GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA:
SOMA DOS TERMOS DE UMA PG

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT508 Identificar e associar Progressões Geométricas (PG) a Funções Exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.	• Resolver problemas envolvendo soma dos termos de Progressões Geométricas. • Resolver problemas envolvendo Progressões Geométricas.	• **D097M** Utilizar propriedades de progressões geométricas na resolução de problemas.

Contextualização

Já dedicamos nossa atenção à definição e às propriedades de uma Progressão Geométrica (PG). Analisamos como cada termo dessa sequência é obtido pela multiplicação do anterior por uma razão e observamos como isso gera padrões regulares e previsíveis. Até aqui, você se familiarizou com a estrutura de uma PG e aprendeu a identificar seus elementos essenciais.

Agora, é hora de avançarmos para um novo desafio: a soma dos termos de uma PG. Imagine ter uma sequência de números que cresce ou diminui de forma exponencial. Como seria possível calcular, de maneira direta, a soma de todos os seus termos até um certo ponto? E indo além: sob quais condições seria possível somar infinitos termos e, ainda assim, chegar a um resultado bem definido? Esses questionamentos são o ponto de partida para nosso estudo da soma dos termos das Progressões Geométricas.

Ao estudar a soma dos termos de uma PG, você descobrirá como a matemática oferece ferramentas precisas para lidar com o que, à primeira vista, parece inalcançável. Seja lidando com aplicações práticas, como em problemas financeiros, ou explorando conceitos teóricos mais abstratos, a soma dos termos de uma PG revela um lado fascinante da matemática: sua capacidade de transformar padrões complexos em expressões simples e elegantes.

Neste material, veremos primeiro como calcular a soma de um número finito de termos, utilizando fórmulas específicas que simplificam o trabalho manual. Em seguida, exploraremos o conceito de soma de uma PG infinita, uma ideia que desafia nossa intuição inicial e nos faz refletir sobre os limites da matemática.

Conceitos e Conteúdos

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG

A progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante chamada de razão (q). Vamos explorar como calcular a soma dos termos de uma PG finita e infinita, com exemplos e aplicações.

Soma dos Termos de uma PG Finita

A soma dos **n primeiros termos** de uma PG finita é dada pela expressão:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Utilizando a fórmula do termo geral de uma PG, temos:

$$\boxed{S_n = a_1 + a_1 \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Eq. 1

Multiplicando ambos os membros da equação por *q*:

$$q \cdot S_n = q \cdot \left(a_1 + a_1 \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}\right)$$

$$\boxed{q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n}$$

Eq. 2

Fazendo Eq. 1 - Eq. 2, temos:

$$S_n - q \cdot S_n = \left(a_1 + a_1 \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}\right) - \left(a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^n\right)$$

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 + a_1 \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} - a_1 \cdot q - a_1 \cdot q^2 - \cdots - a_1 \cdot q^n$$

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 + \cancel{a_1 \cdot q} - \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{\cdots} + \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}} - \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}} - a_1 \cdot q^n$$

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

Fatorando:

$$S_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$$

Isolando S_n :

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},} \quad \text{para } q \neq 1.$$

atenção

Professor (a),

a fórmula para a soma dos termos de uma PG finita é apresentada de diversas formas na literatura. Essa versão foi escolhida por sua fácil adaptação à soma de termos de PG infinita e por utilizar apenas os elementos fundamentais. Contudo, uma outra maneira muito utilizada de escrever a fórmula para a determinar a soma dos termos de uma PG infinita é:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Exemplo prático

Considere uma PG finita com $a_1 = 2$, $q = 3$, com um total de 4 termos. Calcule a soma dos 4 termos dessa PG.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \rightarrow S_4 = 2 \cdot \frac{1 - 3^4}{1 - 3}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - 81}{-2} = 2 \cdot \frac{-80}{-2} = 2 \cdot 40 = 80$$

Portanto, a soma dos 4 primeiros termos é 80.

