GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO

Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

9º Ano | Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

RETAS E ÂNGULOS

HABILIDADES	EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM	DESCRITORES DO SAEB	DESCRITOR DO PAEBES
EF09MA10 Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. **EF09MA14/ES** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes/transversal (Teorema de Tales).	• Identificar retas ou segmentos de retas concorrentes, paralelos ou perpendiculares. • Identificar relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. • Resolver problemas que envolvam relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. • Resolver problemas que envolvam aplicação das relações de proporcionalidade abrangendo retas paralelas cortadas por transversais. • Elaborar problemas que envolvam aplicação das relações de proporcionalidade abrangendo retas paralelas cortadas por transversais.	• **9G1.9** Identificar retas ou segmentos de retas concorrentes, paralelos ou perpendiculares. • **9G1.10** Identificar relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. • **9G2.3** Resolver problemas que envolvam relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, ângulos internos ou externos de polígonos ou cevianas (altura, bissetriz, mediana, mediatriz) de polígonos. • **9G2.6** Resolver problemas que envolvam aplicação das relações de proporcionalidade abrangendo retas paralelas cortadas por transversais.	**D123_M** Utilizar Teorema de Tales para resolver problemas significativos.

Contextualização

Design: Getty Images Signature/ Fonte: Canva

Entender a diferença entre retas paralelas, concorrentes e perpendiculares é fundamental em várias áreas da Matemática e suas aplicações, incluindo geometria, álgebra e até mesmo em campos como Engenharia e Física.

Além disso, usamos esse conhecimento no dia a dia de diversas formas como, por exemplo, organização de objetos ao arrumar uma estante ou uma mesa. A disposição de objetos pode ser feita utilizando linhas retas para criar um visual organizado.

Na jardinagem, ao planejar canteiros ou caminhos em um jardim, o uso de retas paralelas ou perpendiculares pode ajudar a criar um espaço esteticamente agradável.

Essas aplicações mostram que, embora os conceitos de retas possam parecer abstratos, eles têm um impacto direto e prático em muitas áreas do dia a dia.

Neste material, nós vamos estudar as retas, assim como ângulos formados por retas concorrentes e as suas aplicações.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

RETAS PARELELAS, CONCORRENTES OU PERPENDICULARES

Neste material, vamos identificar retas ou segmentos de retas paralelas, concorrentes ou perpendiculares.

- Retas paralelas

Quando duas retas contidas em um mesmo plano não têm pontos em comum, elas são denominadas **retas paralelas**.

Veja o exemplo:

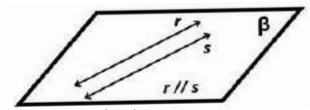


Imagem produzida no Canva

As retas *r* e *s*, contidas no plano β, representadas na figura ao lado, são **paralelas**, pois elas não têm pontos em comum.
Indicamos: $r \,//\, s$.

Como exemplo prático, olhe para as linhas do teu caderno. Elas são paralelas porque "nunca se encontrarão".


Design: Viktor Morozuk/ Fonte: Canva

- Retas concorrentes

Quando duas retas têm um único ponto em comum, elas são denominadas **retas concorrentes**.

Veja o exemplo:

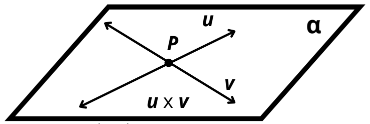


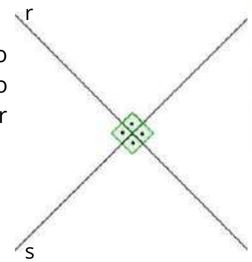
Imagem produzida no Canva

As retas *u* e *v*, contidas no plano α, representadas na figura ao lado, são concorrentes, pois o ponto *P* é o único ponto em comum entre elas.
Indicamos: $u \times v$.

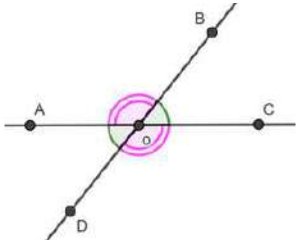
- Retas perpendiculares

Quando duas retas concorrentes formam entre si quatro ângulos de 90° (ângulos retos), dizemos que as retas são **perpendiculares** e utilizamos o símbolo $\perp$ para representar esse perpendicularismo.
Na figura, *r* e *s* formam entre si quatro ângulos retos.
Então, $r \perp s$.

é perpendicular a



ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE (O.P.V)



Na figura ao lado, estão destacados os ângulos AÔB, BÔC, CÔD e DÔA. Nela temos:

- $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são semirretas opostas.
- $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são semirretas opostas.

Portanto, as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, que formam os lados de AOB são opostas, respectivamente, às semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$, que formam os lados de $C\hat{O}D$.

Nesse caso, podemos afirmar também que os lados de $A\hat{O}B$ são formados pelos prolongamentos dos lados de $C\hat{O}D$, e vice versa.

A esses dois ângulos ($A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$) damos o nome de **ângulos opostos pelo vértice**.

Observando a figura, verificamos que $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ também são opostos pelo vértice.

Dois ângulos são chamados opostos pelo vértice (abreviamos o.p.v.) quando os lados de um forem prolongamentos dos lados do outro, e vice-versa.

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, têm a **mesma medida.**

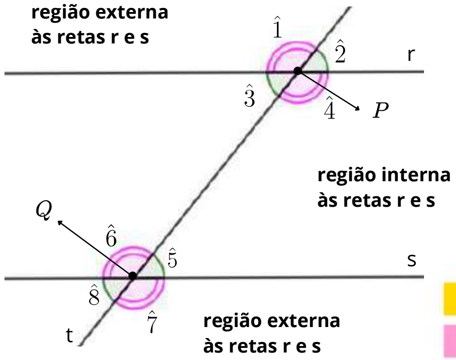
RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

Nesta seção, vamos identificar relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

A figura nos mostra três retas (***t***, ***r*** e ***s***), todas pertencentes a um mesmo plano. A reta *t* corta a reta *r* no ponto *P*, e a reta *s*, no ponto *Q*.

Observe que a reta *t* forma com as retas *r* e *s* oito ângulos, sendo quatro com vértices em *P* e quatro com vértices em *Q*.

Para facilitar a visualização, vamos indicar esses oito ângulos numerando-os. Veja na figura.



- ângulos com vértices em $P \rightarrow \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ e $\hat{4}$.
- ângulos com vértices em $Q \rightarrow \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}$ e $\hat{8}$.

A reta *t*, concorrente à reta *r* no ponto *P* e concorrente à reta *s* no ponto *Q*, é chamada de **reta transversal** a *r* e *s*.

Vamos conhecer algumas relações importantes entre os ângulos formados por essas retas.

Referências

BARBOSA, M. L. Educação e Tecnologia no Século XXI: Reflexões para o Futuro do Trabalho. Editora Educação e Sociedade, 2022.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

CLUBE DE MATEMÁTICA OBMEP. Problema para ajudar na escola: dois terrenos da rua Arquimedes. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-para-ajudar-na-escola-dois-terrenos-da-rua-arquimedes/. Acesso em: 5 mar. 2025.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria da Educação. Matemática – 2ª Série – 3ª Semana. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/wp-content/uploads/2024/03/MAT-2a-Serie-3a-Semana.pdf. Acesso em: 06 mar. 2025.

MUNDO EDUCAÇÃO. Teorema da Bissetriz Interna. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/teorema-bissetriz-interna.htm. Acesso em: 05 mar. 2025.

NOVA ESCOLA. Plano de aula: Explorando ângulos na intersecção entre retas. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/explorando-angulos-na-interseccao-entre-retas/222. Acesso em: 04 mar. 2025.

NOVA ESCOLA. Plano de aula: Posição entre retas e seus ângulos. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/posicao-entre-retas-e-seus-angulos/150. Acesso em: 04 mar. 2025.

Orientações curriculares. Currículo ES, 2024. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares/. Acesso em: 10 fev. 2025.

QUIZUR. Relações métricas no triângulo retângulo. Disponível em: https://pt.quizur.com/trivia/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo-z9a3. Acesso em: 8 mar. 2025.

UNESP – IBILCE. O Teorema de Pitágoras. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/oteoremadepitagoras.pdf. Acesso em: 07 mar. 2025.

