois pares de ângulos opostos congruentes?

Ao analisar os convites fechados (após dobrá-lo):

G) Quais deles são quadriláteros? Justifique

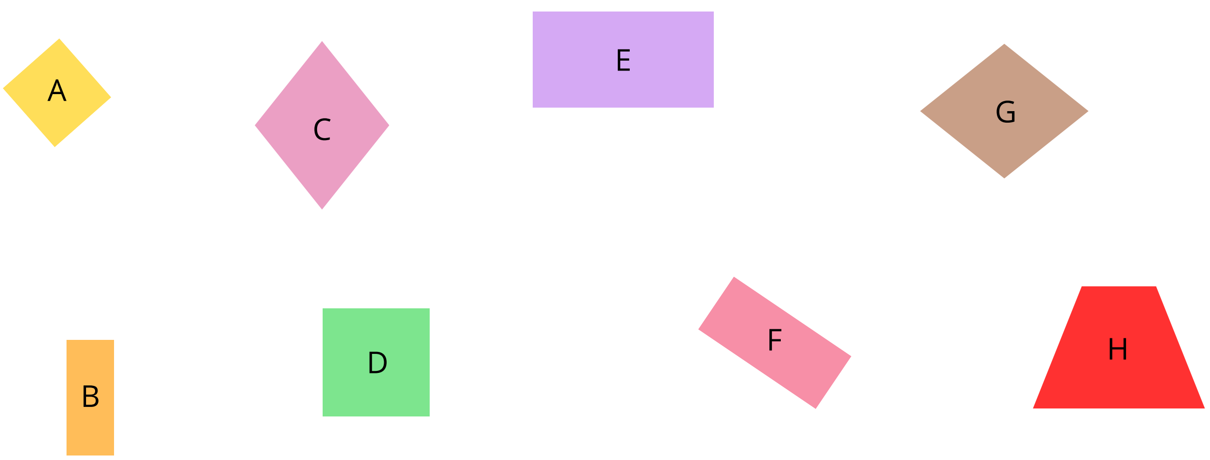
H) Quais deles são quadrados? Justifique

I) Quais deles são retângulos? Justifique

J) Quais deles são losangos? Justifique

ATIVIDADE 8

Observe os modelos de bandeirinhas para a festa junina, confeccionadas pelo 8º ano na escola onde Karina estuda. Trace os eixos de simetria em cada uma delas.



ATIVIDADE 9

Sobre a definição de quadriláteros, assinale a alternativa correta:

A) Os quadriláteros são polígonos que possuem quatro lados, e os lados opostos são paralelos.

B) Todo quadrilátero é um quadrado.

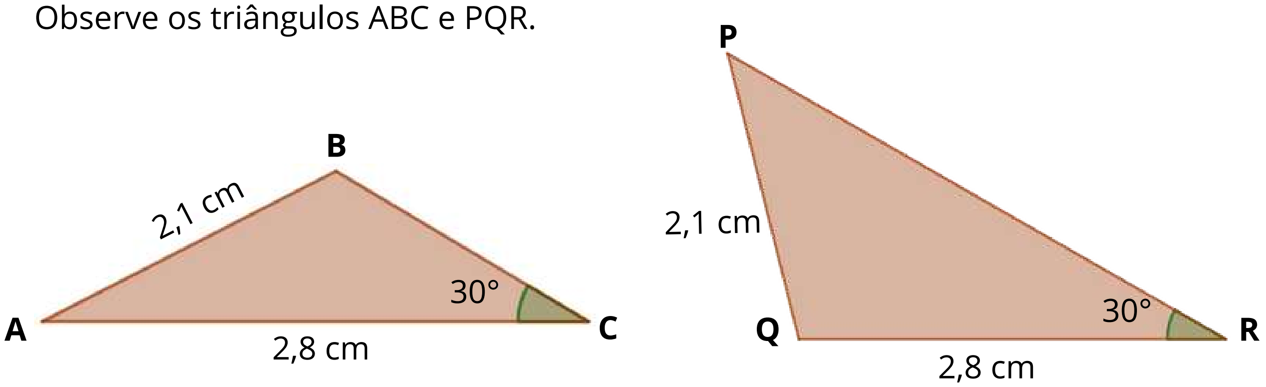
C) Quadrilátero é uma figura geométrica plana, poligonal e possui quatro lados.

D) Quadriláteros são polígonos que possuem quatro lados, e dois deles são paralelos.

E) Quadriláteros são figuras que possuem quatro lados iguais.

ATIVIDADE 10

Observe os triângulos ABC e PQR.



Podemos dizer que esses triângulos são congruentes pelo caso LAL? Justifique.

Referências

Dante, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática)

Giovanni Júnior, José Ruy A conquista matemática : 8° ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2022.

Arquitetura: conheça o Museu do Louvre, em Paris. Disponível em https://guiadolouvre.com/a-grande-piramide-de-vidro/

Ilustrações produzidas pelo autor com o *software geogebra*.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

8º Ano | Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

Construções geométricas: ângulos de 90˚, 60˚, 45˚ e 30˚ e polígonos regulares.

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM
EF08MA15 - Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. **EF08MA16** - Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.	• Construir mediatriz e bissetriz. • Construir ângulos de 90°, 60°, 45° e 30°. • Construir polígonos regulares. • Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.

Contextualização

A Geometria das Abelhas

As abelhas são mestres da engenharia natural. Dentro de uma colmeia, elas constroem células hexagonais perfeitas, lado a lado, formando um mosaico geométrico sem desperdício de espaço ou material. Mas por que será que elas usam justamente o hexágono? O hexágono regular é a forma que melhor otimiza espaço e economia de cera — algo que a Matemática comprova!

Colmeia de abelhas
Design: Getty Images / Fonte: Canva

Inspirados pela inteligência natural das abelhas, vamos aprender a construir um ***hexágono regular*** de qualquer área, utilizando ferramentas simples: ***esquadros e compasso***. Para isso, desenvolveremos e descreveremos um ***algoritmo geométrico*** — um passo a passo organizado, que também será representado por meio de um ***fluxograma***.

Primeiramente, vamos atender a algumas expectativas de aprendizagem, a saber:

- Construir mediatriz e bissetriz.
- Construir ângulos de 90°, 60°, 45° e 30°.
- Construir polígonos regulares com régua e compasso.