Soma dos Termos de uma PG Infinita

Quando $-1 < q < 1$, é possível calcular a soma de uma PG com número infinito de termos, pois q^n tende a zero conforme n cresce. Nesse caso, a fórmula da soma é:

$$S = a_1 \cdot \frac{1 - q^{\infty}}{1 - q}$$

Como -1 < q < 1:

$$S = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q}$$

Logo:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - q},} \quad \text{para} - 1 < q < 1.$$

Exemplo prático

Considere uma PG infinita com $a_1 = 5$ e $q = \frac{1}{3}$. Calcule a soma dos infinitos termos desta PG.

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{5}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{\frac{3-1}{3}} = \frac{5}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

Portanto, a soma dos infinitos termos desta PG é $\frac{15}{2}$ ou 7,5 .

Exercícios Resolvidos

Agora que você conhece um processo mais prático para determinar a soma dos termos de uma PG (as fórmulas), vamos resolver alguns problemas. A resolução de problemas sobre PG, geralmente, requer:

1. **Identificar os elementos conhecidos:** verifique quais parâmetros da PG (a_1 , q , n , ou S_n) são fornecidos no problema.
2. **Determinar o objetivo:** descubra qual elemento precisa ser calculado.
3. **Escolher a fórmula adequada (ou outro procedimento):** baseie-se nas condições fornecidas (PG finita ou infinita) e no que é pedido.

Problema 1: crescimento de uma população de bactérias

Em um laboratório, a população de uma colônia de bactérias triplica a cada hora. Verificou-se que ao final da primeira hora havia 2 bactérias na colônia. Quantas bactérias haverá ao final de 5 horas?

Resolução

Primeiro, identificamos os elementos da PG no problema:

- Como, inicialmente, havia 2 bactérias, $a_1 = 2$;
- Como as bactérias triplicam a cada hora, $q = 3$;
- Queremos saber o resultado ao final da quinta hora, então $n = 5$;
- Como há um n definido igual a 5, trata-se de um problema de soma de termos de uma PG finita, portanto queremos obter o valor de S_n .

Assim:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow S_5 = 2 \cdot \frac{1-3^5}{1-3} = 2 \cdot \frac{1-243}{-2} = 2 \cdot \frac{-242}{-2} = 2 \cdot 121$$

$$\boxed{S_5 = 242}$$

Portanto, teremos **242 bactérias** ao fim de 5 horas.

Problema 2: desempenho de uma bola de basquete

Uma bola de basquete é jogada de uma altura de 4 metros e quica repetidamente. A cada quique, a altura atingida é 60% da altura anterior. Qual a soma das alturas atingidas em todas as subidas, considerando que a bola quica indefinidamente?

Resolução

Primeiro, identificamos os elementos da PG no problema:

- A bola é solta de uma altura de 4 metros, $a_1 = 4$;
- A cada quique a altura é de 60% da altura anterior, $q = 60\% = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$;
- Como não há um n definido, trata-se de um problema de soma de termos de uma PG infinita, portanto queremos obter o valor de S.

Assim:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{3}{5}} = \frac{4}{\frac{5-3}{5}} = \frac{4}{\frac{2}{5}} = \frac{\cancel{4}^{2}}{1} \cdot \frac{5}{\cancel{2}^{1}} = 2 \cdot 5$$

$$\boxed{S = 10}$$

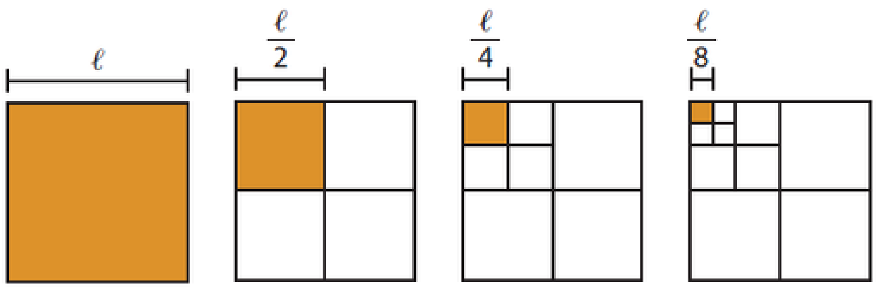
Assim, a soma das alturas que a bola atingiu é de **10 metros.**

atenção

Professor (a),
além desses dois exercícios, trouxemos dois problemas abordando PG, porém fazendo conexão com outras abordagens da Matemática. O problema 3 aborda, também, sobre perímetro, cujo conceito pode ser revisado no momento de discussão desse problema. Ele aborda, ainda, sobre fractais, assim como o problema 04.
Seria muito importante discutir esses quatro problemas com os alunos mas, orientamos que, caso não seja possível, selecione dois ou três para realização da discussão e aprofundamento do conteúdo.