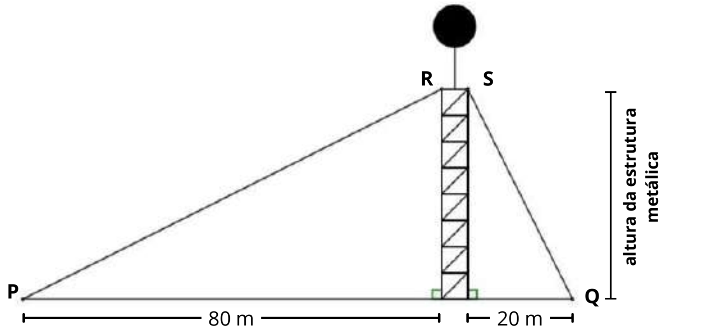


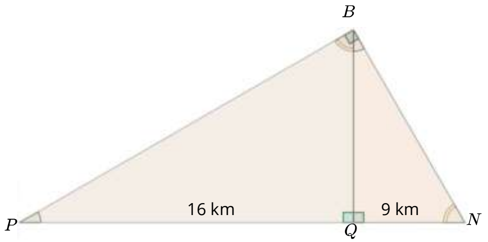
Imagem produzida no Canva

A medida da altura dessa estrutura metálica é:

A) 10 m
B) 16 m
C) 40 m
D) 60 m

ATIVIDADE 9

Beatriz está hospedada em uma cidade que possui três pontos turísticos famosos. No desenho abaixo, o ponto B indica o local onde Beatriz está hospedada, e os pontos N, Q e P representam os três pontos turísticos.



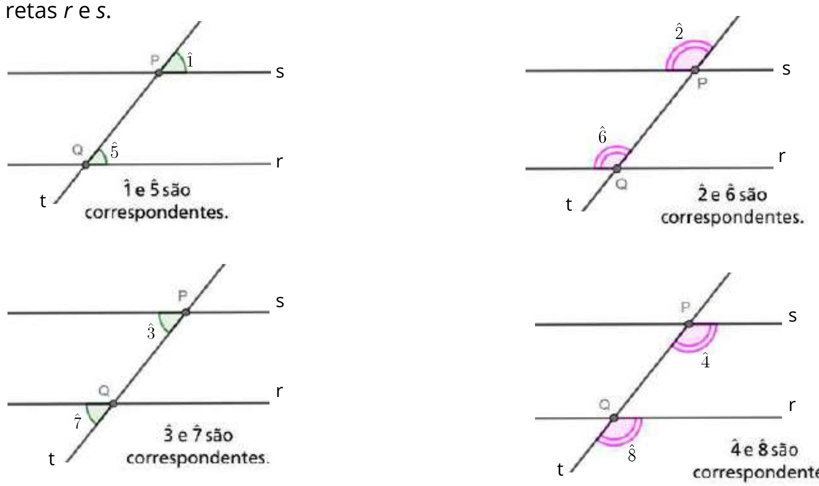
Beatriz optou por visitar o ponto turístico representado pelo ponto N e fará isso percorrendo, na ida e na volta, o mesmo trajeto. Considerando as distâncias indicadas no mapa, qual é a menor distância total que Beatriz percorrerá, em quilômetros, para ir do hotel ao ponto N e retornar ao hotel?

ATIVIDADE 10

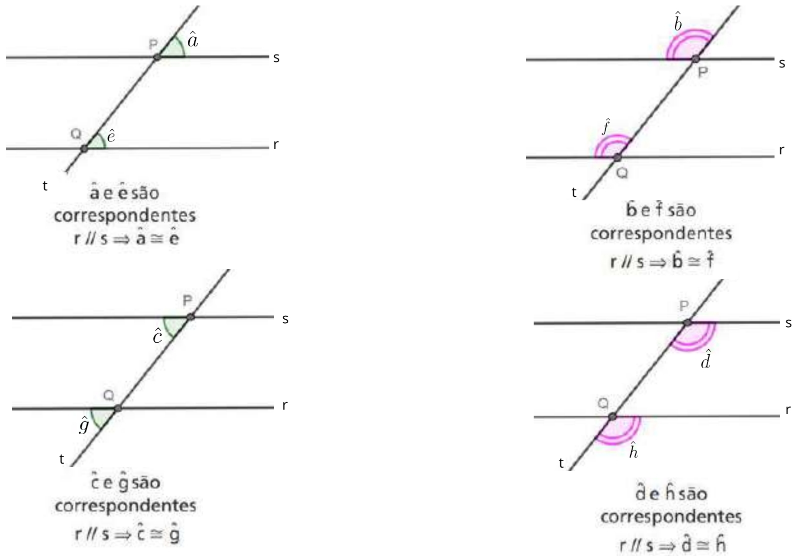
Com base nas relações métricas no triângulo retângulo que você estudou, elabore um problema que envolva pelo menos uma dessas relações. Em seguida, resolva-o detalhadamente, explicando cada etapa.

ÂNGULOS CORRESPONDENTES

Ângulos correspondentes são pares de ângulos não adjacentes, situados em um mesmo lado da reta transversal *t*, um na região interna e o outro na região externa às retas *r* e *s*.



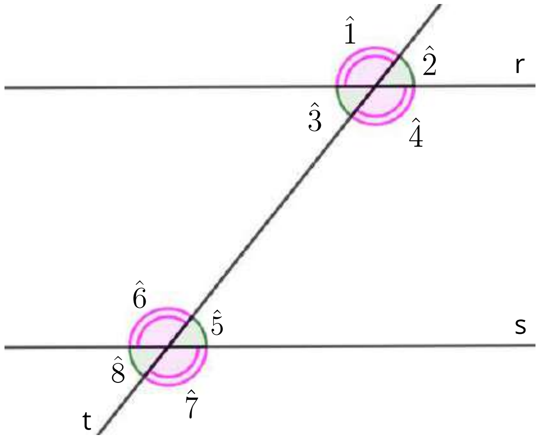
Se a reta transversal corta duas retas determinando ângulos correspondentes congruentes, então essas retas são paralelas $\hat{a} \cong \hat{e} \Rightarrow r//s$ (veja a figura abaixo)
A recíproca também é verdadeira: duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos correspondentes congruentes.



Usaremos essa propriedade para resolver a situação no exercício resolvido.

ÂNGULOS ALTERNOS

Ângulos alternos são pares de ângulos não adjacentes que estão em lados opostos em relação à reta transversal.



$\hat{3}$ e $\hat{5}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal t e na região determinada entre as retas *r* e *s* (região interna).

$\hat{3}$ e $\hat{5}$ são ângulos alternos internos.

$\hat{4}$ e $\hat{6}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal t e na região determinada entre as retas *r* e *s*.

$\hat{4}$ e $\hat{6}$ são ângulos alternos internos

$\hat{1}$ e $\hat{7}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*.

$\hat{1}$ e $\hat{7}$ são ângulos alternos externos.

$\hat{2}$ e $\hat{8}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*.

$\hat{2}$ e $\hat{8}$ são ângulos alternos externos.

Duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos alternos congruentes (internos ou externos).

ATIVIDADE 6

O gato Pitágoras decidiu que sua vida de sofá e ração não era suficiente e planejou uma fuga cinematográfica! Ele saltou da janela de João que fica a 5 metros de altura, em linha reta, e aterrissou a 12 metros de distância da base da parede.
Mas o gato não parou por aí! Após tocar o solo, ele imediatamente correu 9 metros em linha reta para se esconder atrás de uma árvore.
Qual foi a distância total percorrida por Pitágoras desde o momento em que pulou da janela até chegar à base da árvore?

A) 18 metros
B) 20 metros
C) 21 metros
D) 22 metros

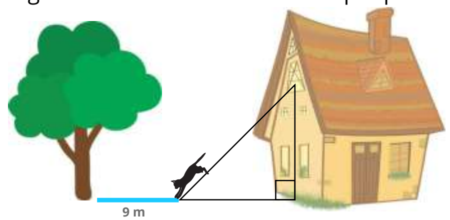


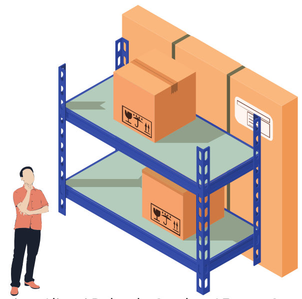
Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 7

Um funcionário estava organizando um galpão quando percebeu que a escada que usava para alcançar uma prateleira alta havia sumido. Ele encontrou apenas uma tábua de madeira e resolveu improvisar. O problema é que ele precisa alcançar uma prateleira a 3,2 metros do chão e só consegue apoiar a tábua no chão a uma distância de 2,4 metros da base da prateleira.