Conceitos e Conteúdos

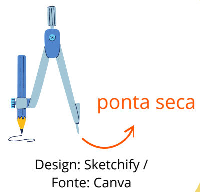
O QUE SÃO CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS?

Construções geométricas são desenhos feitos com instrumentos como régua, compasso e esquadro. Essas construções ajudam a compreender melhor as figuras geométricas e suas propriedades, usando apenas a lógica e a simetria, sem medidas numéricas. Passaremos a duas construções geométricas muito importantes para nossas atividades em geometria. Trata-se da ***mediatriz*** e da ***bissetriz***. Na geometria, a mediatriz e a bissetriz são elementos que dividem ou relacionam segmentos de reta e ângulos.

Construindo a Mediatriz

A **mediatriz** é a reta que divide um segmento ao meio e forma um ângulo de 90º com ele.

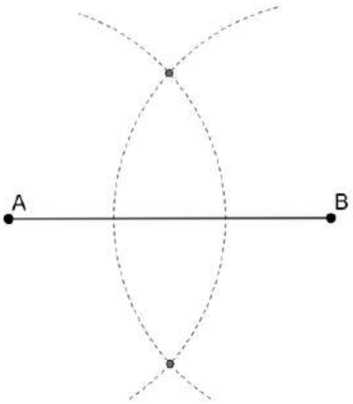
A ponta seca do compasso é a parte que fica fixada no papel durante a construção de circunferências ou arcos.

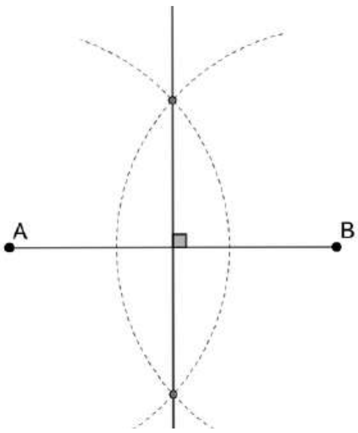


Design: Sketchify / Fonte: Canva

Passo a passo:

1. Trace um segmento AB.
2. Com a ponta seca em A, abra o compasso numa medida maior que a metade do segmento AB e trace um arco.
3. Sem mudar a abertura, repita o procedimento com a ponta seca do compasso em B.
4. Trace uma reta passando pelos pontos de interseção dos arcos: essa é a mediatriz.



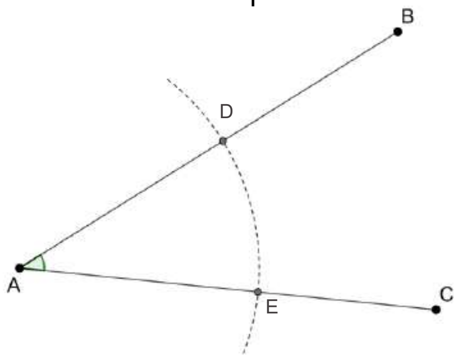


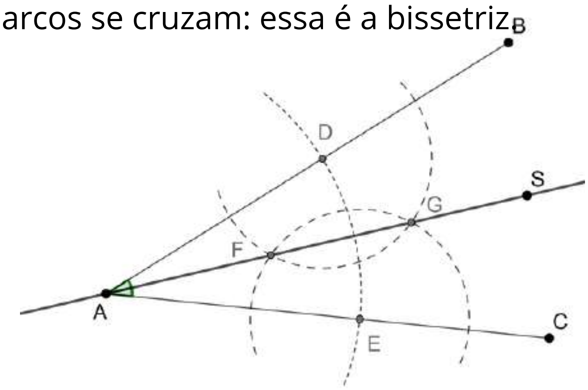
Construindo a Bissetriz

A **bissetriz** é a semirreta que divide um ângulo ao meio, formando dois ângulos de mesma medida.

Passo a passo:

1. Trace um ângulo BÂC.
2. Com a ponta seca do compasso no vértice A, trace um arco que cruze os lados nos pontos D e E.
3. Com a mesma abertura, faça arcos com a ponta seca nos pontos de interseção D e E, marcando os pontos F e G.
4. Una o vértice A aos pontos F e G onde os arcos se cruzam: essa é a bissetriz





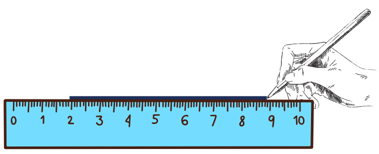
Construindo Ângulos Notáveis

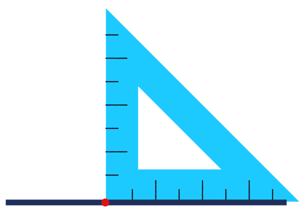
Os ângulos de 90º, 60º, 45º e 30º são bastante comuns nos estudos de Geometria. Por serem amplamente utilizados, recebem o nome de ângulos notáveis. A seguir, vamos aprender como construir alguns desses ângulos de forma prática, seguindo um passo a passo.

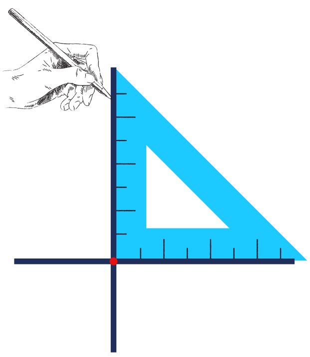
***Ângulo reto (90º)*:** A construção de um ângulo de 90° pode ser feita de duas formas: aplicando o mesmo procedimento utilizado na construção da mediatriz de um segmento ou, de maneira mais simples e direta, utilizando o esquadro.

Passo a passo para construir um ângulo de 90° com o esquadro:

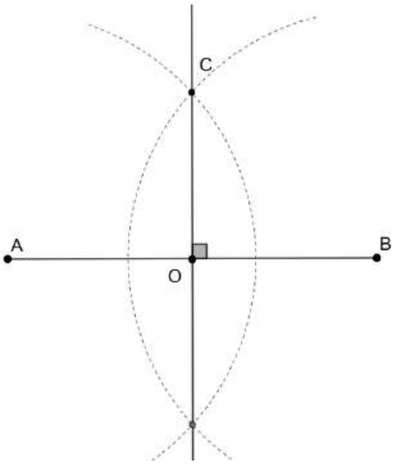
1. Coloque a régua sobre a folha e, com o lápis, desenhe uma linha reta. Essa linha servirá como base para a construção do ângulo.
2. Coloque o esquadro sobre a folha, encostando um dos seus lados retos na linha que você acabou de traçar. Certifique-se de que o vértice de 90° do esquadro esteja alinhado com a linha base.
3. Defina o ponto da linha base onde deseja construir o ângulo. Posicione o vértice de 90° do esquadro exatamente nesse ponto.
4. Com o auxílio do esquadro, trace uma nova linha partindo do ponto escolhido, utilizando o lado que forma um ângulo reto com a linha base. Essa linha formará um ângulo de 90° com a base.