Problema 3: os perímetros dos quadrados

(BONJORNO; GIOVANI; SOUZA, 2020) O lado de um quadrado mede ℓ unidades de comprimento. Unindo-se os pontos médios dos lados opostos, obtêm-se quatro novos quadrados. Se procedermos assim, sucessivamente, obteremos novos quadrados cada vez menores, conforme a figura, que mostra parte de uma sequência infinita. Determine a soma dos perímetros de todos os quadrados coloridos dessa sequência.



Resolução:

O perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados. O quadrado, por definição, é um polígono de quatro lados congruentes. Portanto, seu perímetro é obtido multiplicando a medida de um de seus lados por 4.

Assim, na questão proposta:

- O primeiro quadrado tem lado de medida ℓ, resultando em um perímetro de $4 \cdot \ell$;
- O segundo quadrado tem lado de medida $\frac{\ell}{2}$, resultando em um perímetro de $\cancel{4}^2 \cdot \frac{\ell}{\cancel{2}^1} = 2 \cdot \ell$;
- O terceiro quadrado tem lado de medida $\frac{\ell}{4}$, resultando em um perímetro de $\cancel{4}^1 \cdot \frac{\ell}{\cancel{4}^1} = \ell$;

E assim por diante, de forma que a sequência formada pelos perímetros desses quadrados subsequentes forma a seguinte PG infinita:

$$\left(4 \cdot \ell, \quad 2 \cdot \ell, \quad \ell, \quad \frac{\ell}{2}, \quad \cdots\right)$$

É solicitado, no enunciado, o cálculo da soma dos perímetros que pode ser obtida através da fórmula

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \qquad \text{para} -1 < q < 1.$$

O primeiro termo é $a_1 = 4 \cdot \ell$ e a razão pode ser obtida dividindo, por exemplo, o segundo pelo primeiro termo:

$$q = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\cancel{2}^{1} \cdot \cancel{\ell}}{\cancel{4}^{2} \cdot \cancel{\ell}} = \frac{1}{2}$$

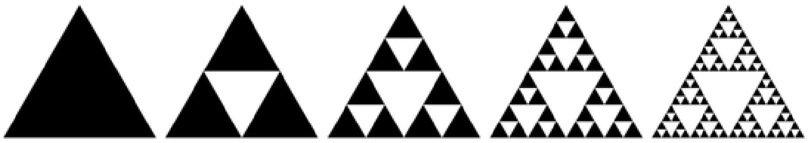
Como $-1 < q < 1$ o somatório dos termos infinitos desta PG converge para um número real:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4 \cdot \ell}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4 \cdot \ell}{\frac{2-1}{2}} = \frac{4 \cdot \ell}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \ell \cdot 2 = 8 \cdot \ell$$

Portanto, a soma dos perímetros dessa sequência de quadrados é $8 \cdot \ell$.

Problema 4: progressões geométricas e fractais

(BONJORNO;GIOVANI; SOUZA, 2020 - Adaptado) A sequência de figuras abaixo ilustra os cinco primeiros passos da construção do Triângulo de Sierpinski. Em cada etapa, novos triângulos brancos são removidos da figura anterior, sendo seus vértices os pontos médios dos lados dos triângulos pretos remanescentes.



Denotamos por a_n o número de triângulos pretos na n-ésima figura da sequência. Observando os primeiros termos, correspondente aos triângulos acima, temos:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 27, \quad a_5 = 81.$$

Mantendo esse padrão de crescimento, determine o valor de n correspondente à figura que contém exatamente 2 187 triângulos pretos.

Resolução

Observamos que a quantidade de triângulos pretos segue a sequência de PG em que cada termo é obtido multiplicando o anterior por 3:

$$a_n = 3 \cdot a_{n-1} \quad \therefore \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = 3 = q$$

Portanto, temos uma PG com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = 3$.