Antes de subir, ele quer ter certeza de que a tábua tem um comprimento suficiente para alcançar a prateleira com segurança. Qual deve ser o comprimento mínimo da tábua para alcançar a prateleira?

A) 4 m
B) 5 m
C) 6 m
D) 7 m



Design: Ivan Design / Fonte: Canva

Design: Aliansi Bobe de Gambar / Fonte: Canva

ATIVIDADE 8

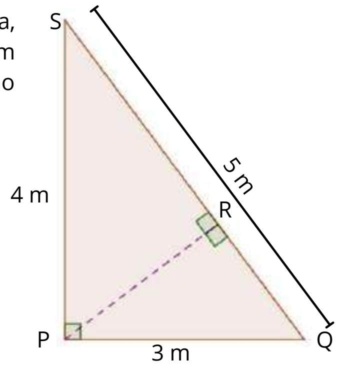
Uma antena de telefonia é formada por uma estrutura metálica com um dispositivo esférico anexado a seu topo. Observe a figura abaixo que apresenta um esboço dessa antena com essa estrutura metálica e algumas de suas dimensões indicadas. Por questões de segurança, foram fixados no solo dois cabos de aço a partir dos pontos P e Q, respectivamente, até os pontos R e S representados nesse esboço. Os funcionários que realizam manutenções nessa antena precisam determinar a medida da altura dessa estrutura metálica com base nos dados contidos nesse esboço.

ATIVIDADE 3

Para reforçar uma estrutura triangular em sua obra, um engenheiro encomendou de um serralheiro, em vergalhão, a peça representada pelo segmento PR no desenho abaixo.

Qual deve ser a medida do comprimento, em metros, da peça encomendada pelo engenheiro?

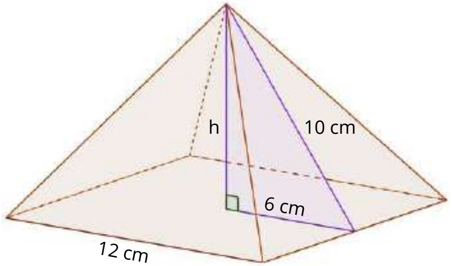
A) 1,0
B) 1,4
C) 2,0
D) 2,4



ATIVIDADE 4

Você precisa construir uma estrutura em forma de pirâmide para uma maquete escolar. A pirâmide tem base quadrada com 12 cm de lado e suas faces laterais são triângulos isósceles, cada um com altura de 10 cm. Qual é a altura da pirâmide?

A) 6 cm
B) 8 cm
C) 10 cm
D) 12 cm



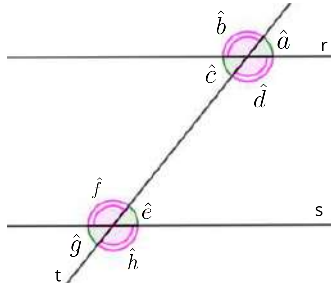
ATIVIDADE 5

Uma construtora está projetando um telhado em formato triangular para possibilitar a construção de um sótão. O telhado tem formato de um triângulo retângulo e um pilar de sustentação será instalado exatamente onde está indicada a altura h, dividindo a base em dois segmentos, conforme mostra a figura abaixo.
Se o pilar dividirá a base em dois segmentos que medem 4 metros e 6 metros, qual deve ser a altura h desse pilar de sustentação?

A) 4,2 m
B) 4,5 m
C) 4,9 m
D) 5,2 m

Imagem produzida no canva

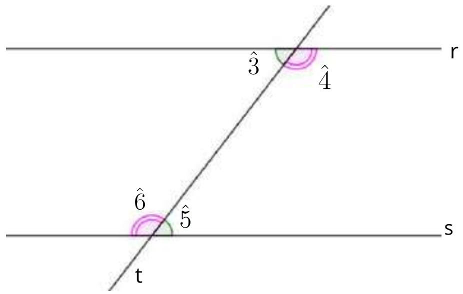
Assim:



$$r//s \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \hat{c} \cong \hat{e} \\ \hat{d} \cong \hat{f} \end{array}\right\} \text{alternos internos} \\ \left.\begin{array}{l} \hat{a} \cong \hat{g} \\ \hat{b} \cong \hat{h} \end{array}\right\} \text{alternos externos} \end{cases}$$

ÂNGULOS COLATERAIS

Ângulos colaterais são pares de ângulos não adjacentes localizados no mesmo lado da reta transversal.

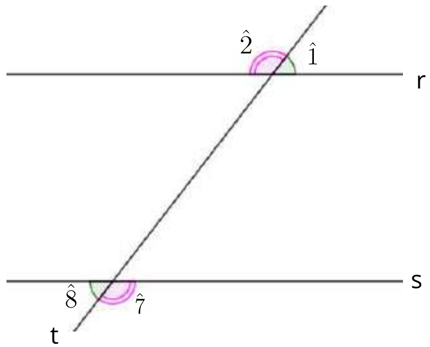


$\hat{3}$ e $\hat{6}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal t e na região interna às retas r e s.

$\hat{3}$ e $\hat{6}$ são ângulos **colaterais internos**.

$\hat{4}$ e $\hat{5}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal t e na região interna às retas r e s.

$\hat{4}$ e $\hat{5}$ são ângulos **colaterais internos**.



$\hat{1}$ e $\hat{7}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal t e na região externa às retas r e s.

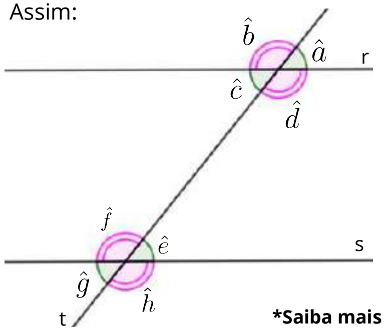
$\hat{1}$ e $\hat{7}$ são ângulos **colaterais externos**.

$\hat{2}$ e $\hat{8}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal t e na região externa às retas r e s.

$\hat{2}$ e $\hat{8}$ são ângulos **colaterais externos**.

Duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos colaterais (internos ou externos) suplementares*.

Assim:



$$r//s \Rightarrow \begin{cases} c + f = 180^\circ \\ d + e = 180^\circ \\ a + h = 180^\circ \\ b + g = 180^\circ \end{cases}$$

$c + f = 180^\circ$ e $d + e = 180^\circ$: colaterais internos

$a + h = 180^\circ$ e $b + g = 180^\circ$: colaterais externos

***Saiba mais sobre ângulos suplementares na página Material Extra.**

PROPRIEDADE EM UM FEIXE DE RETAS PARALELAS

Existem algumas propriedades básicas a respeito de proporcionalidade quando um feixe de retas paralelas é cortado por uma reta transversal.

Observa a seguinte situação:

Ana Luíza representou uma reta *s* e indicou nela os pontos A, B, C e D, com mesma distância de 1,4 cm. Em seguida, ela representou as retas *a, b, c* e *d*, paralelas entre si e não paralelas a reta *s,* passando pelos respectivos pontos. Logo depois, Ana Luíza representou reta t transversal a esse feixe de retas paralelas e indicou os pontos *E, F, G e H.* Em seguida, ela mediu cuidadosamente o comprimento dos segmentos EF, FG e GH e percebeu que eles também tinham a mesma medida de comprimento, que era de 1,5 cm. Assim, ela pôde escrever:

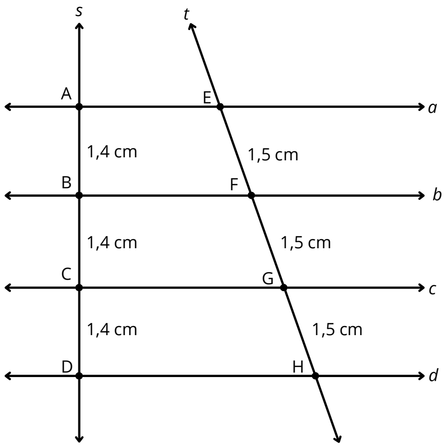


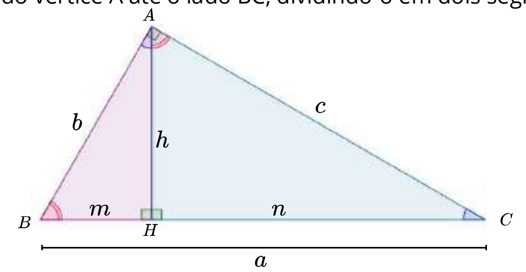
Imagem produzida no Canva

$$\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG} = 1 \text{, pois } \frac{1,4}{1,4} = \frac{1,5}{1,5} = 1$$

Atividades

ATIVIDADE 1

Na figura ao lado, o triângulo ABC é retângulo em A, onde AB=b, AC=c e BC=a. A altura h foi traçada do vértice A até o lado BC, dividindo-o em dois segmentos: m e n.