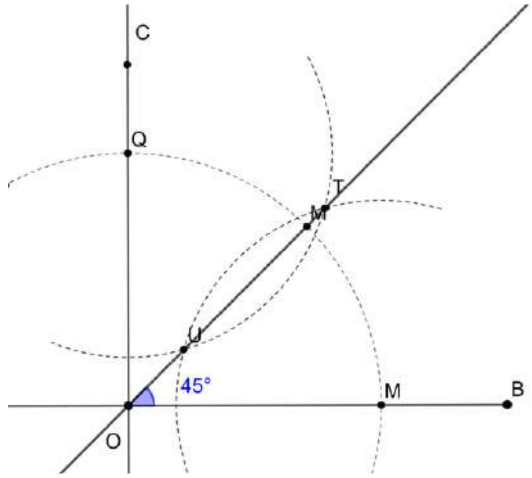






Ângulo de 45º: Siga os passos do item anterior para construir um ângulo de 90º. Faça o passo a passo para construir uma bissetriz em um ângulo de 90°. Assim teremos 45°.

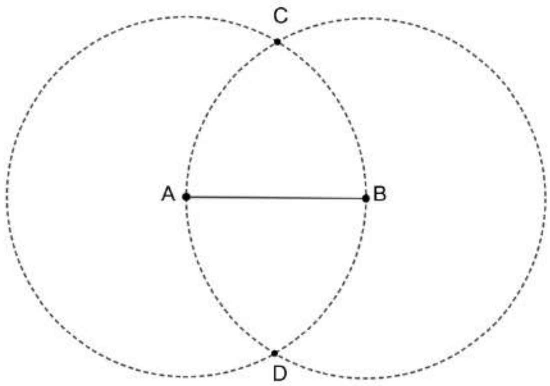


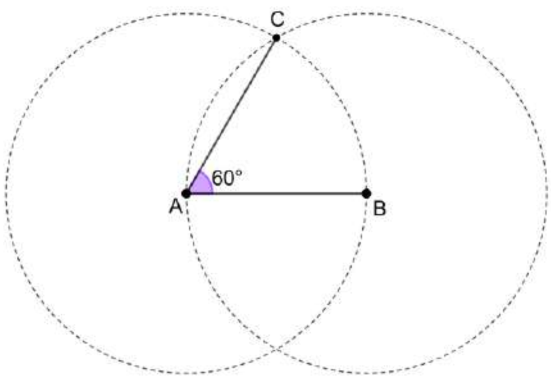


Ângulo de 60º: Vamos construir um triângulo equilátero. Lembre-se que uma propriedade importante dos triângulos equiláteros é que eles possuem todos os ângulos internos com medidas iguais a 60°.

Passo a passo:

1.Trace um segmento AB.
2.Faça uma circunferência com centro em A e extremidade em B, tal que o raio seja a medida AB.
3. Agora faça uma circunferência com centro em *B* e extremidade em *A*, tal que o raio seja a medida BA.
4. As circunferências terão duas intersecções, C e D. Escolheremos o ponto C.
5. Una os pontos *A* e *C* com um segmento e temos o ângulo de 60°.



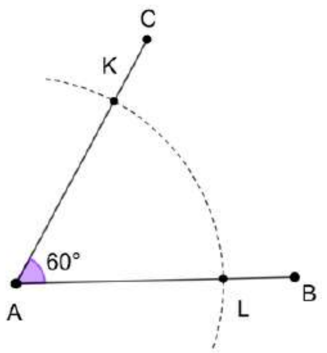


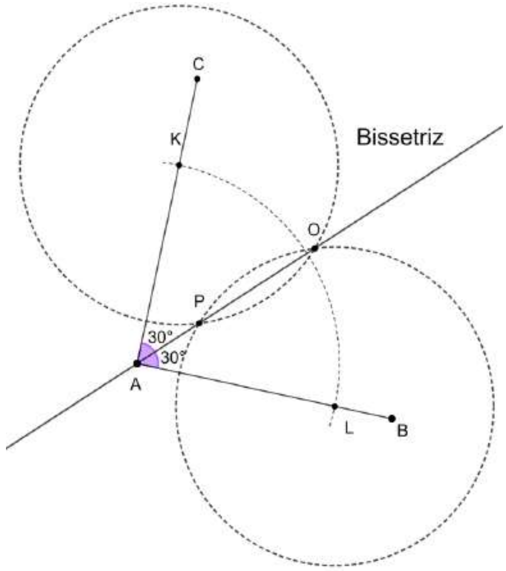
Ângulo de 30º: A partir do ângulo de 60° acima, vamos construir uma bissetriz.

Passo a passo:

1. Com um compasso faça um arco com origem em A, que corte os dois lados do ângulo de 60°.
2. Chame os pontos onde o arco cruza os lados do ângulo de K e L.
3. Com centro em K, faça um arco dentro do ângulo. Faça outro arco com centro em L, usando o mesmo raio, até que os arcos se cruzem nos pontos O e P.

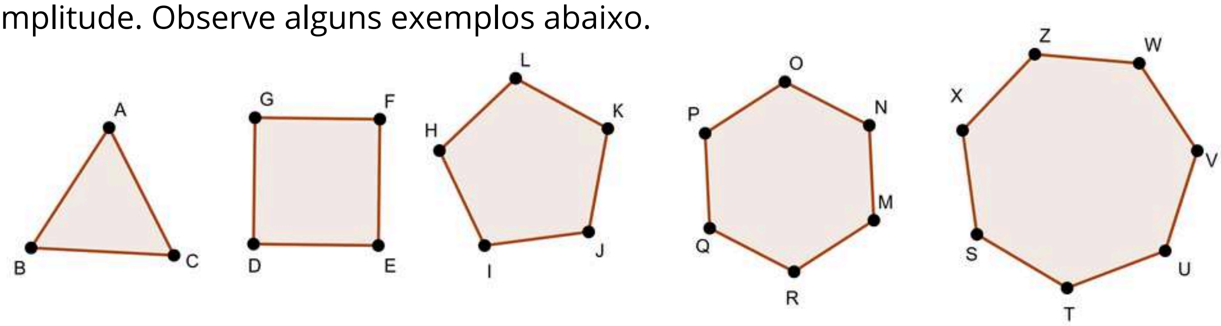
4. Com a régua, ligue o vértice do ângulo (A) aos pontos O e P. Essa é a bissetriz, que divide o ângulo de 60° em duas partes iguais de 30°.