Adaptando a fórmula do termo geral da PG para os valores que conhecidos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_n = 1 \cdot 3^{n-1} \rightarrow a_n = 3^{n-1}$$

Queremos encontrar n tal que $a_n = 2187$, portanto:

$$a_n = 3^{n-1} \rightarrow 2187 = 3^{n-1} \rightarrow \cancel{3}^7 = \cancel{3}^{n-1} \rightarrow$$
$$7 = n - 1 \rightarrow n = 7 + 1 = 8$$

Concluímos que a figura com 2 187 triângulos pretos corresponde à oitava posição da sequência.

Rascunho

$$\begin{array}{r|l} 2187 & 3 \\ 729 & 3 \\ 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 2187 = 3^7$$

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE)

Capítulo 3: Sequências.
- Sequências. (p. 110 - 113)
- Progressão geométrica. (p. 133 - 141)

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 4: progressões.
- Introdução. (p. 118 - 119);
- Sequências. (p. 119 - 122).
- Progressão geométrica (p. 132 - 134)

VÍDEOS

Portal da OBMEP
Progressões Geométricas

Professor(a),
nesse link você encontra três vídeos sobre Progressão Geométrica. Eles podem ser um suporte para o estudo do aluno, caso considere necessário.

HISTÓRIA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Texto:
Paradoxo da dicotomia de Zenão
Página 147

Professor(a),
no livro indicado você encontrará um texto com duas discussões que podem ser feitas com os alunos e que ajudam a refletir sobre o conceito de infinito.

Atividades

ATIVIDADE 1

A comporta de uma hidrelétrica está sendo aberta de forma que, a cada segundo, a quantidade de água despejada dobra. No primeiro segundo, o volume de água despejado foi de 3 000 litros. Qual é a quantidade total de água despejada por essa hidrelétrica após 7 segundos, em litros?

a) 21 000
b) 63 000
c) 189 000
d) 192 000
e) 381 000

ATIVIDADE 2

Marcos, administrador de um site informativo, analisou o número de visualizações de uma postagem de marketing nos primeiros 8 minutos após sua publicação. No primeiro minuto, 6 pessoas visualizaram a postagem, e a cada minuto seguinte, o número de novos visualizadores triplicava. Assim, 2 minutos após a publicação, 18 novas pessoas haviam visualizado a postagem; no terceiro minuto, foram 54, e assim por diante. O total de pessoas que visualizaram a publicação ao final dos 8 minutos foi:

a) 13 120
b) 13 122
c) 19 680
d) 19 683
e) 46 656

ATIVIDADE 3

Determine a soma dos seis primeiros termos da PG (2, -8, 32, ...).

ATIVIDADE 4

(ENEM - 2018) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com *2n* competidores, então na 2ª fase restarão *n* competidores, e assim sucessivamente até a partida final.
Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por:

a) 2 x 128
b) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2
c) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1
d) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2
e) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

ATIVIDADE 5

Ésio (esomeprazol magnésico) é indicado para o tratamento de doenças ácido-pépticas e para o alívio dos sintomas de azia, regurgitação ácida e dor epigástrica. Sua meia-vida de eliminação plasmática é de aproximadamente 1 hora, quando administrado em doses repetidas, uma vez ao dia.

Disponível em: <https://consultaremedios.com.br/esio-comprimido/bula>. Acessado em: 16/12/2024. (Adaptado)

Considerando que um paciente ingeriu um comprimido de Ésio pela manhã, a quantidade do medicamento na corrente sanguínea segue uma progressão geométrica: na primeira hora, havia 20 mg; na segunda hora, restavam 10 mg; na terceira hora, 5 mg permaneciam no sangue, e assim por diante. Portanto, a quantidade de medicação presente na corrente sanguínea do paciente na sexta hora após a ingestão será:

a) 5 mg
b) 2,5 mg
c) 1,25 mg
d) 0,625 mg
e) 0,3125 mg

ATIVIDADE 6

Qual é a quantidade de elementos da PG, finita (1, 2, 4, ...), sabendo que a soma dos termos dessa PG, é 1 023?