Com base nas relações métricas dos triângulos retângulos, resolva os seguintes itens:

Observação: Para cada item abaixo, utilize a figura como referência, mas considere os valores fornecidos em cada questão de forma independente.

A) Se a=12 cm e b=6 cm, qual é o valor de m?
B) Se m=9 cm e n=16 cm, calcule a altura h.
C) Sabendo que b=15 cm e c=20 cm, determine o valor de a.
D) Determine o valor de b sabendo que h=16 cm e m=12 cm.

ATIVIDADE 2

A praça principal de uma cidade do interior sofrerá pequenas reformas para sediar uma festa junina com barraquinhas de comidas típicas. Uma das reformas será colocar grades nas laterais da praça, cujo acesso se dá pelas Ruas I e II, mantendo livre para passagem do público a lateral da praça acessada pela Rua III, conforme o esquema abaixo.

Qual é a medida, em metros, do comprimento da lateral da praça por onde o público terá acesso à festa?

A) 16
B) 24
C) 25
D) 41

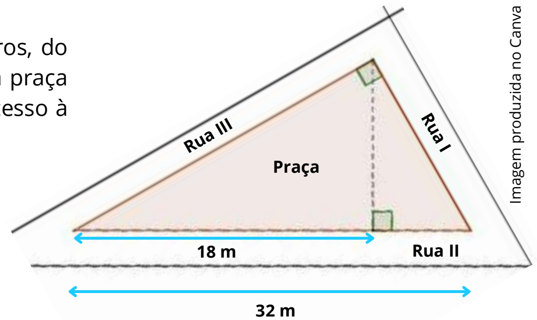


Imagem produzida no Canva

GEOGEBRA

Quebra-cabeças: Teorema de Pitágoras

Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

ATIVIDADES INVESTIGATIVAS COM MATERIAL CONCRETO

Teorema de Pitágoras e Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Temos, então, que:

Se um feixe de retas paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, ele também determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Agora, observe o que acontece quando os segmentos de reta determinados por um feixe de retas sobre uma transversal **não são** congruentes e cujas medidas de comprimentos são números racionais.

Considere um feixe de 3 retas paralelas *r*, *s* e *v* intersectado por uma transversal *t*. Representamos outra reta transversal qualquer *u*.

Neste caso particular, AB = x cm, BC = 3x e $\frac{AB}{BC} = \frac{1x}{3x} = \frac{1}{3}$. **(I)**

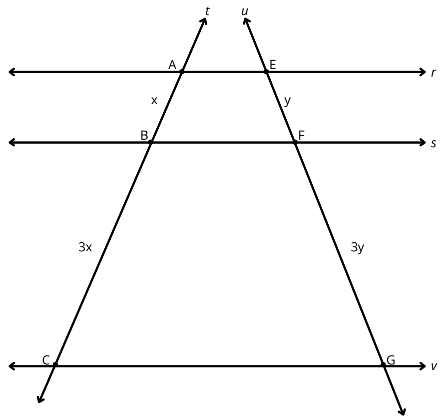


Imagem produzida no Canva

Se você medir o comprimento dos segmentos de reta *EF* e *FG*, poderá constatar (salvo pequenos erros de medição) que *EF* = *y* cm e *FG* = 3*y* cm, ou seja: $\frac{EF}{FG} = \frac{1y}{3y} = \frac{1}{3}$. **(II)**

De (I) e (II), podemos concluir que $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$, ou seja, as medidas de comprimento *AB*, *BC*, *EF* e *FG* formam uma **proporção.**

Um feixe de retas paralelas determina, sobre 2 retas transversais, segmentos de reta proporcionais.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Na figura, temos *r // s*. Determine as medidas *a* e *b*.

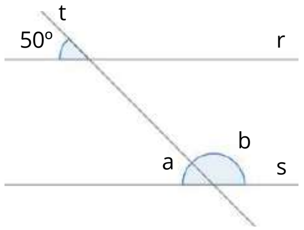


Imagem produzida no Canva

SOLUÇÃO

Como r // s, temos:
a = 50° (ângulos correspondentes)
Como *a* e *b* são suplementares, ou seja, somam 180º, temos:

$$a + b = 180°$$
$$50° + b = 180°$$
$$b = 130°$$

EXERCÍCIO 2

Determine a medida dos ângulos *b, c, d, e, f, g* e *h*, sabendo que *a* = 130º.

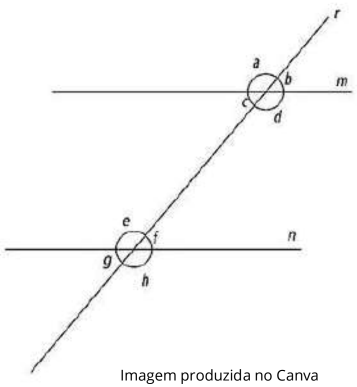


Imagem produzida no Canva

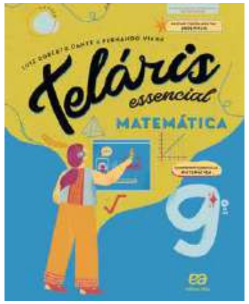
Material Extra

Para consolidação dos conteúdos apresentados neste material, sugerimos:

LIVROS DIDÁTICOS

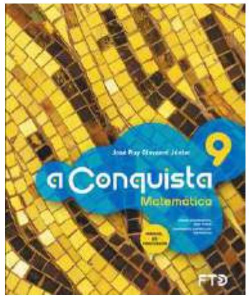
Livro Teláris Essencial – Matemática – 9º ano

- A Constatação do Teorema de Pitágoras e uma sugestão para pesquisa apresentada na página 171.
- A atividade lúdica da página 172.
- A Demonstração do Teorema de Pitágoras apresentada nas páginas 176.
- Na página 171 pode-se trabalhar com uma constatação do Teorema de Pitágoras e uma sugestão para pesquisa.
- A lista de atividades da página 186



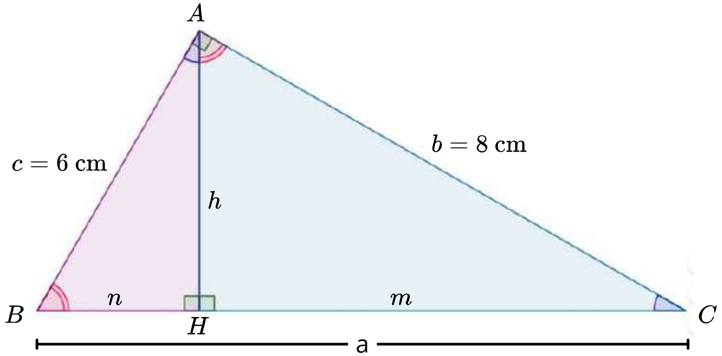
Livro A Conquista da Matemática – 9º ano

O Teorema de Pitágoras também pode ser trabalhado no livro A Conquista da Matemática a partir da página 206.



EXERCÍCIO 2

No triângulo ABC da figura, vamos calcule **a**, **h**, **m** e **n**.



SOLUÇÃO

Começamos pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 8^2 + 6^2$$
$$a^2 = 64 + 36$$
$$a = \pm\sqrt{100}$$
$$a = \pm 10$$

Como **a** representa uma medida, seu valor deve ser positivo. Portanto, **a = 10 cm**.