Construção de Polígonos Regulares

Um polígono regular possui lados congruentes, ou seja, com a mesma medida, e todos os ângulos internos também são congruentes, apresentando a mesma amplitude. Observe alguns exemplos abaixo.



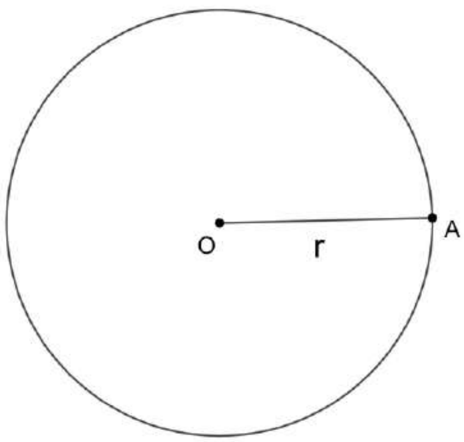
Construiremos um polígono regular inscrito em uma circunferência, ou seja, um polígono cujos vértices estão sobre a circunferência.

***1° Passo**: Trace uma circunferência.*

- Com o compasso, escolha um ponto no papel e marque-o como ponto O (centro da circunferência).
- Abra o compasso em uma medida qualquer.
- Com a ponta seca (aquela que não possui grafite) no ponto O, gire o compasso e trace uma circunferência.

***2° Passo**: Marque um ponto na circunferência*.

- Escolha qualquer ponto na borda da circunferência e marque como ponto A.
- Trace o segmento OA, ligando o centro ao ponto A.



***3° Passo**: **Calcule o ângulo central**.*

Para dividir a circunferência em partes iguais, usamos o ângulo central:

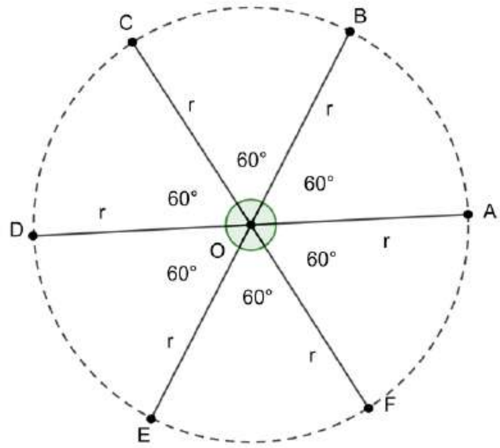
$$\hat{A}ngulo\ \ central = \frac{360°}{n}$$

Onde n é o número de lados do polígono que queremos construir.

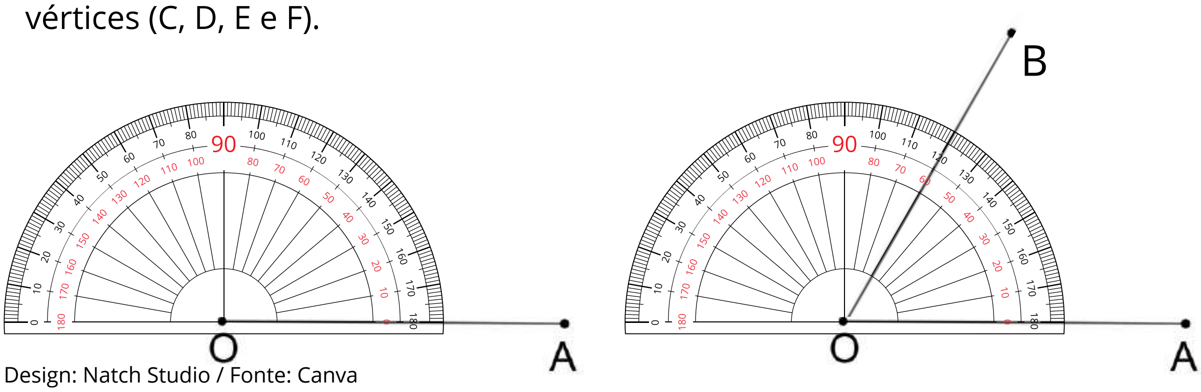
Exemplo: Para construir um hexágono (6 lados):

$$\frac{360°}{6} = 60°$$

***4° Passo**: **Marque os outros vértices usando o ângulo central**.*

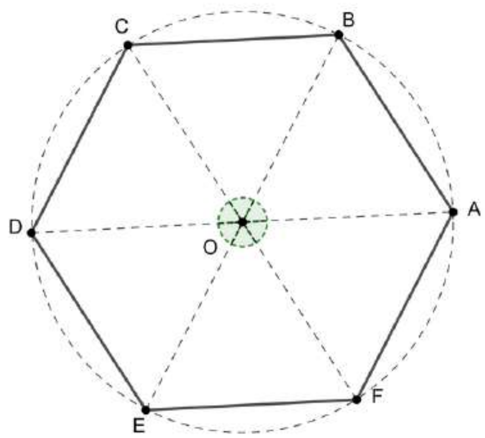


- Coloque o centro do transferidor no ponto O.
- Alinhe a linha de base com o segmento OA.
- Marque um ponto com o ângulo central calculado (ex: 60°).
- Trace um novo raio ligando O ao ponto marcado na circunferência (B).
- Repita o processo até completar todos os vértices (C, D, E e F).



Design: Natch Studio / Fonte: Canva

***5° Passo**: **Una os vértices com a régua**.*



- Depois de marcar todos os pontos, use a régua para ligar os pontos consecutivos.

  A → B → C → D → E → F ... até voltar ao ponto A.

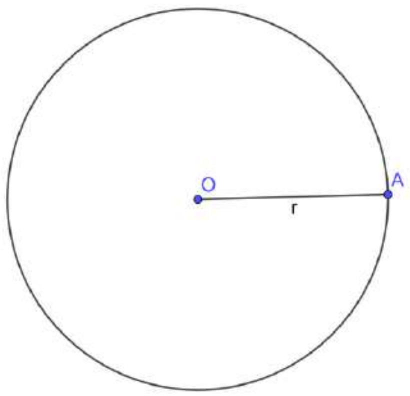
- Você verá surgir um polígono regular perfeitamente inscrito dentro da circunferência.