ATIVIDADE 7

(SADEAM-2013) Um fazendeiro fabricava queijos utilizando 512 litros de leite diariamente. Para diminuir a intensidade do trabalho decidiu, de forma gradativa, parar de fabricar queijos e revender o leite. Na primeira semana, após essa decisão, ele vendeu 8 litros de leite por dia; na segunda semana, 16 litros por dia; na terceira semana 32 litros por dia; e assim por diante, até que todos os 512 litros fossem totalmente vendidos por dia.
Mantendo o mesmo padrão nas vendas de leite, em quantas semanas o fazendeiro conseguiu substituir totalmente a produção de queijos pela venda do leite?
a) 3
b) 6
c) 7
d) 33
e) 64

ATIVIDADE 8

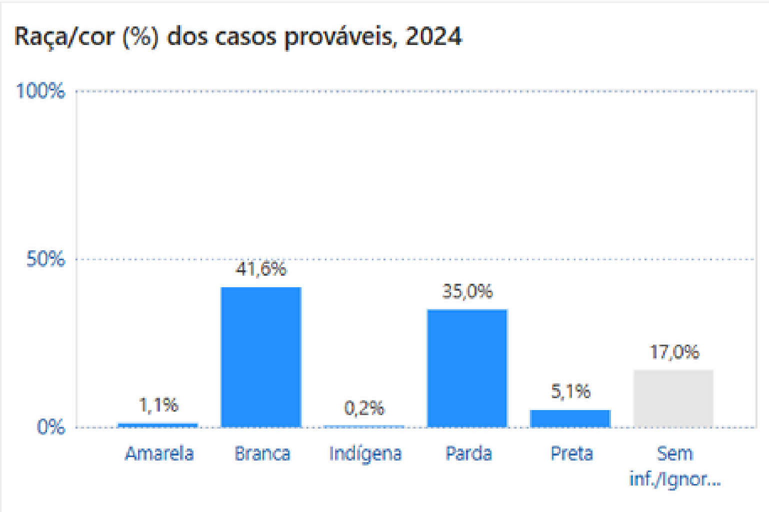
Em um parque de diversões, um brinquedo distribui fichas de prêmios para os visitantes por meio de um mecanismo especial. No primeiro giro, o visitante recebe 20 fichas. A cada giro subsequente, o número de fichas distribuídas é reduzido pela metade em relação ao giro anterior, seguindo uma progressão geométrica. Considerando essa dinâmica, podemos calcular a quantidade total de fichas que um visitante receberá após um número infinito de giros. Qual é esse valor?
a) 10
b) 20
c) 30
d) 40
e) 50

ATIVIDADE 9

A soma dos 10 primeiros termos de uma progressão geométrica é 4 092. Sabendo que a razão dessa progressão é igual a 2, o primeiro termo da sequência é:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

ATIVIDADE 10

A dengue é uma doença viral que afeta milhares de brasileiros a cada ano, representando um dos maiores desafios para a saúde pública no país. Até a Semana Epidemiológica (SE) 52 de 2024, o Brasil registrou 6,6 milhões de casos prováveis da doença. O número de óbitos confirmados já chega a 5 915, enquanto 1 088 mortes ainda estão em investigação. Devido à gravidade da epidemia, diversos estados e municípios declararam situação de emergência nesse ano. A seguir, apresentamos a distribuição dos casos prováveis de dengue, conforme os dados do Sistema de Vigilância de Arboviroses, por raça/cor, em porcentagem.



Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/a/aedes-aegypti/monitoramento-das-arboviroses>. Acessado em: 12/12/2024.

Suponha que uma fêmea do mosquito Aedes aegypti (1ª geração), infectada com o vírus da dengue, coloque 200 ovos em um reservatório com água parada no quintal de uma casa. Considerando as gerações futuras, temos as seguintes condições:

- Metade das crias serão fêmeas.
- 30% das fêmeas nascerão infectadas com o vírus da dengue.
- As crias se reproduzirão no mesmo local e com a mesma proporção de infecção de sua mãe.

a) Qual será o número de fêmeas infectadas do Aedes aegypti nesse reservatório na 2ª geração?

b) Considerando que o número de mosquitos Aedes aegypti nas gerações subsequentes segue uma progressão geométrica, escreva a sequência das quantidades de fêmeas infectadas nas 5 primeiras gerações, partindo da 1ª geração com 1 única fêmea.

c) Qual será o total de fêmeas infectadas no final da 5ª geração?