Em seguida, utilizamos as relações métricas demonstradas:

$$c^2 = a \cdot n \qquad b^2 = a \cdot m \qquad b \cdot c = a \cdot h$$
$$6^2 = 10 \cdot n \qquad 8^2 = 10 \cdot m \qquad 8 \cdot 6 = 10 \cdot h$$
$$36 = 10 \cdot n \qquad 64 = 10 \cdot m \qquad 48 = 10h$$
$$\frac{36}{10} = \frac{10n}{10} \qquad \frac{64}{10} = \frac{10m}{10} \qquad \frac{48}{10} = \frac{10h}{10}$$
$$3,6 = n \qquad 6,4 = m \qquad 4,8 = h$$

Logo, **n = 3,6 cm**, **m = 6,4 cm** e **h = 4,8 cm.**

SOLUÇÃO

Na figura, *m* e *n* são retas paralelas.
Conhecendo a medida de um dos ângulos, a = 130º, por exemplo, podemos determinar a medida dos demais.
Veja: Como *m // n*, os ângulos correspondentes são congruentes.

a = e = 130º (ângulos correspondentes)
a + b = 180º (ângulos suplementares)
130º + b = 180º
n = 50º
b = f = 50º (ângulos correspondentes)

d = a = 130º
c = b = 50º
g = f = 50º
h = e = 130º

→ ângulos opostos pelo vértice (o.p.v)

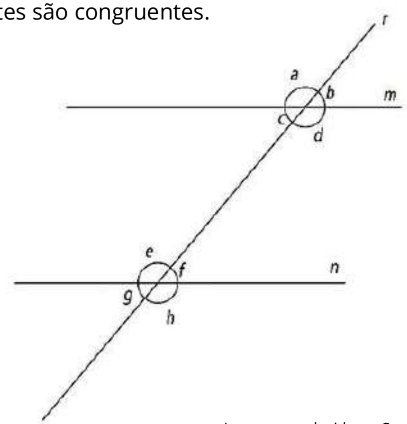


Imagem produzida no Canva

EXERCÍCIO 3

Determine o valor de x, sabendo que as retas *a, b* e c desta figura são paralelas e que as retas *t* e *s* não são.

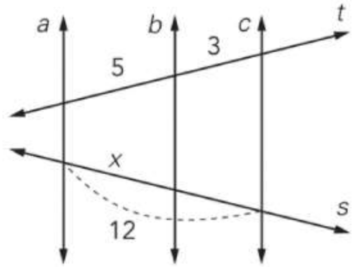


Imagem produzida no Canva

SOLUÇÃO

$$\frac{12}{x} = \frac{5+3}{5} \Rightarrow 8x = 60 \Rightarrow x = 7,5$$

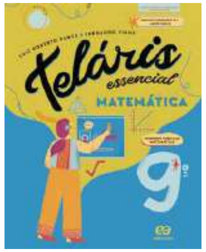
Portanto, o valor de x é 7,5.

Material Extra

Para consolidação dos conteúdos apresentados neste material, sugerimos:

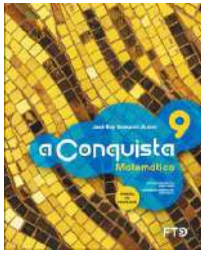
LIVROS DIDÁTICOS

Livro Teláris Essencial – Matemática – 9º ano



- A atividade da página 81.

Livro A Conquista da Matemática – 9º ano



- A lista de atividades da página 126.

PIC e Portal da Matemática - OBMEP

Posição relativa entre retas

Ângulos Opostos pelo Vértice

Ângulos Complementares e Supementares

Teorema de Tales

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Calcule o comprimento x de uma escada que está apoiada em uma parede, conforme a figura abaixo.

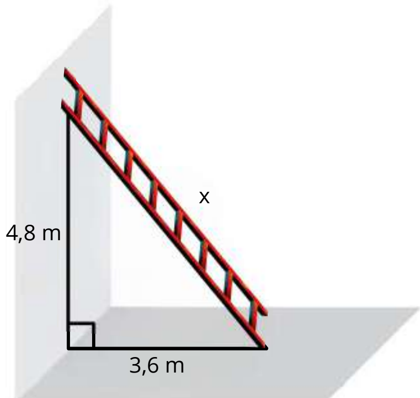


Imagem produzida no Canva

SOLUÇÃO

Vamos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = (4,8)^2 + (3,6)^2$$
$$x^2 = 23,04 + 12,96$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm\sqrt{36}$$
$$x = \pm 6$$

Como x é o comprimento da escada, ele deve ser um número positivo. Portanto, o comprimento da escada é 6 m.

$a = m + n$	Em qualquer triângulo retângulo, a medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma das medidas de comprimento das projeções dos catetos sobre ela.
$b^2 = a \cdot m$ $c^2 = a \cdot n$	Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de comprimento de um cateto é igual ao produto da medida de comprimento da hipotenusa pela medida de comprimento da projeção desse cateto sobre a hipotenusa.
$h^2 = m \cdot n$	Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas de comprimento das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.
$c \cdot b = a \cdot h$	Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas de comprimento dos catetos é igual ao produto da medida de comprimento da hipotenusa pela medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa.
$a^2 = b^2 + c^2$	(Teorema de Pitágoras) Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos catetos.
$b \cdot h = m \cdot c$ $c \cdot h = n \cdot b$	Em qualquer triângulo retângulo, o produto da medida de comprimento de um dos catetos pela medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto da projeção desse cateto sobre a hipotenusa pela medida de comprimento do outro cateto.

CONEXÕES MATEMÁTICAS SEDU - 2025

Atividades

ATIVIDADE 1

Observe a figura abaixo e dê a posição relativa das retas (paralelas ou concorrentes):

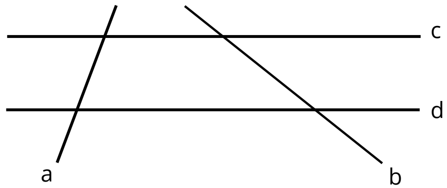
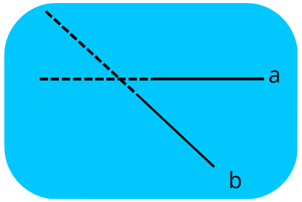


Imagem produzida no Canva



Lembrando que a reta é imaginada sem começo nem fim. Portanto, vale prolongar as retas para conferir se elas se interceptam.

a) a e b.
b) a e c.
c) a e d.
d) c e d.
e) b e c.

ATIVIDADE 2

Determine os valores de x e y na figura seguinte:

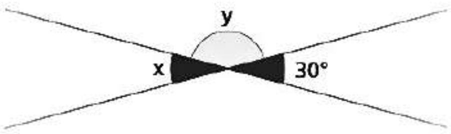


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 3

Dois ângulos opostos pelo vértice têm medidas, em graus, expressas por x + 50° e 2x - 30°. Qual é o valor de x?

ATIVIDADE 4

Determine os valores de *x* e *y*, *a* na figura abaixo.

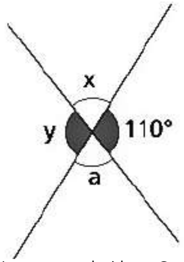
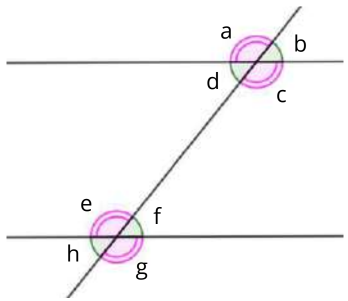


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 5

Com base na imagem e nas informações fornecidas, analise as seguintes afirmações sobre os ângulos formados por uma reta transversal que corta duas retas paralelas:



I. Os ângulos **a** e **h** são colaterais externos.
II. Os ângulos **c** e **f** são internos e opostos pelo vértice.
III. Os ângulos **b** e **g** são externos e colaterais.
IV. Os ângulos **d** e **e** são internos e colaterais.

Assinale a alternativa correta:

A) Apenas as afirmações I e III estão corretas.
B) Apenas as afirmações II e IV estão corretas.
C) Apenas as afirmações I, II e III estão corretas.
D) Apenas as afirmações I, III e IV estão corretas.

ATIVIDADE 6

Observe a figura abaixo. Temos que a // b // c. Considerando as medidas dadas, em unidade de comprimento, calcule o valor de x.

