GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

1ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

PONTO DE MÁXIMO E PONTO DE MÍNIMO

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT503 Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. **EM13MAT315** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.	• Analisar pontos de máximo ou mínimo de funções quadráticas no contexto de área de superfícies, Matemática Financeira, Cinemática, entre outros. • Resolver problemas envolvendo pontos de máximo ou pontos de mínimo de funções quadráticas em diferentes contextos. • Resolver problemas envolvendo funções quadráticas. • Reconhecer o conceito de algoritmo como uma sequência ordenada e lógica de passos para resolver problemas. • Identificar os componentes básicos de um fluxograma, como início, fim, decisão, processo e entrada/saída. • Elaborar algoritmo que resolve problema envolvendo função quadrática (por exemplo, envolvendo ponto de máximo ou mínimo).	**D133_M** Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo de uma função do 2º grau.

Caro(a) Professor(a),

Informamos que, a partir da Quinzena 14, o Material Estruturado incluirá todo o conteúdo relativo a esta quinzena, de modo a não haver mais duas capas e sintetizar o conteúdo em um único volume. Esperamos, assim, que essa mudança facilite o seu trabalho, planejamento e sua organização em sala de aula.

Contextualização

30/05/2019 18h20

Práticas de 'Educação Financeira' dinamizam aulas de Matemática em escola de Serra

es.gov.br

Alunos da Escola Maringa estão aprendendo sobre economia e investimentos futuros que podem fazer.

Na Escola Estadual Maringa, em Serra, os alunos vivenciaram uma forma de aprender Matemática, integrando o conteúdo da disciplina com a educação financeira. O trabalho mostrou que, ao entender como gerenciar dinheiro, os estudantes não só se aproximaram da Matemática, mas também começaram a enxergar a importância dos conceitos matemáticos para a construção de um futuro financeiro mais seguro. O professor Carlos Costa destacou que, ao aplicar temas do cotidiano, como o planejamento financeiro, as aulas de Matemática se tornaram mais atraentes e significativas para os alunos, pois muitos não tinham noção de como os conceitos matemáticos estavam presentes em situações da vida real.

A utilização da função quadrática no contexto de educação financeira é um exemplo claro de como a Matemática pode ser aplicada de forma prática e útil. ***Funções quadráticas***, são essenciais para entender fenômenos financeiros que envolvem despesas e investimentos que seguem uma trajetória com ***crescimento ou decrescimento***, como o cálculo de valor de ativos ao longo do tempo ou a análise de despesas mensais que crescem de forma acelerada. Por exemplo, a função quadrática pode ser utilizada para modelar o custo de manutenção de um equipamento ou a depreciação de um bem com o passar dos anos, onde o valor do bem diminui de forma não linear.

Assim, os alunos não apenas aprendem a resolver problemas matemáticos, mas também podem aplicar esse conhecimento para analisar e projetar cenários financeiros práticos. Esse tipo de aprendizado vai além da teoria, permitindo que os estudantes usem a Matemática para modelar e planejar suas finanças de maneira concreta.

Neste material, iremos aprofundar o estudo das funções quadráticas em contextos variados.

BONS ESTUDOS!

Conceitos e Conteúdos

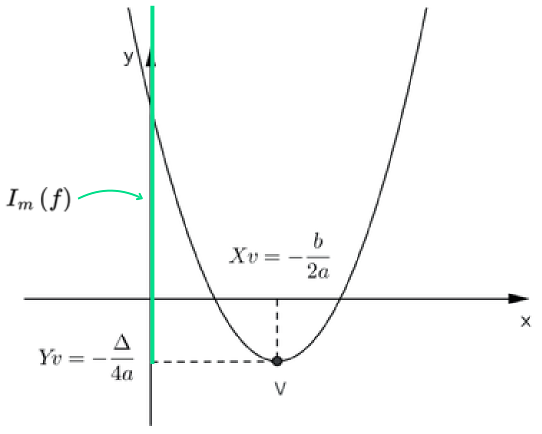
IMAGEM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

A ***imagem*** de uma função quadrática é o conjunto de todos os valores de ***f(x)*** que a função pode assumir. Em outras palavras, é o conjunto de valores ***y*** para os quais existe um valor ***x*** que satisfaz a equação da função quadrática.

