CONEXÕES MATEMÁTICAS

QUINZENA 15
25/08 a 29/08

SEDU - 2025

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

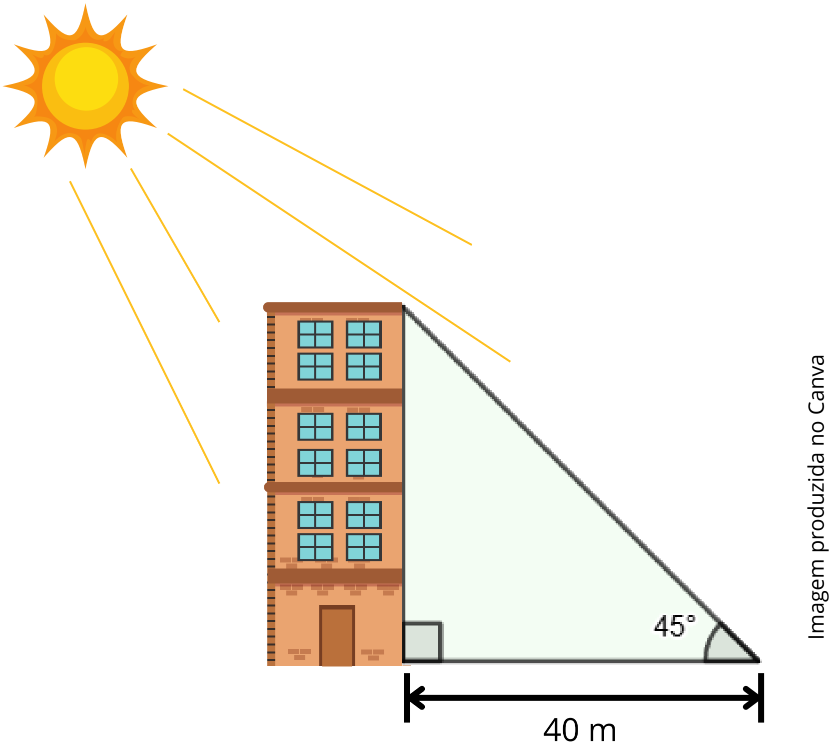
9º Ano | Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES)
EF09MA25/ES Reconhecer as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) e aplicá-las nos cálculos de distância inacessíveis e outras situações problemas utilizando instrumentos de medidas de comprimento, transferidores, compasso, teodolitos e softwares.	• Resolver problemas e calcular distâncias inacessíveis utilizando razões trigonométricas.	**D051_M** Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

Contextualização



A trigonometria é um ramo da Matemática que estuda as relações entre os lados e os ângulos de triângulos, especialmente os triângulos retângulos. Dentro desse campo, as razões trigonométricas são ferramentas essenciais que nos permitem conectar medidas angulares com medidas de comprimento, resolvendo problemas práticos envolvendo alturas, distâncias e inclinações.

Essas razões são fundamentais em diversas áreas, como:

- Engenharia e Arquitetura (cálculo de alturas de prédios, rampas e estruturas).
- Navegação e Astronomia (determinação de rotas e posicionamento de corpos celestes).
- Física (análise de vetores, movimento de projéteis e ondas).

Imagine medir a altura de um prédio sem subir nele. Usando um ângulo de elevação e a distância até a base do prédio, a tangente do ângulo nos dá a altura!

Com essas ferramentas, problemas aparentemente complexos tornam-se solúveis com cálculos simples e precisos.

Neste material, vamos dar continuidade ao estudo das razões trigonométricas e suas aplicações.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

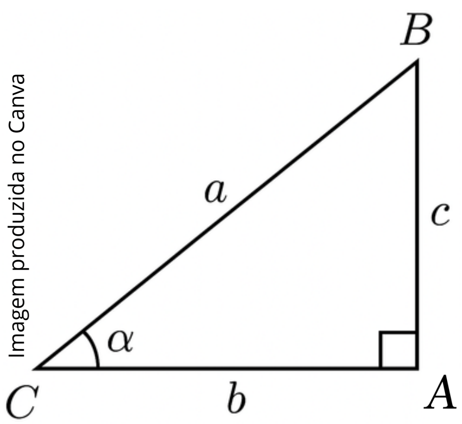
SENO, COSSENO E TANGENTE

Para relembrar, em um triângulo retângulo, as relações entre os lados e os ângulos agudos são descritas pelas chamadas razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Elas permitem resolver diversos problemas envolvendo medidas de lados e ângulos em triângulos, sendo amplamente utilizadas não só na Matemática, mas também na Física, Engenharia e outras ciências aplicadas.

Em um triângulo retângulo, definem-se as razões trigonométricas associadas a um de seus ângulos agudos da seguinte maneira:

- **Seno** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.
- **Cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.
- **Tangente** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Para o triângulo retângulo ABC, temos:



$$sen\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

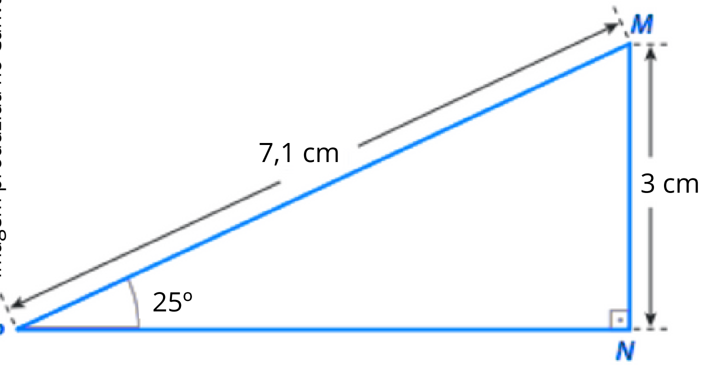
$$cos\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$tg\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

Acompanhe um exemplo.

a) No triângulo MNP, vamos calcular o seno do ângulo $\hat{P}$, que mede 25°.

Imagem produzida no Canva



$$sen\ 25^o = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ a\ \hat{P}}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$sen\ 25^o = \frac{3}{7,1}$$

$$sen\ 25° \cong\ 0,42$$

b) No triângulo RST, vamos calcular o cosseno do ângulo interno $\hat{R}$, que mede 42°.

$$cos\ 42^o = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \hat{R}}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$cos\ 42^o = \frac{3,8}{5,1}$$

$$cos\ 42° \cong\ 0,74$$

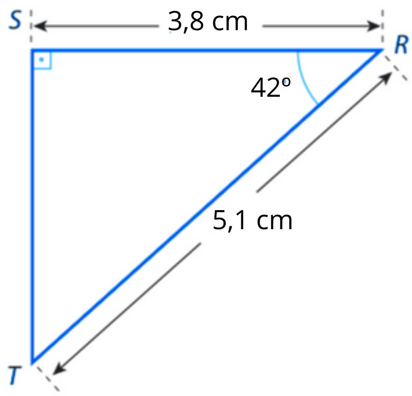


Imagem produzida no Canva

ÂNGULOS NOTÁVEIS

As razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60° aparecem frequentemente nos problemas. Por isso, organizamos a tabela a seguir com os valores delas.