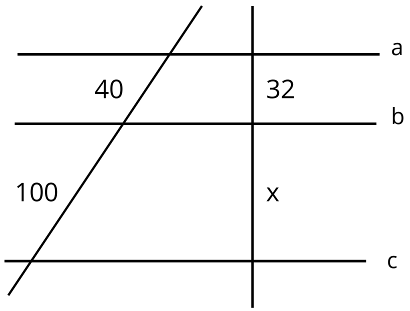


Imagem produzida no Canva

Observe que os triângulos HBA e HAC possuem três pares de ângulos congruentes, sendo um deles ângulos de 90°. Dessa forma, pela condição de semelhança AA (ângulo-ângulo), conclui-se que os triângulos são semelhantes. Consequentemente, seus lados correspondentes são proporcionais. Portanto, podemos escrever as proporções:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} = \frac{c}{b}$$

A partir delas obtemos as seguintes relações:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}\text{, ou seja, } \boxed{h^2 = m \cdot n} \qquad \frac{n}{h} = \frac{c}{b}\text{, ou seja, } \boxed{n \cdot b = h \cdot c}$$

Sabendo que $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$, é possível somar membro a membro dessas igualdades, resultando em:

$$\left.\begin{matrix} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot m \end{matrix}\right\} \; b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (n + m)$$

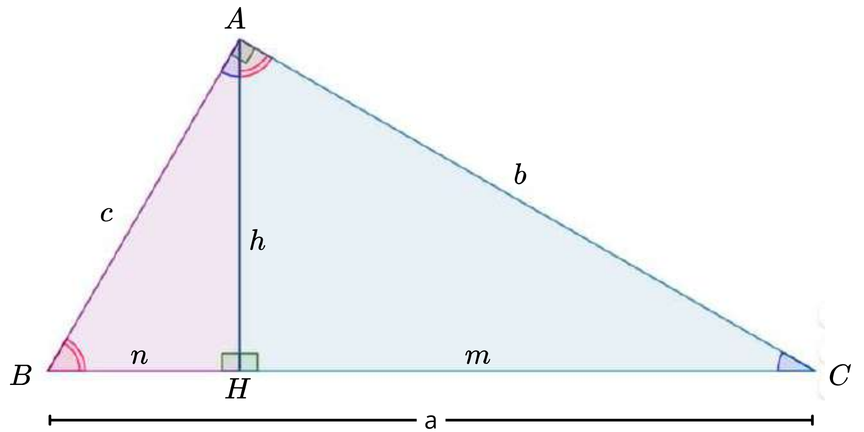
Como $a = n + m$ temos:

Teorema de Pitágoras.

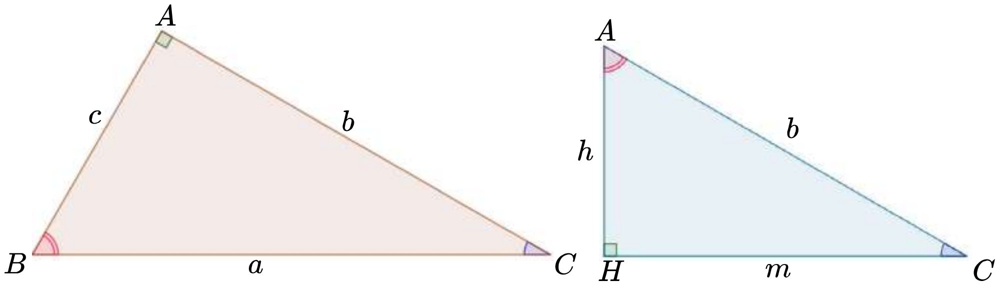
$$b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow \boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

Esta é apenas uma das diversas demonstrações possíveis do Teorema de Pitágoras. Outras abordagens podem ser encontradas no **Material Extra**.

Com base no triângulo a seguir, apresentamos um quadro-resumo com as principais relações métricas abordadas ao longo deste material.



Agora considere os triângulos ABC e HAC



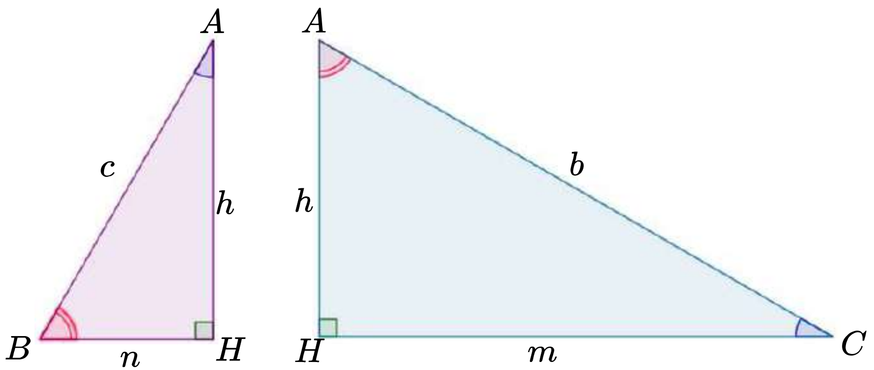
Assim como no casos anterior, os dois triângulos possuem um ângulo reto e compartilham um ângulo em comum. Dessa forma, pela condição de semelhança AA (ângulo-ângulo), conclui-se que os triângulos ABC e HAC são semelhantes. Consequentemente, seus lados correspondentes são proporcionais. Logo, podemos escrever as proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h}$$

A partir dessas proporções obtemos as seguintes relações:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}\text{, ou seja, } b^2 = a \cdot m \qquad \frac{b}{m} = \frac{c}{h}\text{, ou seja, } b \cdot h = m \cdot c$$

Para finalizar considere os triângulos HBA e HAC.



ATIVIDADE 7

Na figura a seguir, temos r // s // t. Determine a medida x indicada.

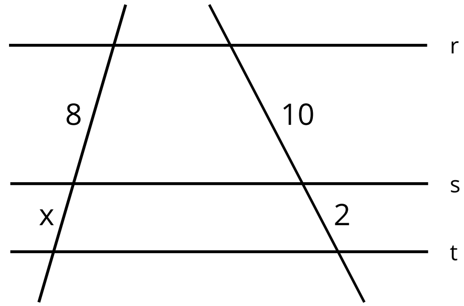


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 8

Determine a medida de y na figura a seguir, sabendo que a // b // c;

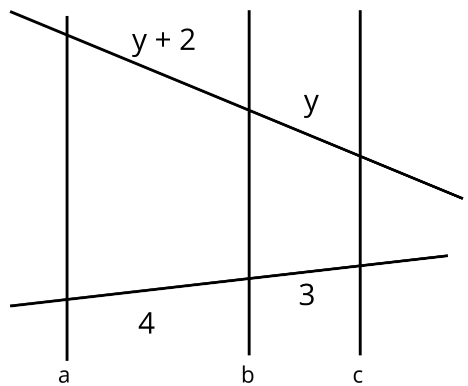
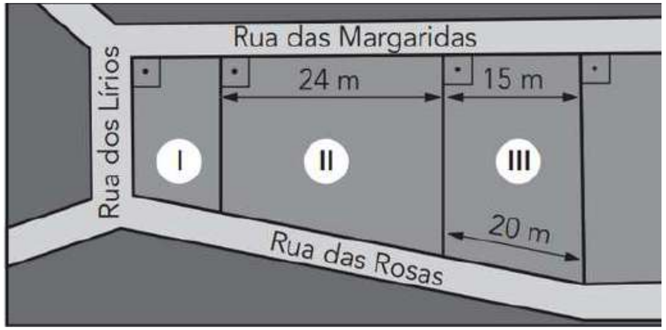


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 9

(SARESP-SP) No desenho abaixo estão representados os terrenos I, II e III. Quantos metros de comprimento deverá ter o muro que o proprietário do terreno II construirá para fechar o lado que faz frente com a Rua das Rosas?



ATIVIDADE 10

Vamos fazer um experimento. Você precisará de uma folha de caderno comum com linhas paralelas, lápis e régua.

(I) Utilizando uma régua, trace uma reta *r* vertical na folha do seu caderno (perpendicular às linhas do caderno), de tal forma que as linhas dessa folha sejam as linhas paralelas cortadas por essa reta *r* que você vai traçar.

(II) Trace uma reta *s*, ao lado da reta *r*, desta vez, na diagonal (não perpendicular às linhas do caderno) para que *r* e *s* não sejam paralelas.

(III) Observe que a reta r, ao cortar as linhas do seu caderno, determinou vários segmentos de reta, que representam a distância entre as linhas paralelas da folha de de caderno. Meça essas distâncias entre as linhas, ou seja, cada segmento formado na reta *r*.