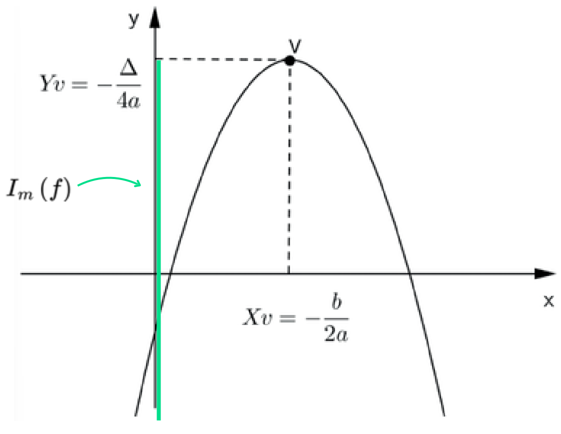
Utilizando as coordenadas do vértice da parábola correspondente ao gráfico de uma função quadrática ***f***, podemos determinar o seu conjunto imagem (**Im**).

No material anterior vimos que:

- ***a > 0***, o vértice ***V*** é o ***ponto de mínimo*** da função e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o ***valor mínimo*** que a função assume, ou seja, é o menor valor de imagem da função.
- ***a < 0***, o vértice ***V*** é o ***ponto de máximo*** da função e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o ***valor máximo*** que a função assume, ou seja, é o maior valor de imagem da função.



$a > 0,\ Im(f) = \{y \in \Re \mid y \geq y_v\}$



$a < 0,\ Im(f) = \{y \in \Re \mid y \leq y_v\}$

Veja o exemplo:

Determine a Im(*f*) e o valor máximo ou mínimo da função quadrática f(x) = x² + 4x - 2.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2))}{4 \cdot 1} = -\frac{16+8}{4} = -\frac{24}{4} = -6$$

a > 0 , então a concavidade é para cima e a curva é limitada inferiormente , portanto a função tem valor mínimo. Assim a imagem é:

$$Im(f) = \{y \in \Re \mid y \geq -6\}$$

Valor mínimo de *f é* -6.

<u>Outra forma:</u> Para determinar o y_v a partir do x_v, basta substituir o valor do x_v no lugar do x da função e efetuar os cálculos necessários.

ALGORITMO PARA ENCONTRAR PONTO DE MÁXIMO OU MÍNIMO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

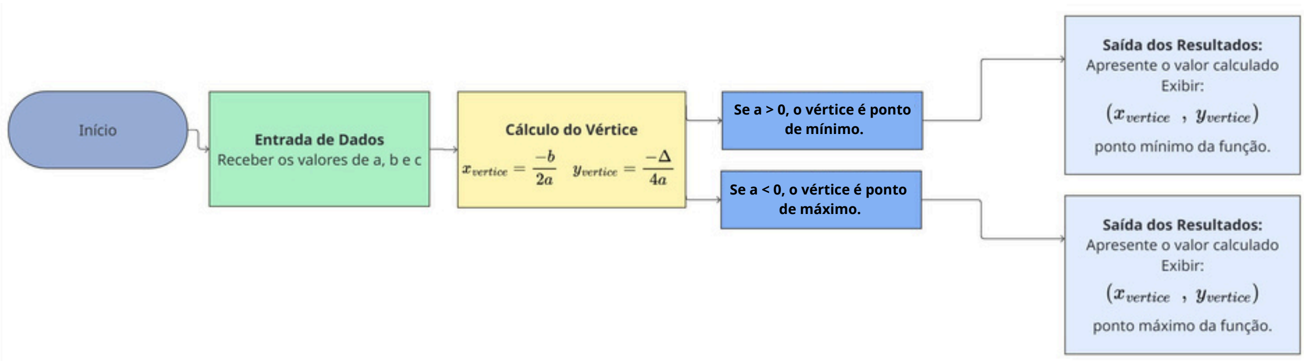
ELEMENTOS BÁSICOS DE UM ALGORITMO

Um algoritmo é uma sequência de passos lógicos e bem definidos que têm como objetivo resolver um problema. Podemos dividi-lo nos seguintes elementos:

- ***Entrada:*** São os dados ou informações que o algoritmo precisa para funcionar. O algoritmo recebe os coeficientes ***a***, ***b***, e ***c*** da função quadrática.
- ***Processamento:*** O processamento envolve os cálculos ou operações que o algoritmo realiza para chegar à solução. O valor de $x_{vertice}$ é calculado pela fórmula $\frac{-b}{2a}$ e o valor do $y_{vertice}$ é calculado pela fórmula $\frac{-\Delta}{4a}$.
- ***Decisões Condicionais:*** São as etapas em que o algoritmo escolhe entre diferentes caminhos, dependendo de uma condição. O algoritmo verifica se ***a*** é positivo ou negativo para identificar se o ***vértice*** é um ***ponto de máximo ou mínimo.***
- ***Saída:*** O algoritmo exibe o valor de $x_{vertice}$, o valor de $y_{vertice}$, e a informação sobre se o ponto é um máximo ou mínimo.

FLUXOGRAMA PARA ENCONTRAR O PONTO DE MÁXIMO E MÍNIMO

No material da quinzena 7 na página 6 estudamos sobre o que é um fluxograma, agora iremos construir um fluxograma que represente o algoritmo para encontrar o ponto de máximo ou mínimo de uma função quadrática. Ele terá as seguintes etapas:



Exercícios Resolvidos

Este exercício tem como objetivo desenvolver a expectativa de aprendizagem: analisar pontos de máximo ou mínimo de funções quadráticas no contexto de área de superfícies, Matemática Financeira, Cinemática, entre outros.

EXERCÍCIO 1

(IFBA) Durante as competições olímpicas, um jogador de basquete lançou a bola para o alto em direção à cesta. A trajetória descrita pela bola pode ser representada por uma curva chamada parábola, que pode ser representada pela expressão:
h = -2x² + 8x (onde "h" é a altura da bola e "x" é a distância percorrida pela bola, ambas em metros). A partir dessas informações, encontre o valor da altura máxima alcançada pela bola:

a) 4 m.
b) 6 m.
c) 8 m.
d) 10 m.
e) 12 m.

RESOLUÇÃO

Para encontrar a altura máxima alcançada pela bola, precisamos determinar o vértice da parábola representada pela equação $h = -2x^2 + 8x$.

A altura máxima ocorre no ponto onde a coordenada *h* é máxima. A fórmula geral para a altura de uma parábola quadrática $h = ax^2 + bx + c$, onde a, b, e c são constantes, atinge seu máximo (ou mínimo) no vértice da parábola, dado por $x = -\frac{b}{2a}$.

No caso da nossa equação:

- a = - 2
- b = 8
- c = 0

Calculamos x usando a fórmula do vértice:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2\cdot(-2)} = \frac{8}{4} = 2$$

Agora, substituímos x=2 de volta na equação para encontrar *h*:

$$h = -2 \cdot (2)^2 + 8 \cdot 2$$
$$h = -2 \cdot 4 + 16$$
$$h = -8 + 16$$
$$h = 8$$

Portanto, a altura máxima alcançada pela bola é 8 metros, alternativa C.

EXERCÍCIO 2

Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.

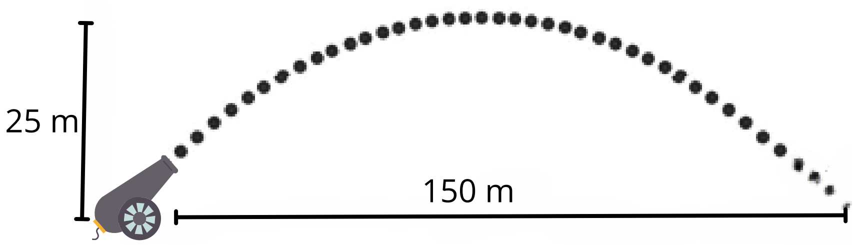


Imagem produzida no Canva

Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto ***(0, 0)*** e que o projétil atinge o solo no ponto ***(150, 0)*** do plano xy. A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é :