	30°	**45°**	**60°**
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Uma escada está apoiada no topo de um muro, formando com este um ângulo de 30°. Se o muro tem 2,5 m de altura, qual é o comprimento dessa escada?

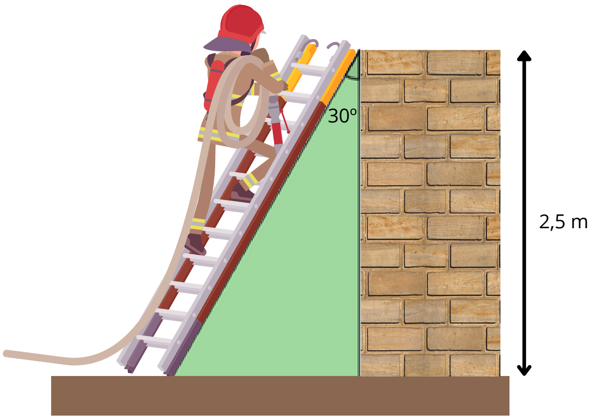


Imagem produzida no canva

SOLUÇÃO

- A altura do muro (2,5 m) é o cateto adjacente ao ângulo de 30° (pois o ângulo é formado entre a escada e o muro).
- O comprimento da escada é a hipotenusa (x).
- Use a relação trigonométrica cosseno.
- $cos(30^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

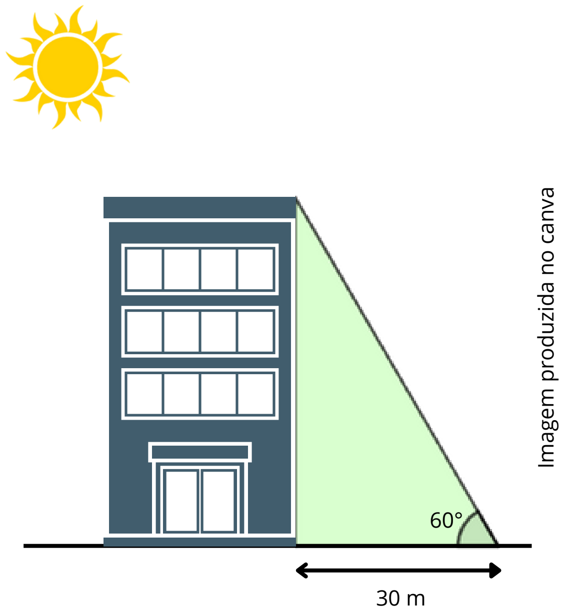
$$cos(30^\circ) = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{2,5}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2,5}{x} \Rightarrow x = \frac{2,5 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Racionalize o denominador: $\dfrac{5}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\ m$

Portanto, o comprimento da escada é $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\ m.$

EXERCÍCIO 2

Quando os raios solares formam um ângulo de 60° com o solo, um edifício projeta uma sombra de 30 m. Qual é a altura desse edifício?



SOLUÇÃO

- A sombra do edifício (30 m) é o cateto adjacente ao ângulo de 60°.
- A altura do edifício (*h*) é o cateto oposto ao ângulo de 60°.
- Use a relação trigonométrica tangente:
- $tg(60^\circ) = \sqrt{3}$

$$tg(60^\circ) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{h}{30} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 30\sqrt{3}\ m$$

Logo, a altura do edifício é $h = 30\sqrt{3}\ m$.

Material Extra

Saiba mais apontando o celular para o QR CODE abaixo ou clique no botão.

GEOGEBRA

Razões Trigonométricas

- Esta aplicação pretende apresentar as razões trigonométricas no triângulo retângulo. É possível variar o valor do ângulo e do cateto utilizando os seletores e, a partir disso, visualizar os valores do seno, do cosseno e da tangente.

Atividades

ATIVIDADE 1

João está prestando um concurso público e, durante um dos testes físicos, ele precisa subir uma escada inclinada a 50° com relação ao solo horizontal. Ele quer saber qual é a altura da escada quando terminar de subí-la. Considerando que a escada possui um comprimento total de 10 metros, calcule a altura alcançada por ele (em metros) ao atingir o topo.

Utilize sen 50° = 0,77, cos 50° = 0,64 ou tg 50° = 1,19.

A) 3,2
B) 6,4
C) 7,7
D) 8,7

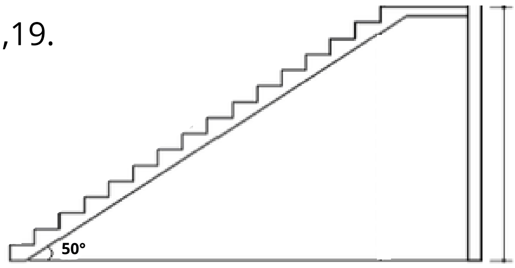


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 2

Uma pipa está presa a uma linha esticada que forma um ângulo de 45° com o solo. Sabendo que o comprimento da linha (do solo até a pipa) é de 50 metros, determine a que altura *h* do solo a pipa se encontra. Utilize $\sqrt{2} \approx 1,4142$.

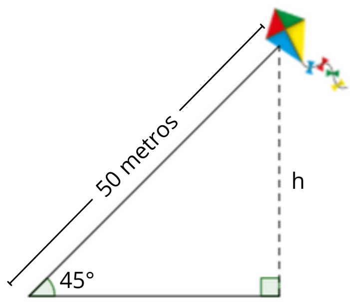


Imagem produzida no Geogebraa

ATIVIDADE 3

(Unama-PA) A figura abaixo representa um barco atravessando um rio, partindo de A em direção ao ponto B. A forte correnteza arrasta o barco em direção ao ponto C, segundo um ângulo de 60°. Sendo a largura do rio de 120 m, qual é a distância percorrida pelo barco até o ponto C?