Você terá construído um polígono regular inscrito, com todos os lados congruentes, todos os ângulos centrais também congruentes e todos os vértices sobre a circunferência.

Construção de um hexágono regular com régua e compasso

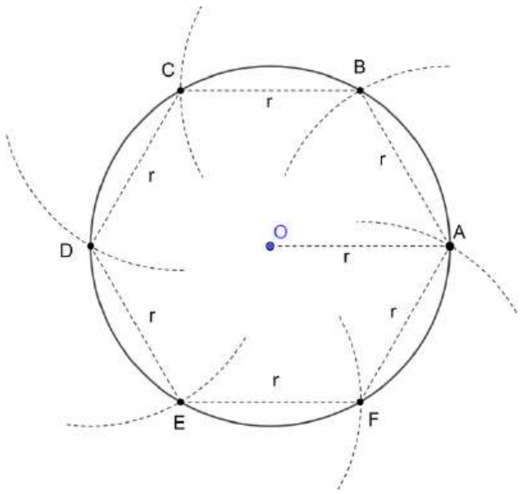
Vejamos agora um passo a passo para construir um hexágono regular com régua e compasso

1.Trace uma circunferência:



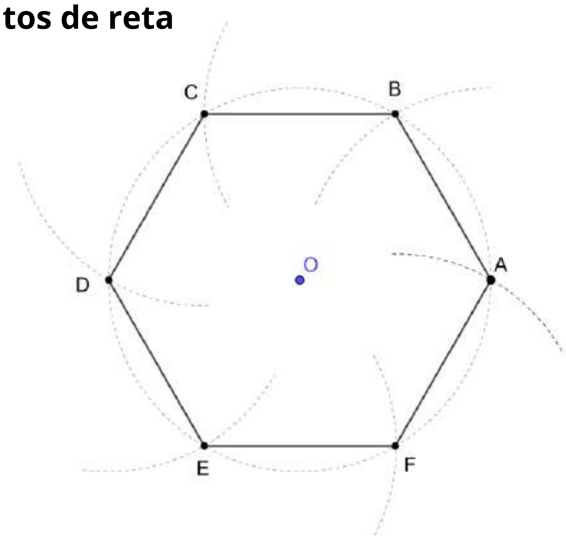
- Com o compasso, escolha um ponto no papel: esse será o centro da circunferência (vamos chamá-lo de ponto O).
- Abra o compasso em uma medida fixa (essa será a medida do raio da circunferência).
- Com essa abertura, gire o compasso traçando uma circunferência completa ao redor do ponto O.

2. Marque 6 pontos na circunferência:



- Sem alterar a abertura do compasso, escolha um ponto qualquer sobre a circunferência (chame-o de A).
- Posicione a ponta seca do compasso em A e faça um pequeno arco cortando a circunferência: isso marcará o ponto B.
- Repita esse processo, sempre com a mesma abertura e pulando de ponto em ponto (de B para C, de C para D, de D para e E, de E para F), até obter seis pontos ao longo da circunferência.
- Você voltará ao ponto A, fechando o ciclo e garantindo que todos os lados do polígono tenham o mesmo comprimento (o mesmo que o raio da circunferência).

3. Una os pontos consecutivos com segmentos de reta



- Com uma régua, conecte os pontos em ordem (A-B, B-C, C-D, D-E, E-F, F-A).
- O resultado será um hexágono regular, perfeitamente inscrito na circunferência.

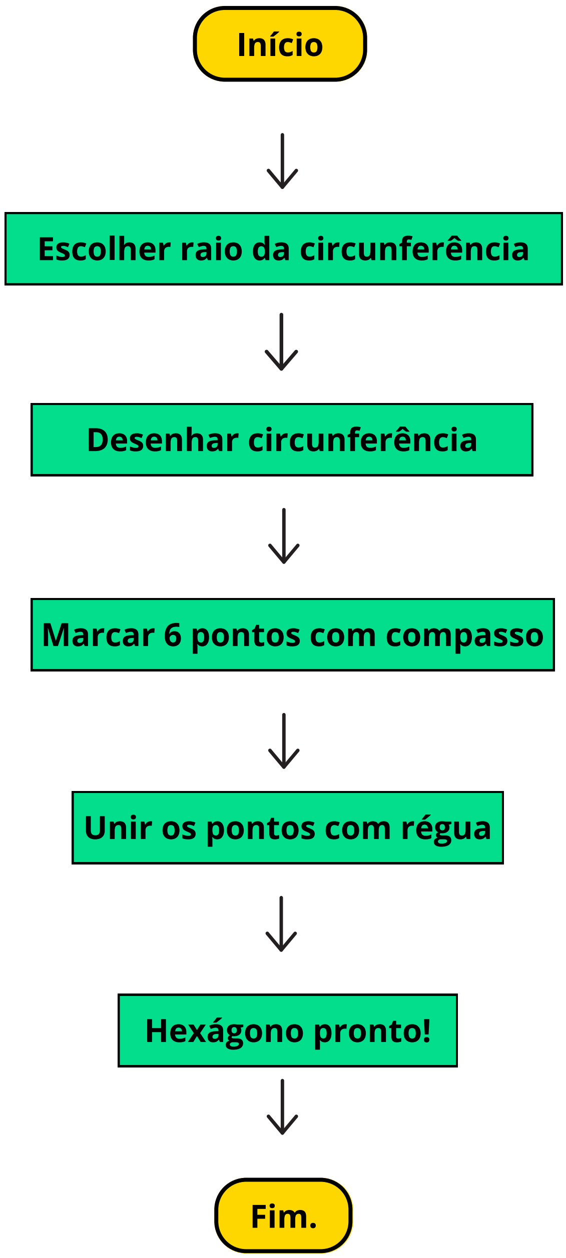
Algoritmo e Fluxograma: Hexágono Regular

Como vimos na contextualização, as abelhas usam hexágonos para otimizar espaço e material. Vamos fazer o mesmo!

Algoritmo:

1. Escolha o raio adequado.
2. Trace a circunferência com esse raio.
3. Marque 6 pontos ao redor com a mesma abertura.
4. Una os pontos com régua.