A) $y = 150x - x^2$
B) $y = 3\,750x - 25x^2$
C) $75y = 300x - 2x^2$
D) $125y = 450x - 3x^2$
E) $225y = 150x - x^2$

RESOLUÇÃO

Sendo a equação no formato $y = ax^2 + bx + c$ e a parábola corta o eixo na origem, então $c = 0$. Então temos a equação $y = ax^2 + bx$

Também sabemos que temos o ponto (150, 0) que satisfaz a equação, então, substituindo os valores de x e y na equação, temos: ***$150^2 a + 150b = 0$.***

Pela figura vemos que $y_{vértice} = 25$

x_v é o ponto exatamente no meio das duas raízes, $x_v = 75$. O par ordenado do vértice é (75, 25), podemos substituir na equação e formar um sistema de equações:

$$75^2a + 75b = 25$$

$$150^2a + 150b = 0$$

Isolando na ***b*** segunda equação temos

$$b = -\frac{150^2a}{150}$$

$$b = -150a$$

Substituindo na primeira equação

$$75 \cdot 75a + 75 \cdot (-150a) = 25$$

$$75 \cdot (75a - 150a) = 25$$

$$-75 \cdot 75a = 25$$

$$a = -\frac{25}{75 \cdot 75}$$

$$a = -\frac{1}{225}$$

Substituindo a na equação onde isolamos b

$$b = \frac{150}{225}$$

$$y = -\frac{x^2}{225} + \frac{150x}{225}$$

Se multiplicarmos a equação toda por 225, temos

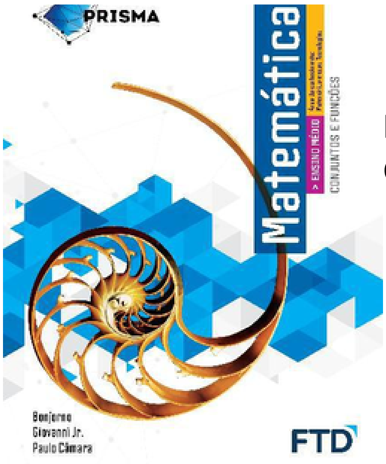
$$225y = -x^2 + 150x$$

Resposta: Alternativa E.

Material Extra

LIVRO MATEMÁTICA EM CONTEXTOS - FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICAS

- Para consolidação dos conteúdos apresentados neste material, sugerimos as atividades das páginas: 123 e 124.



LIVRO MATEMÁTICA PRISMA - CONJUNTOS E FUNÇÕES

- Para consolidação dos conteúdos apresentados neste material, sugerimos as atividades das páginas: 128 e 129.

ASSISTA AOS VÍDEOS E REALIZE AS ATIVIDADES APONTANDO O CELULAR PARA O QR CODE ABAIXO OU CLIQUE NO BOTÃO.

Função Quadrática

Fluxograma e Algoritmos

Atividades

ATIVIDADE 1

Determine o vértice da parábola e o valor máximo ou mínimo da função cuja lei está indicada em $y = x^2 + 4x - 2$.

ATIVIDADE 2

(PAEBES TRI) Em uma Olimpíada, a trajetória do centro de gravidade de um atleta durante um salto em distância descreveu um arco de parábola. A função que representa a altura em função do tempo descrito pelo ponto P (centro de gravidade do atleta) é $h(t) = -20t^2 + 100t$, em que h representa a altura do ponto P, em centímetros, e t indica o tempo em segundos.