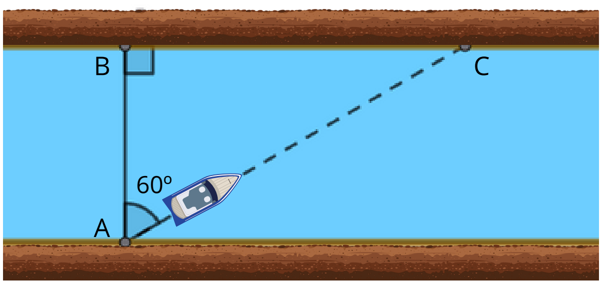


Imagem produzida com elementos do Canva e Geogebra

ATIVIDADE 4

Um prédio projeta uma sombra de 40 m quando os raios solares formam um ângulo de 45° com o solo. A altura desse prédio é:

A) 28 m
B) 40 m
C) 56 m
D) 80 m

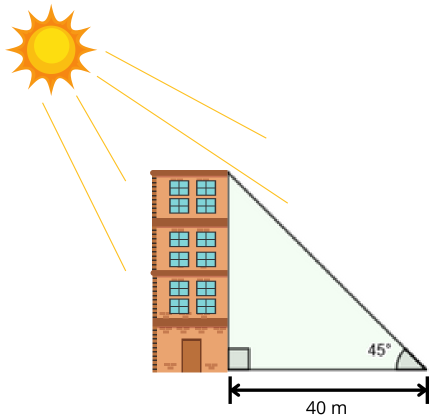
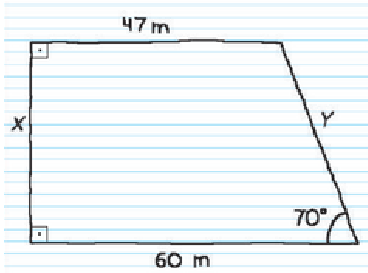


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 5

Gumercindo possui um terreno em forma de trapézio, que pretende cercar com tela de arame. A partir das medidas anotadas no desenho, calcule o valor de x e y e descubra o perímetro do terreno.
Considere sen 70º = 0,94, cos 70º = 0,34 e tan 70º = 2,75.



Ilustra Cartoon

ATIVIDADE 6

Para consertar uma luminária, um eletricista encostou uma escada de 6 metros de comprimento em um muro vertical. A base da escada foi colocada a 3 metros de distância do muro, em um terreno plano. Considerando que a escada está totalmente esticada e encostada no muro, qual a medida do ângulo que a escada forma com o chão?

A) 75°
B) 60°
C) 45°
D) 30°

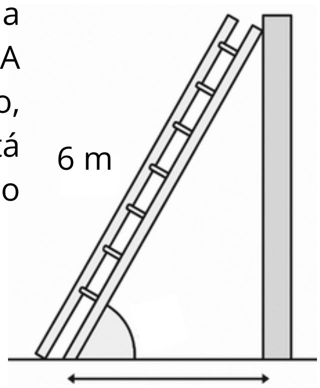
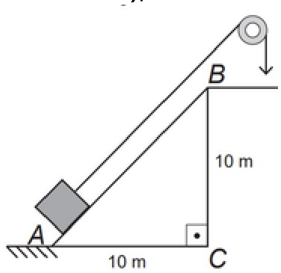


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 7

(Encceja-2023) Um contêiner, içado por um cabo preso a uma roldana, foi deslocado de um ponto A (piso) até um ponto B (plataforma de uma embarcação) por uma rampa inclinada. O ponto B está situado a 10 metros acima do nível do piso. A extremidade A está afastada 10 metros do ponto C (base da plataforma), conforme ilustra a figura.
A inclinação da rampa em relação ao piso é de:

A) 30º
B) 45º
C) 60º
D) 90º



Fonte:https://www.teachy.com.br/

ATIVIDADE 8

Um engenheiro florestal deseja medir a altura de uma árvore, mas não pode alcançá-la diretamente. Para isso, ele se posiciona com um teodolito no ponto A, a 1,6 metros do chão e a uma distância de 30 metros da base da árvore. Com o instrumento, ele mede o ângulo de elevação α até o topo da árvore C, obtendo um valor de 40º.

Fonte: https://pingosonline.blogs.sapo.pt/distancias-inacessiveis-escola-205676

Sabendo que o triângulo △ABC é retângulo em B, determine a altura total da árvore. Utilize sen 40º = 0,64, cos 40º = 0,76 ou tan 40º = 0,84

A) 27,8 m
B) 26,8 m
C) 25,2 m
D) 24,2 m

ATIVIDADE 9

Em um porto, será construído um guindaste para o descarregamento de cargas. O engenheiro responsável pela obra elaborou um esboço do projeto, indicando algumas medidas. Observe esse esboço na figura abaixo. Nessa figura, os segmentos PQ e QR representam uma parte da estrutura desse guindaste. Além disso, uma parte do cabo de aço dessa estrutura está representada pelo segmento PR . A medida aproximada do comprimento dessa parte será inserida nesse esboço pelo engenheiro.

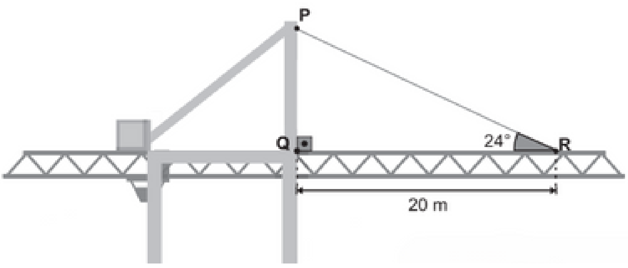


Imagem gerada por IA

Considere:
sen 24° = 0,40
cos 24° = 0,91
tan 24° = 0,44

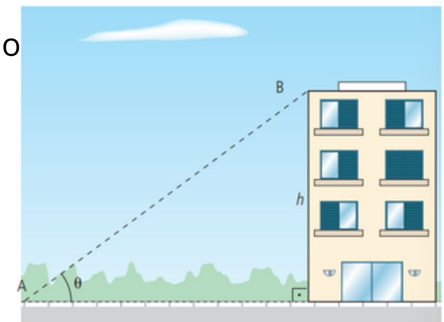
A medida do segmento PR que será inserida, em metro, é igual a

A) 20,00 m.
B) 20,91 m.
C) 21,98 m.
D) 45,45 m.

ATIVIDADE 10

Observe a figura ao lado e determine a altura h do edifício, sabendo que AB mede 25 m e sen θ = 0,6.

A) h = 15,0 m
B) h = 20,0 m
C) h = 12,5 m
D) h = 18,5 m



Ilustra Cartoon

Referências

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

CLUBES OBMEP. Tales de Mileto. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_tales-de-mileto/. Acesso em: 4 abr. 2025.

MATEMÁTICA BÁSICA. Exercícios de Bissetriz. Disponível em: https://matematicabasica.net/exercicios-de-bissetriz/. Acesso em: 9 abr. 2025.

Mori, Iracema. Matemática: ideias e desafios, 9º ano / Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. - 18. ed. - São Paulo : Saraiva, 2015.

NOVA ESCOLA. Calculando o inacessível por meio da semelhança de triângulos. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/calculando-o-inacessivel-por-meio-da-semelhanca-de-triangulos/1149#section-materiaisDeApoio-3. Acesso em: 4 abr. 2025.

Orientações curriculares. Currículo ES, 2024. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares/. Acesso em: 10 fev. 2025.

TODA MATÉRIA. Pontos notáveis de um triângulo. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/pontos-notaveis-de-um-triangulo/. Acesso em: 9 abr. 2025.