Fluxograma

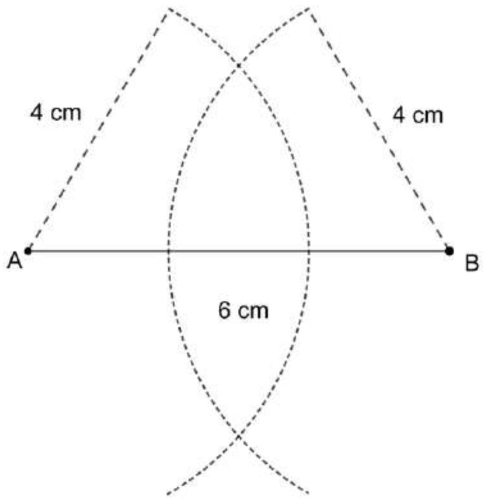


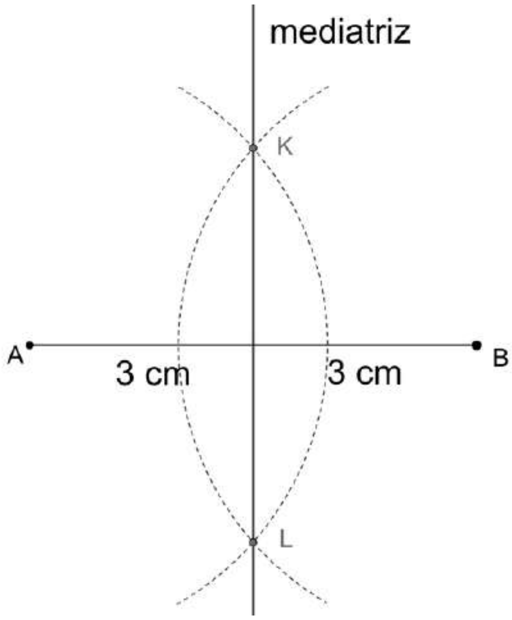
Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Construa a mediatriz de um segmento AB de 6 cm.

Resposta: Vamos seguir alguns passos:
1°) Pegue o Compasso com abertura maior que 3 cm (pode ser 4 cm como no exemplo);
2°) Faça arcos acima e abaixo do segmento AB, nas duas extremidades;
3°)Trace a reta que passa nas interseções dos arcos. Esta é a mediatriz.

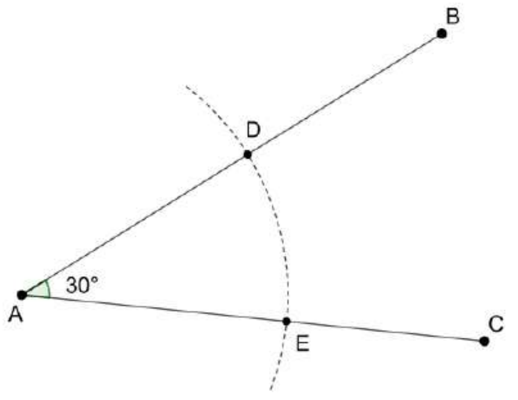


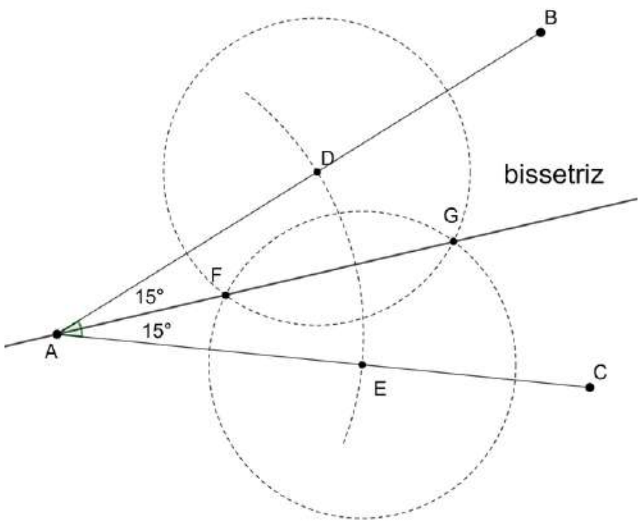


EXERCÍCIO 2

Construa um ângulo de 15º.

Resposta: Após a construção do ângulo de 30°, em seguida basta dividi-lo por meio da bissetriz. Passo a passo:
1°) Com um compasso faça um arco com origem em A, que corte os dois lados do ângulo de 30°.
2°) Chame os pontos onde o arco cruza os lados do ângulo de D e E.
3°) Com centro em D, faça um arco dentro do ângulo. Faça outro arco com centro em E, usando o mesmo raio, até que os arcos se cruzem nos pontos F e G.
4°) Com a régua, ligue o vértice do ângulo (A) aos pontos F e G. Essa é a bissetriz, que divide o ângulo de 30° em duas partes iguais de 15°.