Gabarito

ATIVIDADE 01: E
ATIVIDADE 02: C
ATIVIDADE 04: E
ATIVIDADE 05: D
ATIVIDADE 07: C
ATIVIDADE 08: D
ATIVIDADE 09: C

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

A quantidade total de água despejada após 7 segundos é a soma dos volumes despejados a cada segundo, ou seja, a soma do 1° ao 7° termo da progressão geométrica: (3 000, 6 000, 12 000, ...), onde a_1 = 3 000, *n* = 7 e a razão é 2.

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG, finita: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$$S_7 = \frac{3\,000 \cdot (2^7 - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{3\,000 \cdot (128 - 1)}{1} \Rightarrow S_7 = 3\,000 \cdot 127 = 381\,000$$

A quantidade total de água despejada após 7 segundos é 381 000 litros, logo a alternativa correta é a **LETRA E**.

ATIVIDADE 2

A quantidade total de pessoas que visualizaram a publicação ao final dos 8 minutos é a soma dos termos dessa progressão geométrica: (6, 18, 54, ...), onde $a_1 = 6$, $n = 8$ e a razão é 3.

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG finita: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$$S_8 = \frac{6 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{\cancel{6} \cdot (6\,561 - 1)}{\cancel{2}} \Rightarrow S_8 = 3 \cdot 6\,560 = 19\,680$$

A quantidade total de pessoas que visualizaram a publicação ao final dos 8 minutos foi 19 680, logo a alternativa correta é a **LETRA C**.

ATIVIDADE 3

Analisando a PG, (2, -8, 32, ...), temos: $a_1 = 2$, a razão é -4 e queremos somar os seis primeiro termos, logo $n = 6$.

Utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PG finita: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$$S_6 = \frac{2 \cdot ((-4)^6 - 1)}{-4 - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{2 \cdot (4\,096 - 1)}{-5} \Rightarrow S_6 = \frac{2 \cdot 4\,095}{-5}$$

$$S_6 = \frac{8\,190}{-5} = -1\,638$$

Portanto, a soma dos seis primeiros termos da PG, é **-1 638**.

ATIVIDADE 4

Em um torneio de tênis com sistema de eliminatória simples, a cada fase, metade dos competidores é eliminada, ou seja, em cada fase ocorre um número de partidas igual ao número de competidores eliminados. Cada partida tem um vencedor, que avança para a próxima fase. Em cada fase, o número de partidas é igual à quantidade de competidores restantes dividida por 2. Assim, temos: 1ª fase: 64 partidas (de 128 competidores), 2ª fase: 32 partidas (de 64 competidores) e assim por diante, seguindo uma PG, de razão $q = \frac{1}{2}$

Portanto, o número total de partidas necessárias para definir o campeão é 127, e essa soma é dada pela expressão 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

A alternativa correta é **LETRA E**.

ATIVIDADE 5

Sabemos que o paciente ingeriu Ésio pela manhã e que a meia-vida de eliminação do medicamento é de 1 hora. Isso significa que, a cada hora, a quantidade de medicamento na corrente sanguínea é reduzida pela metade. Assim, passado 1 hora, restam 20 mg; passados 2 horas, restam 10 mg; passados 3 horas, restam 5 mg, e assim por diante.
Esse padrão de redução segue uma progressão geométrica (PG) em que o primeiro termo é 20 mg e a razão é $q = \frac{1}{2}$

Utilizando a fórmula do termo geral da PG, teremos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_6 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} \Rightarrow a_6 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \qquad a_6 = 20 \cdot \frac{1}{32} \Rightarrow \frac{20}{32} = 0,625$$

A quantidade de medicação que permanecerá na corrente sanguínea do paciente passados 6 horas será 0,625 mg. Portanto, a alternativa correta é **LETRA D**.

ATIVIDADE 6

A sequência fornecida é uma progressão geométrica (PG) finita, onde o primeiro termo $a_1 = 1$, a razão *q* = 2 e soma dos termos da PG, é 1 023.