TUDOSALADEAULA. Atividade sobre bissetriz e mediatriz no triângulo – 8º e 9º ano. 2024. Disponível em: https://www.tudosaladeaula.com/2024/09/atividade-sobre-bissetriz-e-mediatriz-no-triangulo-8o-e-9o-ano/. Acesso em: 9 abr. 2025.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

9º Ano | Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

CEVIANAS

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO SAEB
EF08MA17/ES Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas, utilizando ou não desenhos geométricos.	• Resolver problemas que envolvam cevianas (altura, bissetriz, mediana, mediatriz) de polígonos.	**9G2.3** Resolver problemas que envolvam relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, ângulos internos ou externos de polígonos ou cevianas (altura, bissetriz, mediana, mediatriz) de polígonos.

Contextualização

Design: Getillustrations / Fonte: Canva

Design: Veii Rehanne Martinez de Sketchify / Fonte: Canva

Ao criar composições harmônicas e visualmente equilibradas, ilustradores frequentemente recorrem aos conceitos geométricos para planejar seus desenhos. A bissetriz, por exemplo, é usada para dividir ângulos com precisão, o que é essencial ao desenhar figuras humanas ou personagens em posições simétricas, garantindo que os lados fiquem proporcionalmente corretos. Esse recurso também é útil na criação de ambientes com perspectiva, onde a divisão equilibrada dos espaços é fundamental.

A mediana também desempenha um papel importante no esboço de figuras. Ao conectar um vértice ao ponto médio do lado oposto, o ilustrador consegue localizar centros de massa em personagens ou objetos, ajudando na distribuição do peso visual e na definição de posturas mais realistas. Esse conceito é útil, por exemplo, na construção de corpos em movimento, como um personagem correndo ou pulando, onde o equilíbrio é essencial para transmitir naturalidade.

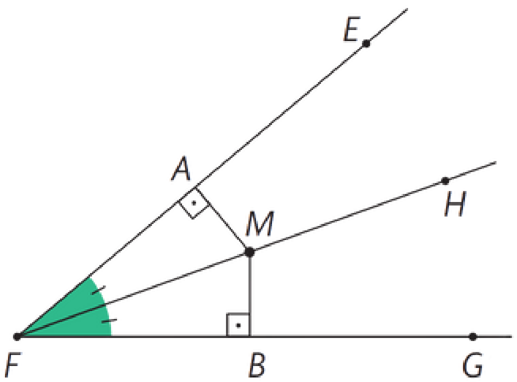
Já a mediatriz e a altura são aplicadas na estruturação da cena e dos elementos do desenho. A mediatriz ajuda a encontrar pontos equidistantes, sendo útil para centralizar objetos ou criar efeitos de simetria. A altura, por sua vez, auxilia na construção de ângulos retos, importante em desenhos técnicos, arquitetônicos ou de cenários que exigem precisão, como prédios ou móveis. Esses conceitos matemáticos contribuem para que o trabalho artístico mantenha coerência e proporção, mesmo em criações mais livres.

Nesta semana, iremos estudar como as bissetrizes, medianas, mediatrizes e alturas são definidas nos triângulos e como identificá-las nas figuras. Além disso, vamos entender suas propriedades e aprender a aplicá-las na resolução de problemas geométricos. Ao dominar esses conceitos, você poderá observar como a Matemática está presente até mesmo na arte, no design e na construção de imagens que vemos todos os dias.

Conceitos e Conteúdos

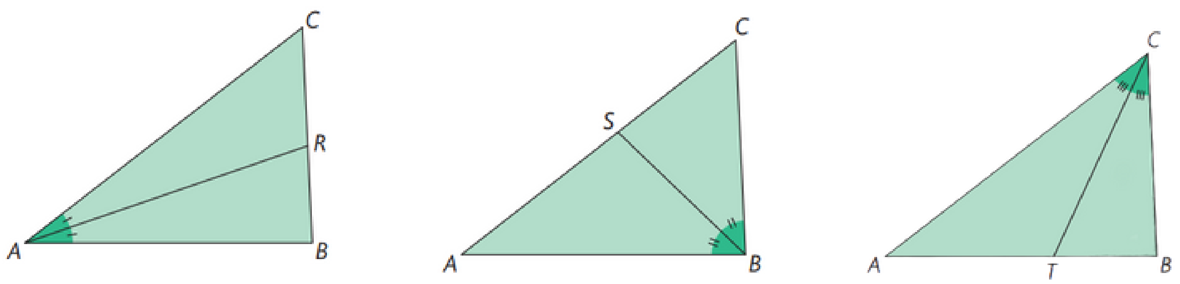
BISSETRIZ

A semirreta $\overrightarrow{FH}$, com origem no vértice do ângulo $E\hat{F}G$, divide esse ângulo em duas partes congruentes, sendo, portanto, a sua bissetriz.



Fonte: TEIXEIRA, 2022.

No triângulo, chama-se **bissetriz** o segmento de reta que parte de um de seus vértices, dividindo o ângulo interno correspondente em dois ângulos de mesma medida, e termina no lado oposto a esse vértice. Analise as bissetrizes do triângulo ABC .



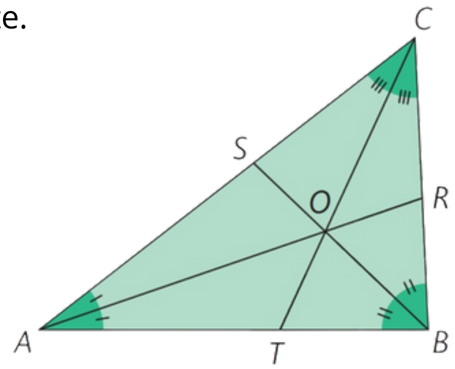
Fonte: TEIXEIRA, 2022.

$\overline{AR}$: bissetriz relativa ao ângulo interno $B\hat{A}C$.

$\overline{BS}$: bissetriz relativa ao ângulo interno $A\hat{B}C$.

$\overline{CT}$: bissetriz relativa ao ângulo interno $A\hat{C}B$.

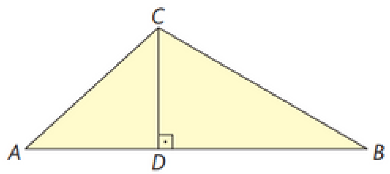
No triângulo ABC representado a seguir, foram desenhadas as bissetrizes dos seus três ângulos internos. O ponto onde essas três bissetrizes se encontram é conhecido como o **incentro** do triângulo, um dos seus pontos notáveis. O incentro de um triângulo é um ponto com várias utilidades na geometria e em aplicações práticas: é o centro da circunferência que pode ser inscrita no triângulo, tangente a todos os seus lados; o incentro está à mesma distância de todos os lados do triângulo. Ele pode ser usado em problemas de construção, otimização e outras áreas onde a geometria é importante.



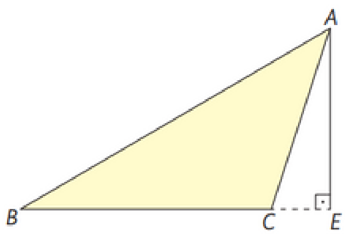
Fonte: TEIXEIRA, 2022.