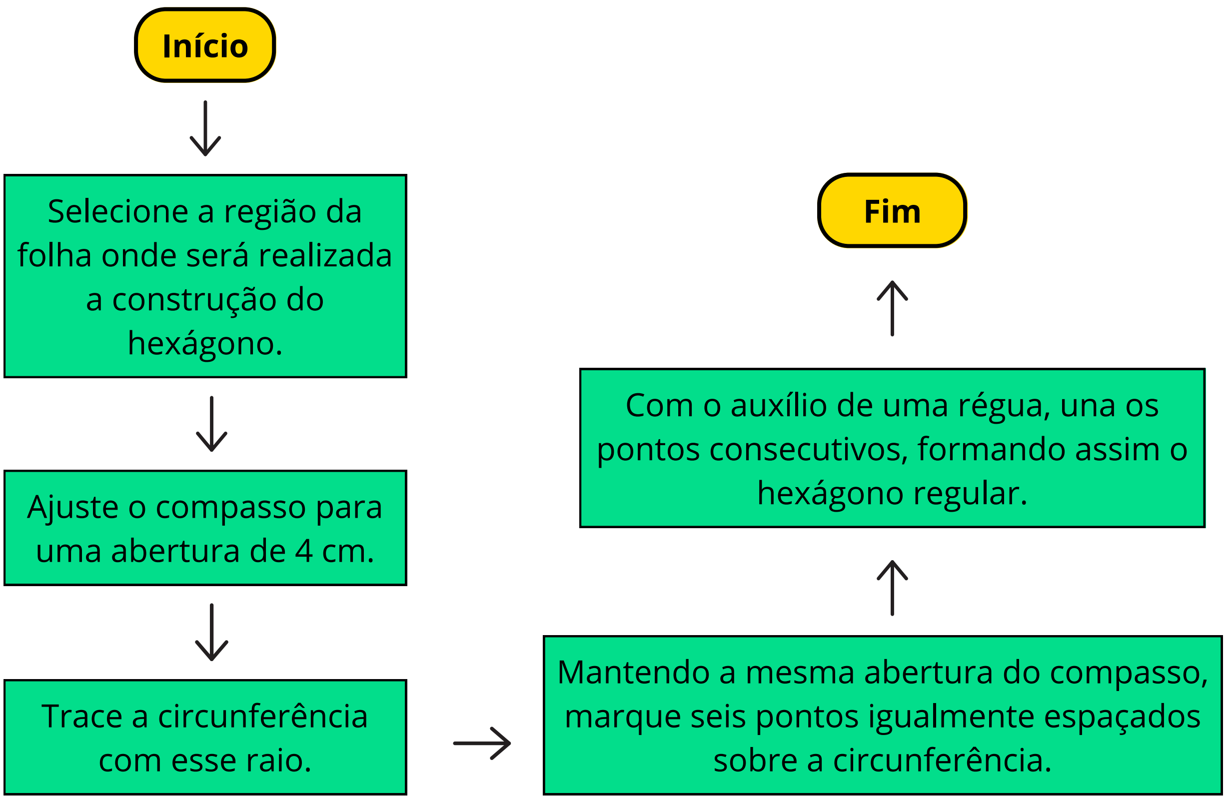


EXERCÍCIO 3

Descreva o algoritmo com fluxograma de um hexágono regular com raio de 4 cm.

Resposta: circunferência de raio 4 cm, marcar 6 pontos, unir com régua.

1. Selecione a região da folha onde será realizada a construção do hexágono.
2. Ajuste o compasso para uma abertura de 4 cm.
3. Trace uma circunferência com esse raio.
4. Mantendo a mesma abertura do compasso, marque seis pontos igualmente espaçados sobre a circunferência.
5. Com o auxílio de uma régua, una os pontos consecutivos, formando assim o hexágono regular



PRÁTICAS EXPERIMENTAIS DE *Matemática* PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

No ano de 2025, o ensino fundamental anos finais apresenta uma importante novidade para o componente curricular Matemática: as Práticas Experimentais de Matemática, que visam fomentar o processo de ensino e aprendizagem favorecendo o desenvolvimento e a consolidação de habilidades, o pensamento crítico e a compreensão e a aplicação da lógica matemática. Intenciona-se, também, combater o estigma de que a matemática é difícil e inacessível, engajando os estudantes em práticas lúdicas e exequíveis.

Desse modo, as práticas foram elaboradas a partir das habilidades estruturantes de cada ano, por trimestre. No período em que constar o caderno de Práticas Experimentais, o(a) professor(a) deverá destinar **duas aulas** para cada prática proposta no material.

Desejamos um ano letivo de sucesso!

Prática experimental de Matemática: 8º ano - Quinzena 14 (2 aulas)

Clique aqui

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

Clique aqui

A conquista matemática - 8° ano : Ensino Fundamental: Anos Finais / José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2022.

- p. 192 a 195.

Teláris Essencial Matemática - 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. - 1. ed. - São Paulo : Ática, 2022.

- p. 161 a 168.

Clique aqui

PIC - OBMEP

Construção da mediatriz e da bissetriz com régua e compasso.

Clique aqui

YOUTUBE

Geometria das abelhas.

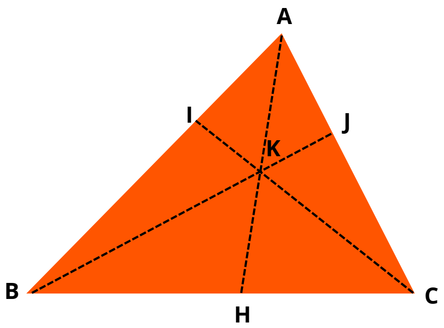
Clique aqui

Atividades

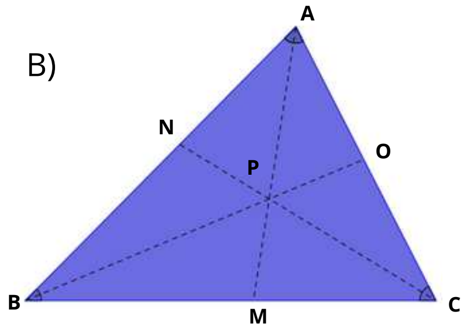
ATIVIDADE 1

Assinale a alternativa em que os segmentos representam as mediatrizes do triângulo.

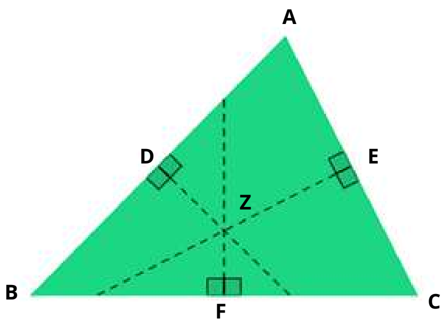
A)



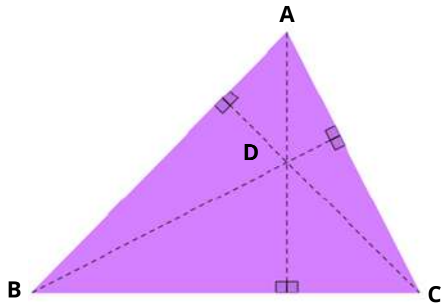
B)



C)



D)



ATIVIDADE 2

A figura a seguir representa um terreno triangular da família Souza com acesso às Ruas A, B e C contornado pelas estradas 1, 2 e 3.