A altura máxima, em centímetros, alcançada pelo ponto P foi de

A) 125
B) 100
C) 10
D) 5
E) 2,5

ATIVIDADE 3

Um **muro de tijolos** será usado como um dos lados de um **terreno retangular**. Para os outros lados iremos usar **400 m de tela** de arame, de modo a produzir uma área máxima. Essa **área máxima** é:

A) 10 000 m²
B) 20 000 m²
C) 30 000 m²
D) 40 000 m²
E) 50 000 m²

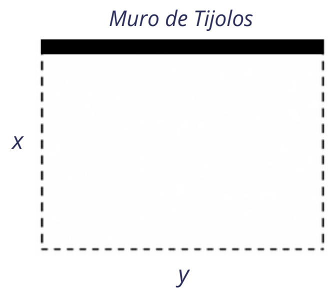


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 4

O vazamento ocorrido em função de uma rachadura na estrutura de uma barragem precisa ser estancado. Para consertá-la, os técnicos verificaram que o lago dessa barragem precisa ser esvaziado e estimaram que a **capacidade C** de água no lago, em milhões de metros cúbicos, poderia ser calculada por **$C(t) = -2t^2 - 12t + 110$**, onde **t é o tempo** em horas a partir do momento da constatação do vazamento $(t \geq 0)$. Com base no texto, analise cada afirmação e julgue **VERDADEIRA** ou **FALSA**.

A) A quantidade de água restante no lago, 4 horas após a constatação do vazamento, é de 30 milhões de metros cúbicos.
B) A capacidade desse lago no momento da constatação do vazamento (t = 0), é de 110 milhões de metros cúbicos.
C) Os técnicos só poderão iniciar o conserto da rachadura quando o lago estiver vazio, isto é, 5 horas após a constatação do vazamento.
D) Três horas após a constatação do vazamento, o lago estará com 50% de sua capacidade inicial.

ATIVIDADE 5

Numa operação de salvamento marítimo, foi lançado um foguete sinalizador que permaneceu aceso durante **toda sua trajetória**. Considere que a **altura h**, em metros, alcançada por este foguete, em relação ao nível do mar, é descrita por **$h = 10 + 5t - t^2$**, em que **t é o tempo**, em segundos, após seu lançamento. A luz emitida pelo foguete é útil apenas a partir de **14 m acima do nível do mar**. O intervalo de tempo, em segundos, no qual o foguete emite **luz útil** é igual a:
A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

ATIVIDADE 6

O **gráfico** de uma função quadrática **y = f(x)** passa pela **origem** do plano cartesiano e pelo **ponto (10, 0)**. Se o **vértice** dessa parábola fica no **ponto (5, 5)** então a **lei** dessa função é
A) $y = 0{,}2x^2 + 5x$
B) $y = -0{,}2x^2 - 5x$
C) $y = 5x^2 + 0{,}2x$
D) $y = -0{,}2x^2 + 2x$
E) $y = 0{,}2x^2 + 2x$

ATIVIDADE 7

O **lucro** de uma pequena empresa é dado por uma **função quadrática** cujo gráfico está representado na figura abaixo. Podemos concluir que o **lucro máximo** dessa empresa é de:

A) R$1.280,00
B) R$1.400,00
C) R$1.350,00
D) R$1.320,00
E) R$1.410,00

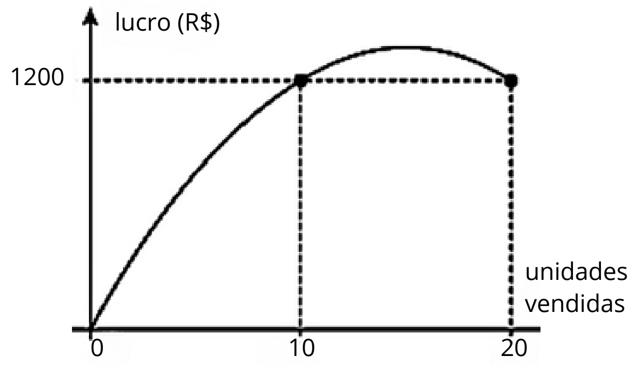


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 8

Um **retângulo** no plano cartesiano possui dois vértices sobre o eixo das abscissas (eixo x) e outros dois vértices sobre a **parábola** de equação **$y = 4 - x^2$**, com $y > 0$. Qual é o **perímetro máximo** desse retângulo?