ALTURA

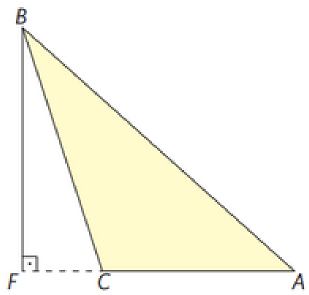
Chama-se **altura** de um triângulo o segmento de reta que parte de um de seus vértices e forma um ângulo de 90° com o lado oposto ou com o prolongamento desse lado, encontrando-o em um ponto. Analise as alturas do triângulo ABC.



$\overline{CD}$: altura relativa ao vértice C ou ao lado $\overline{AB}$.



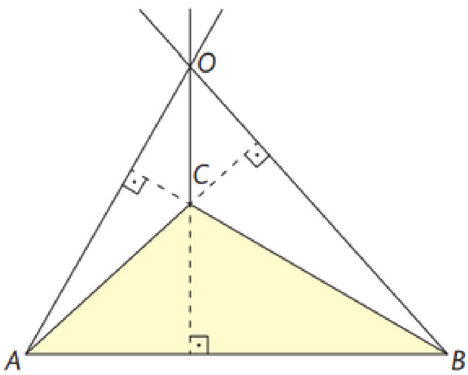
$\overline{AE}$: altura relativa ao vértice A ou ao lado $\overline{BC}$.



$\overline{BF}$: altura relativa ao vértice B ou ao lado $\overline{AC}$

Fonte: TEIXEIRA, 2022.

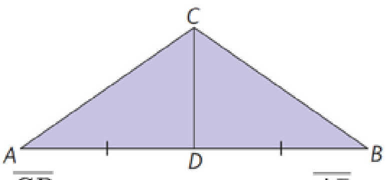
No triângulo ABC representado a seguir, foram desenhadas as três alturas correspondentes aos seus lados. Essas alturas, ou seus prolongamentos, se encontram em um único ponto, conhecido como **ortocentro**, um dos pontos notáveis do triângulo.



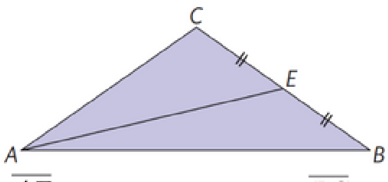
Fonte: TEIXEIRA, 2022.

MEDIANA

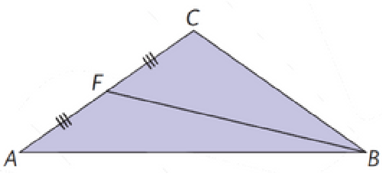
A **mediana** de um triângulo é o segmento que liga um dos vértices ao ponto médio do lado oposto. Esse ponto médio divide o lado em duas partes iguais. Analise as medianas do triângulo ABC.



$\overline{CD}$: mediana relativa ao lado $\overline{AB}$.



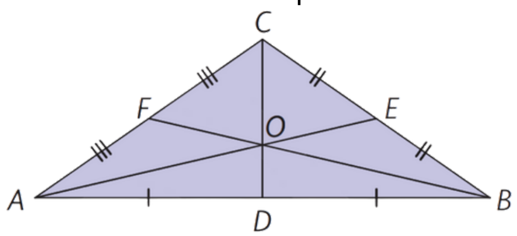
$\overline{AE}$:mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.



$\overline{BF}$:mediana relativa ao lado $\overline{AC}$.

Fonte: TEIXEIRA, 2022.

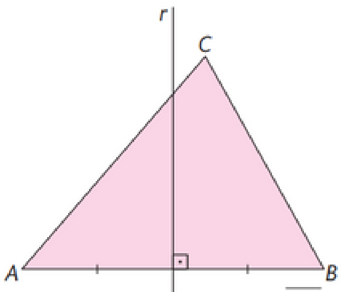
No triângulo ABC representado a seguir, estão desenhadas as três medianas correspondentes aos seus lados. Essas medianas se encontram em um único ponto, conhecido como **baricentro**, um dos pontos notáveis do triângulo. O baricentro de um triângulo, que é o ponto de encontro das três medianas, tem várias utilidades práticas. Em Engenharia, é usado para determinar o ponto de equilíbrio de estruturas, enquanto na Física serve para calcular o centro de massa de objetos, essencial para a sua estabilidade. Além disso, na computação gráfica, o baricentro é usado para renderizar modelos 3D de forma equilibrada.



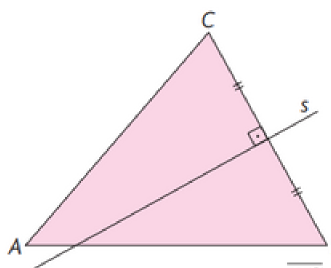
Fonte: TEIXEIRA, 2022.

MEDIATRIZ

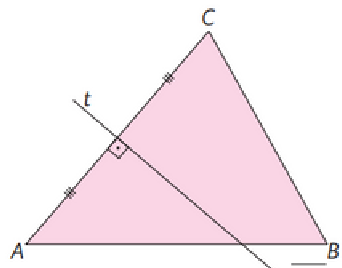
A **mediatriz** de um triângulo é uma reta que passa pelo ponto médio de um de seus lados e é perpendicular a ele. Esse ponto médio divide o lado em duas partes de mesmo comprimento. Analise as mediatrizes do triângulo ABC.



r: mediatriz relativa ao lado $\overline{AB}$.



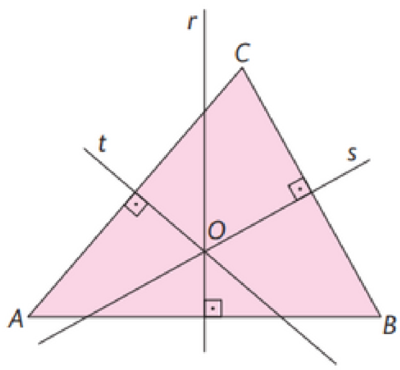
s: mediatriz relativa ao lado $\overline{BC}$.



t: mediatriz relativa ao lado $\overline{AC}$.

Fonte: TEIXEIRA, 2022

No triângulo ABC representado ao lado, construíram-se as três mediatrizes correspondentes aos seus lados. Essas retas se intersectam em um ponto comum, conhecido como **circuncentro**, um dos pontos notáveis do triângulo. A principal utilidade do circuncentro é a sua propriedade de estar equidistante dos três vértices, o que permite a construção da circunferência circunscrita.