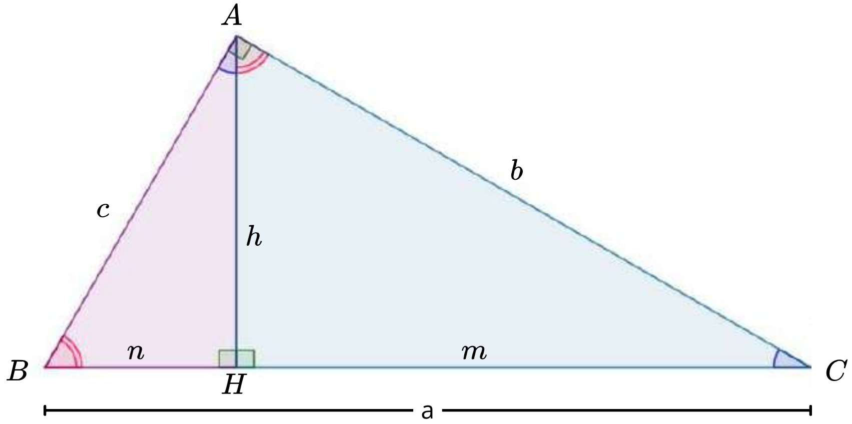
(IV) Observe que as linhas do seu caderno também formaram segmentos na reta *s*. Meça esses segmentos.

a) O tamanho dos segmentos formados na reta *r* são de mesma medida? Justifique.

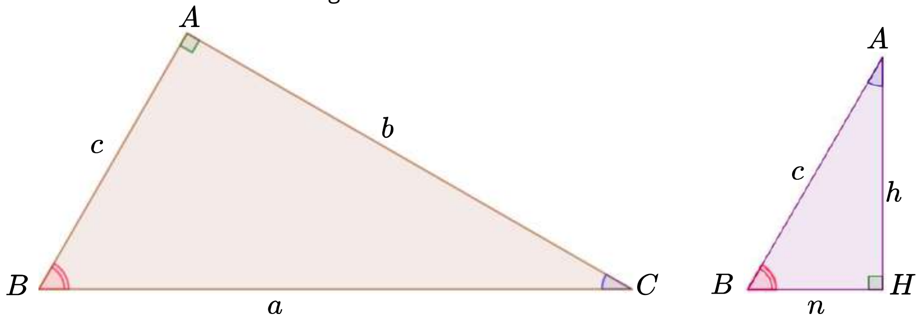
b) O tamanho dos segmentos formados na reta *s* são de mesma medida? Justifique.

RELAÇÕES MÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considere o triângulo retângulo ABC. Ao traçarmos a altura relativa à hipotenusa, o triângulo original é dividido em dois triângulos menores, ambos retângulos.



Inicialmente considere os triângulos ABC e HBA.



Note que ambos os triângulos apresentam um ângulo reto, caracterizando-os como triângulos retângulos, e compartilham ainda um ângulo em comum. Assim, pelo critério de semelhança AA (ângulo-ângulo), os triângulos ABC e HBA são semelhantes. Consequentemente, os lados correspondentes desses triângulos são proporcionais. Logo, podemos escrever as proporções:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} = \frac{b}{h}$$

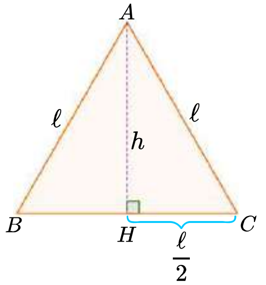
A partir dessas igualdades obtemos as seguintes relações:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}\text{, ou seja, } c^2 = a \cdot n \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{h}\text{, ou seja, } c \cdot b = a \cdot h$$

- **Relacionando as medidas da altura e do lado de um triângulo equilátero**

Considere o triângulo equilátero ABC, com lado medindo ℓ e altura, h.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo HCA, temos:



$$(AH)^2 + (HC)^2 = (AC)^2$$
$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$
$$h^2 + \frac{\ell^2}{4} = \ell^2$$
$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$
$$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$$
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

A fórmula $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ permite calcular a medida da altura do triângulo equilátero quando se conhece a medida do lado desse triângulo, e vice-versa.

Veja os exemplos a seguir.

a) Calcule a medida da altura de um triângulo equilátero de 18 cm de perímetro.

Solução: Se P=18 cm, então $\ell = 6$ cm.

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$
$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Logo, a medida da altura desse triângulo é $3\sqrt{3}$ cm.

b) Calcule a medida do lado de um triângulo equilátero cuja altura $6\sqrt{3}$.

Solução: Substituindo h por $6\sqrt{3}$ em

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$
$$6\sqrt{3} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$
$$12\sqrt{3} = \ell\sqrt{3}$$
$$\ell = 12$$

Logo, o lado desse triângulo mede 12 cm.

Referências

BARBOSA, M. L. Educação e Tecnologia no Século XXI: Reflexões para o Futuro do Trabalho. Editora Educação e Sociedade, 2022.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

CLUBE DE MATEMÁTICA OBMEP. Problema para ajudar na escola: dois terrenos da rua Arquimedes. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-para-ajudar-na-escola-dois-terrenos-da-rua-arquimedes/. Acesso em: 5 mar. 2025.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria da Educação. Matemática – 2ª Série – 3ª Semana. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/wp-content/uploads/2024/03/MAT-2a-Serie-3a-Semana.pdf. Acesso em: 06 mar. 2025.

MUNDO EDUCAÇÃO. Teorema da Bissetriz Interna. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/teorema-bissetriz-interna.htm. Acesso em: 05 mar. 2025.

NOVA ESCOLA. Plano de aula: Explorando ângulos na intersecção entre retas. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/explorando-angulos-na-interseccao-entre-retas/222. Acesso em: 04 mar. 2025.

NOVA ESCOLA. Plano de aula: Posição entre retas e seus ângulos. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/posicao-entre-retas-e-seus-angulos/150. Acesso em: 04 mar. 2025.

Orientações curriculares. Currículo ES, 2024. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares/. Acesso em: 10 fev. 2025.

QUIZUR. Relações métricas no triângulo retângulo. Disponível em: https://pt.quizur.com/trivia/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo-z9a3. Acesso em: 8 mar. 2025.

UNESP – IBILCE. O Teorema de Pitágoras. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/oteoremadepitagoras.pdf. Acesso em: 07 mar. 2025.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

QUINZENA
13
04/08 a 08/08

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL   GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

9º Ano | Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

HABILIDADE	EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR DO SAEB	DESCRITOR DO PAEBES
EF09MA13 Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.	• Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. • Demonstrar o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. • Resolver problemas que envolvam relações métricas do triângulo retângulo. • Resolver problemas que envolvam o teorema de Pitágoras. • Elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras.	**9G2.4** Resolver problemas que envolvam relações métricas do triângulo retângulo, incluindo o teorema de Pitágoras.	**D049_M** Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.

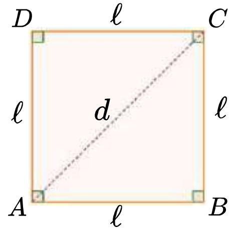
Existem outros triângulos pitagóricos que não seguem essa proporção. Por exemplo:

- o triângulo retângulo de medidas 5, 12 e 13;
- o triângulo retângulo de medidas 7, 24 e 25.

APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

- **Relacionando as medidas da diagonal e do lado de um quadrado**

Considere o quadrado ABCD, com lado medindo ℓ e diagonal, d. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABC, temos:



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$
$$d^2 = 2\ell^2$$
$$d = \sqrt{2\ell^2}$$
$$d = \ell\sqrt{2}$$

Portanto, com a expressão $d = \ell\sqrt{2}$ é possível calcular a diagonal de um quadrado quando se conhece a medida de seu lado, e vice-versa.

Vamos calcular a medida da diagonal de um quadrado cujo perímetro é 12 cm.
Se P = 12 cm, então $\ell = 3$ cm.

$$d = \ell\sqrt{2}$$
$$d = 3\sqrt{2}$$

Logo, a diagonal desse quadrado mede $3\sqrt{2}$.

Vamos calcular a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede $7\sqrt{2}$ cm.
Substituímos d por $7\sqrt{2}$ na fórmula:

$$7\sqrt{2} = \ell\sqrt{2}$$
$$\ell = 7$$

Professor(a), neste ano letivo, ainda não abordamos o conceito de números irracionais. Caso considere pertinente, sugerimos promover uma breve discussão com os estudantes sobre o significado da $\sqrt{2}$.
A ideia é instigá-los a pensar: ***Qual é o número que, ao ser elevado ao quadrado, resulta em 2?***
Esse investigação pode ser uma boa oportunidade para que os estudantes tenham um primeiro contato com a noção de número irracional.