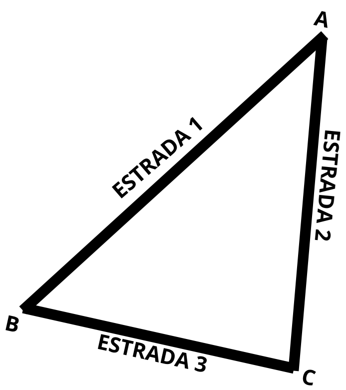


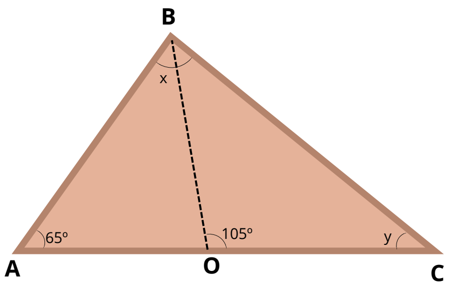
Imagem produzida no Canva.

Joaquim deseja construir uma estrada perpendicular à estrada 3, saindo do seu ponto médio em direção à Estrada 1. A estrada construída coincidirá com a:

A) mediatriz da estrada 3 do terreno.
B) altura do triângulo relativa à estrada 3.
C) bissetriz do ângulo localizado na Rua A.
D) mediatriz da estrada 1, na direção da Rua A.

ATIVIDADE 3

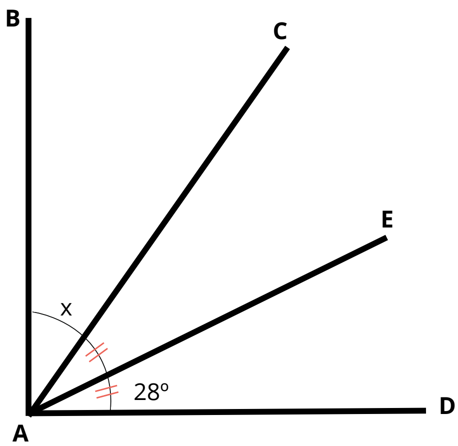
No triângulo ABC foi traçada a bissetriz BO dividindo o ângulo ABC.



Qual a medida, em graus, dos ângulos indicados por x e y?
A) 35º e 70º.
B) 40º e 35º.
C) 65º e 40º.
D) 35º e 75º.

ATIVIDADE 4

O ângulo BÂD mede 90º. Se o segmento AE é bissetriz do ângulo CÂD, então, a medida do ângulo x, em graus, equivale:



A) 24º B) 28º C) 32º D) 34º

ATIVIDADE 5

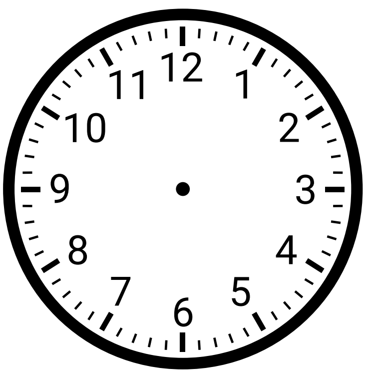
Um engenheiro de tráfego precisa projetar um cruzamento em "L", com um ângulo exato de 90°. Use régua e compasso para construir esse ângulo reto.

ATIVIDADE 6

Um relojoeiro está criando um novo modelo de relógio analógico. Para isso, ele precisa marcar corretamente a posição dos números no mostrador circular.

A) Calcule quantos graus existem entre a marcação de um número e do número seguinte.

B) Represente os dois ponteiros do relógio formando um ângulo de 60°. Indique claramente esse ângulo e explique como ele foi calculado.



ATIVIDADE 7

Uma arquiteta está projetando um piso com azulejos em formatos geométricos. Ela precisa desenhar padrões com triângulos equiláteros e quadrados, todos com lados iguais para encaixarem perfeitamente. Construa, com régua e compasso:

A) Um triângulo equilátero.

B) Um quadrado.

C) Explique por que esses são polígonos regulares.

ATIVIDADE 8

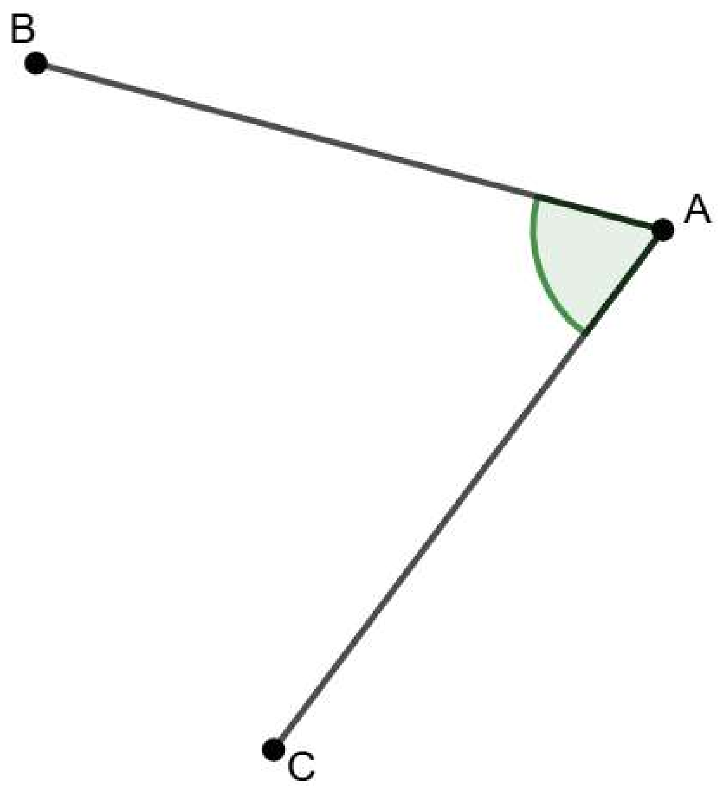
Um engenheiro está planejando a estrutura de uma roda-gigante com cabines igualmente espaçadas. Construa esse polígono regular inscrito em um círculo (ou use transferidor para marcar 72° entre os vértices). Quantos lados esse polígono que inscrito à roda gigante possui?

ATIVIDADE 9

Construa um hexágono inscrito numa circunferência de raio 3,5 cm, a partir do ângulo central.

ATIVIDADE 10

Utilizando régua e compasso, realize a construção da bissetriz do ângulo representado abaixo.



Referências

Dante, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática)

Giovanni Júnior, José Ruy A conquista matemática : 8° ano : ensino fundamental : anos finais / José Ruy Giovanni Júnior. – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2022.

As abelhas sabem mais sobre matemática do que você imagina
disponível em: https://mentalidadesmatematicas.org.br/abelhas-sabem-matematica/

Ilustrações produzidas pelo autor com o *software geogebra*.