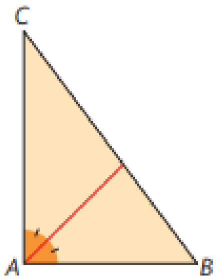


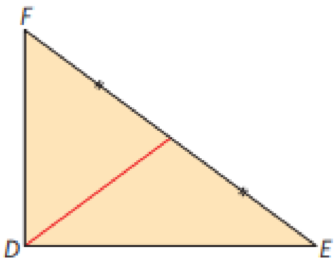
Fonte: TEIXEIRA, 2022

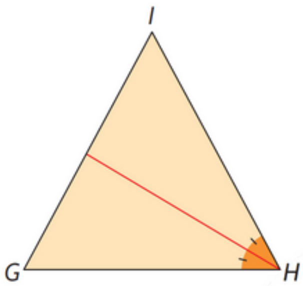
Exercícios Resolvidos

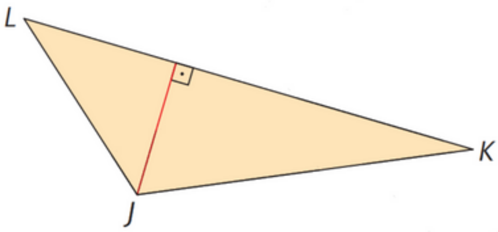
EXERCÍCIO 1

De acordo com as indicações em cada triângulo, classifique o segmento de reta vermelho em mediana, bissetriz ou altura.

A


B


C


D


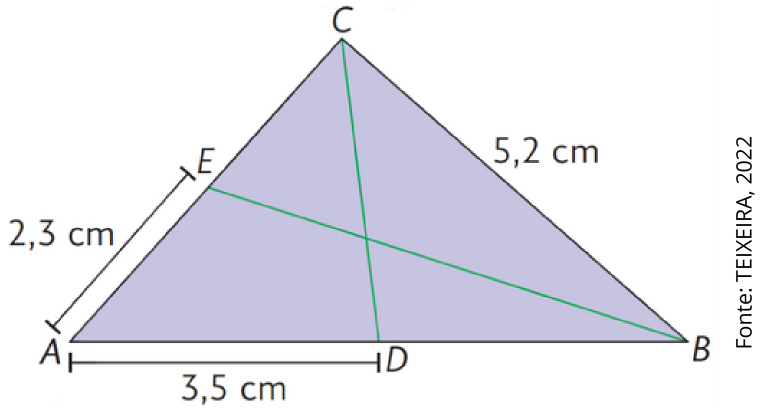
Fonte: TEIXEIRA, 2022.

SOLUÇÃO

A. Bissetriz;
B. Mediana;
C. Bissetriz;
D. Altura.

EXERCÍCIO 2

No triângulo a seguir, os segmentos de reta em verde são medianas. Calcule a medida do perímetro desse triângulo.



SOLUÇÃO

Dado:
Os segmentos $\overline{AE} = 2,3\ cm, \overline{AD} = 3,5\ cm$ representam as metades dos lados do triângulo, pois os pontos E e D são pontos médios. $\overline{CB} = 5,2\ cm.$

Determinando os lados do triângulo:

$$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AE} = 2 \cdot 2,3 = 4,6\ cm$$
$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AD} = 2 \cdot 3,5 = 7,0\ cm$$
$$\overline{BC} = 5,2\ cm$$

Somando os lados para obter o perímetro:

Perímetro $= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$
Perímetro $= 7,0 + 5,2 + 4,6 = 16,8\ cm$

Resposta: O perímetro do triângulo é 16,8 cm.

EXERCÍCIO 3

Determine, dentre as palavras a seguir, quais preenchem cada lacuna corretamente.

circuncentro **alturas** **mediatrizes**

ortocentro **baricentro** **medianas**

a) O centro da circunferência circunscrita em um triângulo é obtido pelo cruzamento de suas _______________.

b) _______________ é o centro de equilíbrio de um triângulo.

c) Nos triângulos obtusângulos, o ponto de encontro das _______________ é sempre externo ao triângulo.

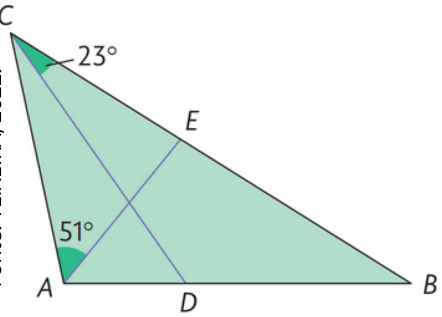
d) O ponto comum das mediatrizes de um triângulo é chamado _______________.

e) ______________ é o nome dado ao ponto de encontro das alturas de um triângulo, e o baricentro de um triângulo é obtido pelo cruzamento de suas ______________.

SOLUÇÃO

a) mediatrizes;
b) baricentro;
c) alturas;
d) circuncentro;
e) ortocentro; medianas.

EXERCÍCIO 4



Fonte: TEIXEIRA, 2022.

Sabendo que os segmentos de reta $\overline{AE}$ e $\overline{CD}$ são bissetrizes do triângulo, determine a medida de cada ângulo interno do triângulo ABC.

SOLUÇÃO

Sabemos que $C\hat{A}E = 51°$, e como AE é bissetriz, o ângulo completo $C\hat{A}B$ é o dobro:

$$C\hat{A}B = 2 \cdot 51^\circ = 102^\circ$$

Da mesma forma, como CD é bissetriz e $D\hat{C}E$ = 23°, o ângulo completo $A\hat{C}B$ é:

$$A\hat{C}B = 2 \cdot 23^\circ = 46^\circ$$

Determinando o terceiro ângulo do triângulo:

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então:

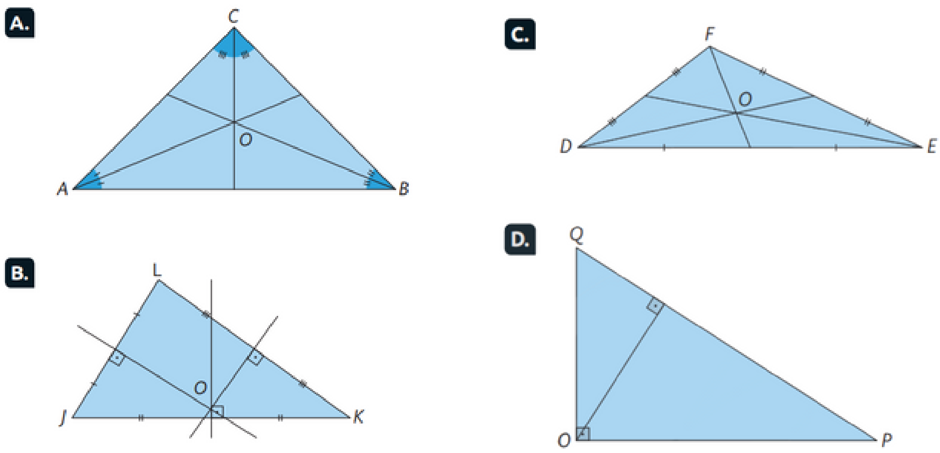
$$A\hat{B}C = 180^\circ - C\hat{A}B - A\hat{C}B$$
$$A\hat{B}C = 180^\circ - 102^\circ - 46^\circ = 32^\circ$$

Portanto, os ângulos internos do triângulo ABC são:

$$C\hat{A}B = 102^\circ, \quad A\hat{C}B = 46^\circ, \quad A\hat{B}C = 32^\circ.$$

EXERCÍCIO 5

O que as retas ou os segmentos de reta traçados em cada triângulo representam? E o que o ponto O representa?