A) 10
B) 12
C) 14
D) 16
E) 18

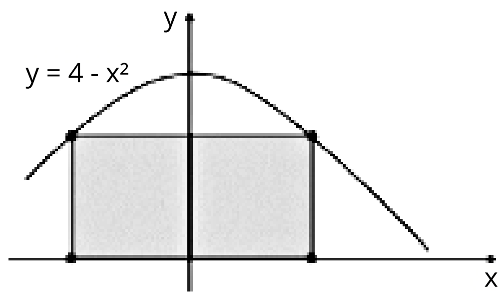


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 9

No verão deste ano, foi praticado um torneio de futevôlei na praia de Itaipava, no município de Itapemirim, litoral sul do Espírito Santo. A quadra é bem parecida com a quadra de vôlei de praia. As medidas da quadra eram 9 m de largura e 18 m de comprimento, e ela é dividida ao meio por uma rede de 2,20 m de altura.

Os jogadores costumam usar uma fita colorida para demarcar a quadra.

a) Conforme as medidas da quadra, que comprimento mínimo a fita colorida deve ter para demarcá-la?

b) Nessas condições, qual é a área do retângulo limitado pela fita colorida?

c) É possível conseguir, com o mesmo comprimento da fita, um retângulo de área maior? Se sim, quais serão as medidas dos lados desse retângulo?

ATIVIDADE 10

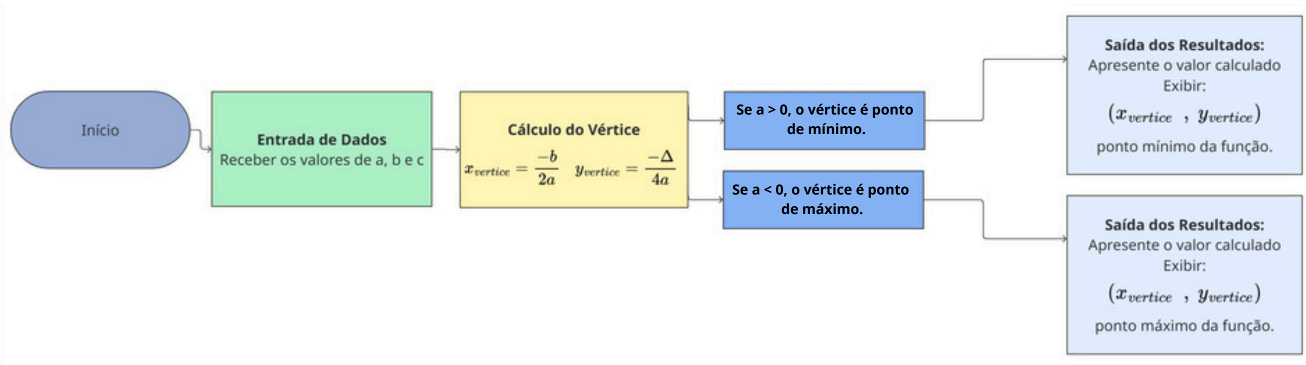
Os estudantes de uma escola irão fretar um ônibus com **45 lugares** para um passeio ao jardim zoológico. Cada um deles deverá pagar **R$30,00,** mais **R$3,00** para cada lugar vago.

A) Se nesse passeio forem **20** estudantes, quanto **pagará cada um** deles?

B) A empresa que fretou o ônibus **receberá quanto** se a quantidade de estudantes que forem a esse passeio for **30**?

C) Qual é a **lei que expressa** o valor **V** recebido pela empresa que vai fretar esse ônibus **em função** do número **n** de estudantes que irão nesse passeio?

D) Use o **fluxograma** a seguir para encontrar o **valor máximo** que, a empresa que irá fretar o ônibus para esse passeio, irá receber.



Referências

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos . Volume 1. São Paulo: Ática, 2020

BONJORNO, Giovanni Jr.; CÂMARA, Paulo. Prisma: matemática – conjuntos e funções . São Paulo: FTD, 2020.

KHAN ACADEMY. Função quadrática. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-algebra/x34e9dd8107ca5eda:funcao-quadratica/x34e9dd8107ca5eda:untitled-705/e/funcao-quadratica. Acesso em: 23 mar. 2025.

ACADEMIA KHANACADEMIA KHAN. Algoritmos . Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/1-serie-em-mat-sp/x82b03a9b6c8af113:untitled-579/x82b03