Utilizando a fórmula para a soma dos primeiros *n* termos de uma PG finita, teremos:

$$1\,023 = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow 1023 = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{1} = 1\,023 = 2^n - 1$$

$$1023 + 1 = 2^n \Rightarrow 1024 = 2^n \Rightarrow 2^{10} = 2^n$$

Considerando que as bases são iguais, teremos: *n* = 10. Portanto, a quantidade de elementos da PG finita é 10.

ATIVIDADE 7

A situação descrita é uma progressão geométrica (PG) (8, 16, 32, ..., 512), onde a_1= 8 , a_n = 512 e a razão é 2. Queremos saber o valor de *n*, logo utilizaremos o termo geral da PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 512 = 8 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow \frac{512}{8} = 2^{n-1} \Rightarrow 64 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^6 = 2^{n-1}$$

Considerando que as bases são iguais, teremos: $n - 1 = 6 \Rightarrow n = 6 + 1 = 7$

Portanto, a alternativa correta é **LETRA C**.

ATIVIDADE 8

A questão descreve uma progressão geométrica (PG) infinita com razão $q = \frac{1}{2} = 0,5$ e primeiro termo $a_1 = 20$, onde o objetivo é calcular o total de fichas distribuídas ao visitante após um número infinito de giros.
Ao substituir os valores na fórmula da soma de uma PG infinita, obtemos:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{20}{1-0,5} \Rightarrow S = \frac{20}{0,5} = 40$$

Portanto, o valor total de fichas que o visitante receberá após um número infinito de giros é 40. A alternativa correta é a **LETRA D**.

ATIVIDADE 9

Para resolver essa questão, iremos utilizar a fórmula da soma dos *n* primeiros termos da PG, para calcular o valor de a_1
Sabemos que a PG, tem 10 termos, logo: *n* = 10, razão *q* = 2, e a soma a_n = 4 092.

$$s_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} \Rightarrow 4\,092 = \frac{a_1 \cdot (2^{10} - 1)}{2-1} \Rightarrow 4\,092 = \frac{a_1 \cdot (1\,024 - 1)}{1} \Rightarrow 4\,092 = a_1 {\cdot} 1\,023$$

$$\frac{4092}{1023} = a_1 \Leftrightarrow a_1 = 4$$

Portanto, o primeiro termo da progressão geométrica é 4. A resposta correta é **LETRA C.**

ATIVIDADE 10

a) Na 1ª geração: Uma fêmea do mosquito Aedes aegypti coloca 200 ovos. Metade dessas crias serão fêmeas, então, teremos: $N = \frac{200}{2} = 100$

Dessas 100 fêmeas, 30% nascerão infectadas com o vírus da dengue. Portanto, o número de fêmeas infectadas será: 30% de $100 = \frac{30}{100} \cdot 100 = 0,30 \cdot 100 = 30$

Então, o número de fêmeas infectadas na 2ª geração será 30.

b) Formando a PG, a partir de $a_1 = 1$, $a_2 = 30$, teremos a razão da PG, *q* = 30. Portanto, a sequência das quantidades de fêmeas infectadas nas 5 primeiras gerações é: (1, 30, 900, 27 000, 810 000).
c) Realizando a soma do números de fêmeas nas 5 primeiras gerações:

Soma: 1 + 30 + 900 + 27 000 + 810 000 = **837 931**

OU $S_5 = \frac{1 \cdot (30^5 - 1)}{30 - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{1 \cdot (24\,300\,000 - 1)}{29} \Rightarrow S_5 = \frac{24\,299\,999}{29} = 837\,931$

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto et al. **Prisma matemática: funções e progressões.** 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

______. **Matemática Completa 1º ano**. 4. ed. São Paulo: Editora FTD, 2016.

Chavante, Eduardo. **Quadrante matemática, 1º ano: ensino médio.** 1. ed. São Paulo : Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequências.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

______. **Matemática: contexto & aplicações. 3**. ed. São Paulo: Ática, 2016.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas.** 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson et al. **Conecte: matemática ciência e aplicações, 1.** 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva/ Manoel Paiva.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Referências

ATIVIDADES

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: grandezas, sequências e matemática financeira**. Matemática e suas tecnologias - Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: funções e progressões.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Função exponencial, função logarítmica e sequências.** Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

GOV.BR. **Ministério da Saúde - Dengue**. Atualização de Casos de Arboviroses. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 13/12/2024.