Fonte: TEIXEIRA, 2022.

SOLUÇÃO

A. Segmentos de reta: bissetrizes; Ponto O: incentro;
B. Retas: mediatrizes; Ponto O: circuncentro;
C. Segmentos de reta: medianas; Ponto O: baricentro;
D. Segmento de reta: altura; Ponto O: ortocentro.

Material Extra

Saiba mais apontando o celular para o QR CODE abaixo ou clique no botão.

GEOGEBRA

Congruência de triângulos e aplicações

- Essa é a indicação de um módulo do Portal da Matemática da OBMEP que trata de elementos básicos da geometria plana. Destacamos as videoaulas que tratam da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo e da construção desses segmentos com régua e compasso.

Atividades

ATIVIDADE 1

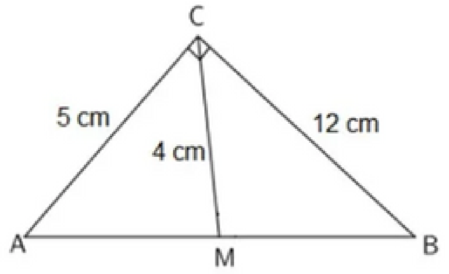
Um arquiteto está planejando a construção de um parque em formato triangular e deseja instalar uma fonte em formato de círculo, de forma que o centro dela fique igualmente distante dos três lados do parque. Para determinar a localização exata do centro dessa fonte circular, qual construção geométrica ele deve utilizar na planta baixa?

A) O arquiteto deve construir as alturas dos ângulos internos do triângulo e posicionar a fonte no ponto de interseção das alturas.
B) O arquiteto deve construir as medianas dos lados do triângulo e posicionar a fonte no ponto de interseção dessas medianas.
C) O arquiteto deve construir as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo e posicionar a fonte no ponto de interseção dessas bissetrizes.
D) O arquiteto deve construir as mediatrizes dos lados do triângulo e posicionar a fonte no ponto de interseção das mediatrizes.

ATIVIDADE 2

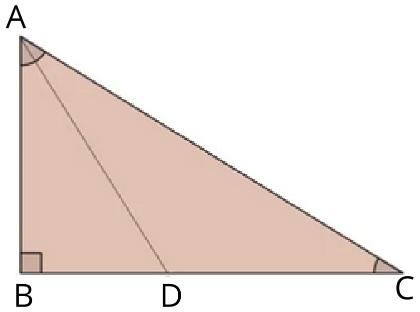
Determine o perímetro do triângulo ACM, sabendo que o segmento $\overline{AB}$ mede 13 cm e que $\overline{CM}$ é mediana do lado AB.

A) 10,5 cm
B) 15,5 cm
C) 23,5 cm.
D) 30,5 cm.



ATIVIDADE 3

Observe o triângulo.



Fonte: tudosaladeaula.com

Considerando que o ângulo $A\hat{C}B$ mede 30º e que o segmento $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, então, o ângulo $B\hat{A}D$ mede:

A) 30º

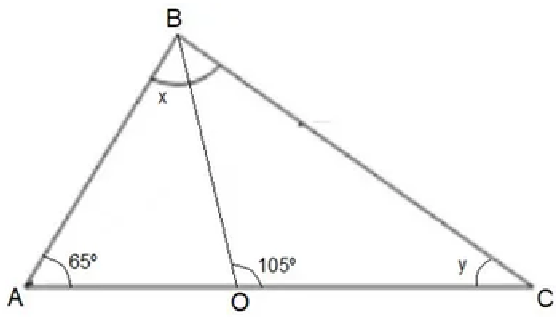
B) 45º

C) 60º

D) 90º

ATIVIDADE 4

No triângulo ABC foi traçada a bissetriz $\overline{BO}$ dividindo o ângulo $A\hat{B}C$.



Fonte: tudosaladeaula.com

Qual a soma dos ângulos indicados por x e y?

A) 75º

B) 95º

C) 105º

D) 170º

ATIVIDADE 5

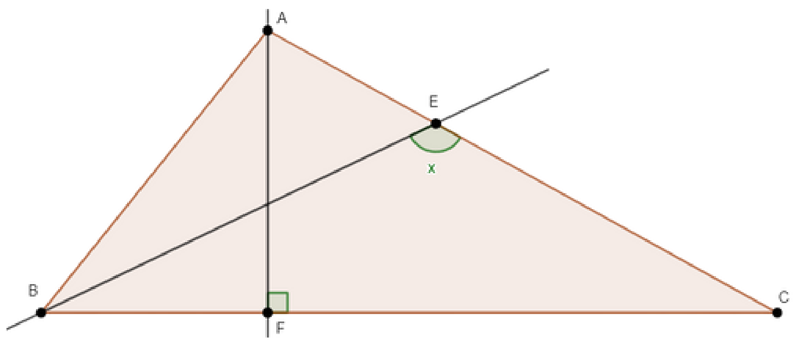
No triângulo ABC da figura, temos $B\hat{A}F = 30^\circ$ e $A\hat{C}B = 40^\circ$. Se $\overline{AF}$ é altura e $\overline{BE}$ é bissetriz do ângulo em $A\hat{B}C$, determine a medida do ângulo x.

A) 80º

B) 90º

C) 110º

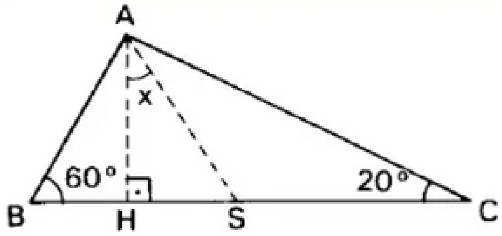
D) 150º



ATIVIDADE 6

No triângulo ABC da figura, o segmento $\overline{AH}$ é altura relativa ao lado $\overline{BC}$, e o segmento $\overline{AS}$ é a bissetriz do ângulo BÂC. Determine o valor do ângulo x = HÂS.