A relação entre os quadrados das medidas dos lados desse triângulo retângulo é válida para todo triângulo retângulo e é conhecida como teorema de Pitágoras.

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Para o triângulo retângulo ABC, de hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**, temos:

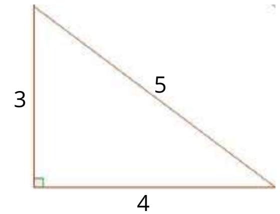
$$a^2 = b^2 + c^2$$

TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS

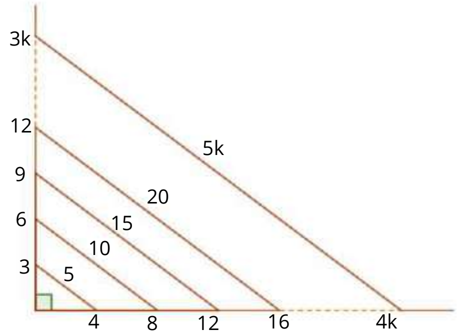
Triângulos retângulos cujas medidas dos lados são expressas por números inteiros são chamados de triângulos pitagóricos.

Entre eles, o mais famoso é o triângulo cujos lados medem os seguintes números inteiros e consecutivos: 3, 4 e 5.

Pelo caso LLL de semelhança, qualquer triângulo retângulo cujos lados sejam proporcionais aos números 3, 4 e 5 é um triângulo pitagórico.



Em outras palavras, os triângulos cujas medidas são dadas pelos ternos pitagóricos (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20), ... , (3k, 4k, 5k), sendo k um número inteiro positivo, são triângulos pitagóricos.



Contextualização


Design: Oranat Taesuwan de Getty Imagens / Fonte: Canva

Quando um trabalhador de construção civil vai erguer uma parede numa obra, ele se preocupa fundamentalmente com duas variáveis: o nível e o prumo da parede.

O nível que o trabalhador procura é aquele no qual o alinhamento horizontal da parede é paralelo ao piso sobre o qual ela será erguida.

O nível que o trabalhador procura é aquele no qual o alinhamento horizontal da parede é paralelo ao piso sobre o qual ela será erguida. Para isso, ele utiliza um aparelho específico chamado simplesmente de “nível”. Já o prumo, procura garantir o alinhamento vertical da parede, ou seja, formar um ângulo de 90º com o nível horizontal do piso.


Mariana Berdoldi

Como você pode ver, o ângulo de 90º é uma referência para as formas geométricas obtidas, por exemplo, na construção civil. Além disso, está presente em estruturas metálicas e de madeira, máquinas de todo tipo e nos produtos industrializados com os quais convivemos em nosso dia a dia. Por essa razão, o estudo dos triângulos é fundamental para o desenvolvimento de projetos, de cálculos de construção e para a representação de formas naturais.

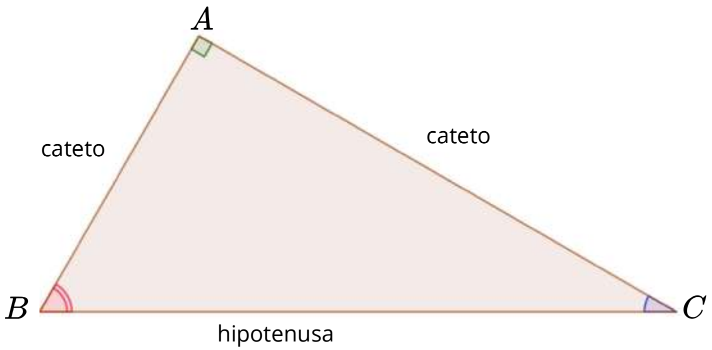
Já sabemos que o estudos dos triângulos em geral consiste no estabelecimento das relações existentes entre os ângulos e seus lados. Já vimos também como podemos relacionar dois triângulos, por semelhança ou por congruência, estabelecendo relações entre seus lados.

Como podemos estabelecer essa relações para o triângulo retângulo? Vamos estudar neste material especificamente o triângulo retângulo, entendê-lo melhor e aplicar suas propriedades em relação a outras figuras planas.

Conceitos e Conteúdos

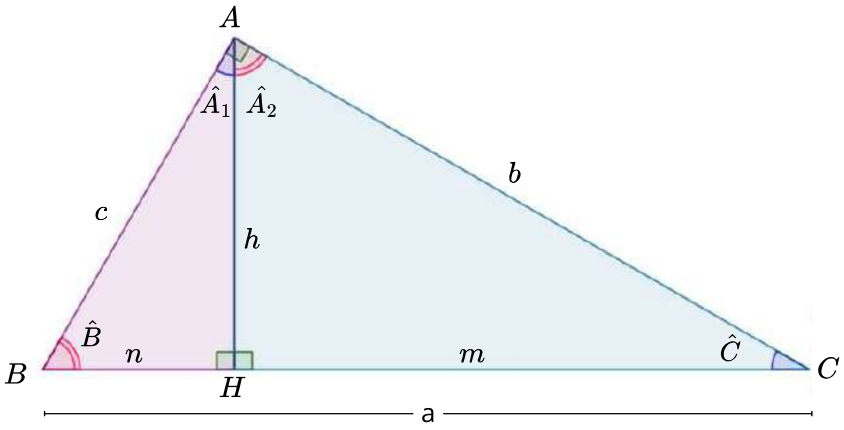
ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

O triângulo ABC a seguir é um triângulo retângulo, pois tem um ângulo reto (ângulo Â).



Chamamos de catetos os lados perpendiculares entre si que formam o ângulo reto em um triângulo retângulo. Já o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa.

Observe o triângulo retângulo ABC da figura abaixo.



Nesse triângulo, destacamos:

- a, que é a medida da hipotenusa $\overline{BC}$;
- c, que é a medida da cateto $\overline{AB}$; oposto ao ângulo $\hat{C}$;
- b, que é a medida da cateto $\overline{AC}$; oposto ao ângulo $\hat{B}$;
- h, que é a medida da altura $\overline{AH}$; relativa à hipotenusa;
- n, que é a medida da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$;
- m, que é a medida da projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$.

Em relação aos ângulos, temos:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\hat{A}_1\right)+m\left(\hat{B}\right)&=90^\circ \\ m\left(\hat{B}\right)+m\left(\hat{C}\right)&=90^\circ \end{aligned}\right\} m\left(\hat{A}_1\right)+m\left(\hat{B}\right)=m\left(\hat{B}\right)+m\left(\hat{C}\right)$$, então $m\left(\hat{A}_1\right)=m\left(\hat{C}\right)$

$$\left.\begin{aligned} m\left(\hat{A}_2\right)+m\left(\hat{C}\right)&=90^\circ \\ m\left(\hat{B}\right)+m\left(\hat{C}\right)&=90^\circ \end{aligned}\right\} m\left(\hat{A}_2\right)+m\left(\hat{C}\right)=m\left(\hat{B}\right)+m\left(\hat{C}\right)$$, então $m\left(\hat{A}_2\right)=m\left(\hat{B}\right)$

TEOREMA DE PITÁGORAS

Considerando como unidade de medida a área de cada quadradinho da figura abaixo, observa-se que a área do quadrado maior corresponde à soma das áreas dos quadrados menores, ou seja:

$$25 = 9 + 16$$

Como 25 = 5², 9² = 3² e 16 = 4², podemos escrever essa igualdade da seguinte maneira:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

Repare que 5, 3 e 4 são as medidas dos lados dos quadrados da figura e, consequentemente, as medidas dos respectivos lados do triângulo retângulo.

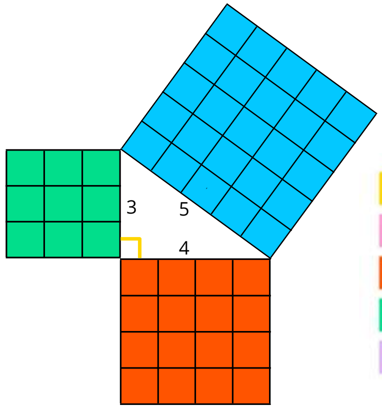


Imagem produzida no Canva