A) 20º
B) 25º
C) 30º
D) 35º

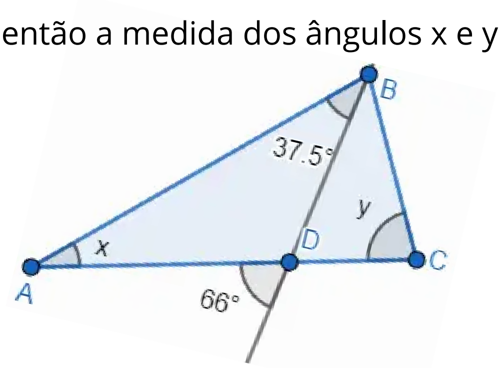


Fonte: 1ª Série – Cevianas e Teorema de Tales. Scribd, 2025

ATIVIDADE 7

Se $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, então a medida dos ângulos x e y é:

A) x = 20º e y = 76,5º
B) x = 35,5º e y = 103,5º
C) x = 76,5º e y = 20º
D) x = 28,5º e y = 76,5º

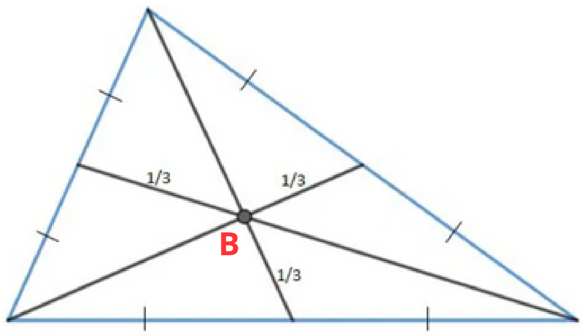


Fonte: Matemática Básica (2020)

ATIVIDADE 8

Durante uma aula de Matemática, a professora propôs o seguinte desafio:
"**Imagine que você tem um triângulo feito de uma placa de metal fina e deseja encontrar o ponto exato onde poderia equilibrá-lo sobre a ponta de um lápis sem deixá-lo cair. Esse ponto é chamado de baricentro.**"
Com base nessa situação e observando a figura a seguir, analise as afirmativas abaixo:
I. O baricentro (B) é o ponto de encontro das três medianas de um triângulo.
II. A distância do vértice até o baricentro equivale a 2/3 do comprimento da mediana.
III. A distância do vértice até o baricentro equivale a 1/3 do comprimento da mediana.
IV. O baricentro pode ser considerado o centro de equilíbrio de um triângulo.
Quais estão corretas?

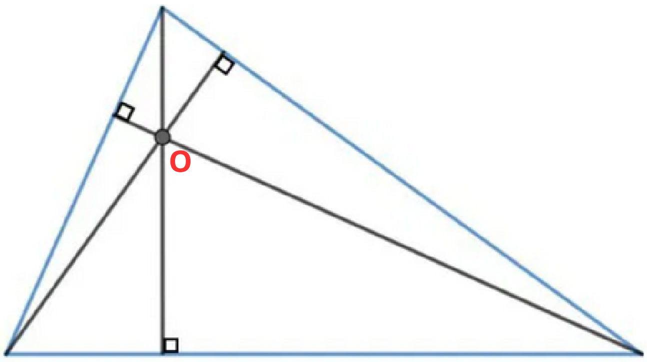
A) Apenas as afirmativas I e II.
B) Apenas as afirmativas I e III.
C) Apenas as afirmativas II e IV.
D) Apenas as afirmativas I, II e IV.



Fonte: Toda Matéria, 2025.

ATIVIDADE 9

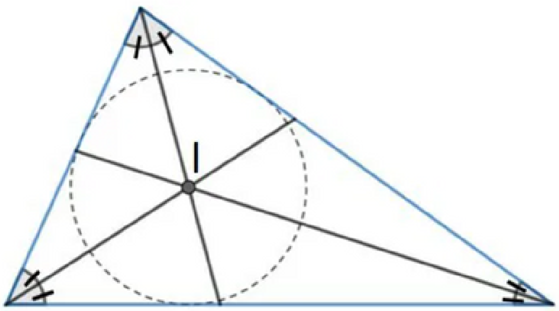
Durante uma aula de Geometria, o professor mostrou a seguinte imagem e disse:
"Esse é um dos pontos notáveis de um triângulo, obtido a partir de segmentos que saem de cada vértice e seguem em direção aos lados opostos, formando ângulos retos. O ponto onde esses segmentos se encontram recebe um nome especial e pode aparecer em diferentes posições, dependendo do tipo de triângulo."
Com base na figura e nessa explicação, analise as afirmativas a seguir:
I. O ortocentro (O) é o ponto de encontro das três alturas de um triângulo.
II. O ortocentro está sempre localizado dentro do triângulo, independentemente do tipo.
III. As alturas sempre formam ângulos de 90° com os lados opostos (ou prolongamentos desses lados) aos vértices de onde partem.
IV. Em triângulos retângulos, o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto.
Quais afirmativas estão corretas?
A) Apenas as afirmativas I e III.
B) Apenas as afirmativas II e IV.
C) Apenas as afirmativas I, III e IV.
D) Todas as afirmativas estão corretas.



Fonte: Toda Matéria (2025)

ATIVIDADE 10

Durante uma aula, a professora desenhou um triângulo no quadro, traçou três segmentos que partiam de cada vértice e iam até os lados opostos, formando ângulos de medidas iguais dos dois lados da linha. Depois, marcou o ponto onde esses segmentos se cruzavam e comentou:
"Esse ponto é muito especial. Ele está à mesma distância de todos os lados do triângulo e é útil, por exemplo, na construção de círculos dentro do triângulo."
Com base na figura e nessa explicação, analise as afirmativas a seguir:
I. O incentro é o ponto de encontro das três bissetrizes internas de um triângulo.
II. O incentro está sempre localizado fora do triângulo, caso ele seja escaleno.
III. O incentro é equidistante dos três lados do triângulo.
IV. É possível traçar um círculo com centro no incentro, que toca os três lados do triângulo.
Quais afirmativas estão corretas?
A) Apenas as afirmativas I e III.
B) Apenas as afirmativas I, III e IV.
C Apenas as afirmativas II, III e IV.
D) Todas as afirmativas estão corretas.



Fonte: Toda Matéria (2025)

Referências

ANDRINI, A. Praticando matemática - edição renovada - 8° ano - LA. Editora do Brasil, 2021.

BIANCHINI, E. Matemática Bianchini 8º ano: Manual do Professor. 10. ed. São Paulo, SP: Moderna, 2022.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

CLUBES OBMEP. Tales de Mileto. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_tales-de-mileto/. Acesso em: 4 abr. 2025.

MATEMÁTICA BÁSICA. Exercícios de Bissetriz. Disponível em: https://matematicabasica.net/exercicios-de-bissetriz/. Acesso em: 9 abr. 2025.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. Elementos básicos de geometria plana – Parte 2. Portal da OBMEP. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=30. Acesso em: 11 abr. 2025.

Mori, Iracema. Matemática: ideias e desafios, 9º ano / Iracema Mori, Dulce Satiko Onaga. - 18. ed. - São Paulo : Saraiva, 2015.

NOVA ESCOLA. Calculando o inacessível por meio da semelhança de triângulos. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/calculando-o-inacessivel-por-meio-da-semelhanca-de-triangulos/1149#section-materiaisDeApoio-3. Acesso em: 4 abr. 2025.

Orientações curriculares. Currículo ES, 2024. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares/. Acesso em: 10 fev. 2025.

TEIXEIRA, L. A. Superação! Matemática. 8º Ano: Manual do Professor / Organizadora Editora Moderna – 1 ed – São Paulo : Moderna, 2022

TODA MATÉRIA. Pontos notáveis de um triângulo. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/pontos-notaveis-de-um-triangulo/. Acesso em: 9 abr. 2025.