GOV.BR. Ministério da Educação - INEP. Provas e Gabaritos. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 27/12/2024.

SADEAM. SISTEMA DE AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO EDUCACIONAL DO AMAZONAS. **REVISTA PEDAGOGICA**. Ensino Médio: Matemática. 2013. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/am/colecoes/2013/SADEAM%20RP%20MT%20EM%20WEB.pdf>. Acessado em: 01/12/2024.

SLEIMAM, Karime Halmenschlager. **Bula do Ésio Comprimido**. Atualizado em: 7 de Dezembro de 2024 Disponível em: <https://consultaremedios.com.br/esio-comprimido/bula>. Acessado em: 16/12/2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Sequências e Trigonometria**. Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **Contato Matemática. Ensino Médio**. 1ª ano. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2016.

conexões matemáticas

QUINZENA
06
22/04 a 25/04

SEDU - 2025

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

LOGARITMO

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EM13MAT305 Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.	• Definir logaritmo como operação matemática que determina o expoente de uma potenciação a partir da base e da potência obtida. • Expressar a relação entre potenciação e logaritmo de números reais. • Resolver situações-problema em que é necessário o cálculo de um logaritmo ou o uso de propriedade(s) do logaritmo.	Não há descritor relacionado.

Contextualização

Imagine que você mora em uma cidade tranquila, mas um dia ouve no noticiário que, na noite anterior, houve um terremoto de magnitude 3,8 na **escala Richter** na sua região. Algumas pessoas comentam que sentiram uma leve vibração ou ouviram um som estranho, enquanto outras não perceberam absolutamente nada. Pouco depois, surge a notícia de que há possibilidade de ocorrer outro tremor, mas dessa vez de magnitude 7,6, o "dobro" do anterior.

O que você pensa sobre isso? Será que, se o primeiro foi quase imperceptível, o próximo terá apenas o dobro da força? Será que significa que todos na cidade sentirão um leve tremor ou estamos falando de algo muito mais grave? Na verdade, a escala Richter não funciona de maneira simples como dobrar ou triplicar valores. Ela é uma escala logarítmica, o que significa que cada aumento de uma unidade representa um salto exponencial na energia liberada pelo terremoto. Nesse caso, um tremor de magnitude 7,6 pode liberar milhões de vezes mais energia do que um de 3,8, o que torna suas consequências potencialmente devastadoras.

Antes de explorar como a matemática por trás disso funciona, vamos analisar um exemplo mais simples. Imagine que você, em uma aula prática de Biologia, está em um laboratório observando o crescimento de bactérias. Inicialmente, havia exatamente 1 000 bactérias em uma cultura, mas, após algumas horas, esse número aumentou para 1 000 000. Você pode perceber que o número final é muito maior, mas como podemos quantificar exatamente quantas vezes o número inicial cresceu?

Esse tipo de questão nos leva ao conceito de **logaritmo**, uma ferramenta matemática que nos ajuda a lidar com números que variam de forma exponencial. A ideia dos logaritmos é essencial não apenas para medir a intensidade de terremotos, mas também em outras áreas importantes, como:

- Potência sonora: O nível de som, medido em decibéis (dB), usa logaritmos para quantificar variações enormes em intensidades sonoras.
- pH de soluções químicas: O pH mede a acidez ou a basicidade de uma solução, representando uma variação logarítmica da concentração de íons hidrogênio.

Esses exemplos mostram que os logaritmos são fundamentais para compreender fenômenos complexos e interpretá-los de maneira prática. Agora, vamos formalizar esse conceito matematicamente.

Conceitos e Conteúdos

DEFINIÇÃO

Sejam $a, b \in R_+^*$, em que $a \neq 1$. Se $a^x = b$, o expoente x é chamado de **logaritmo de b na base a**.
Representamos essa relação como:

$$\log_a b = x \qquad \text{se, e somente se,} \qquad a^x = b$$

em que:

- x é o **logaritmo**;
- b é a **logaritmando**; e
- a é a **base**.

Observação: Logaritmos de base 10 podem ser representados sem a numeração da base, ou seja,

$$\log_{10} b = \log b$$

Exemplos

- Em $2^5 = 32$, 5 é o logaritmo de 32 na base 2, ou seja, $\log_2 32 = 5.$
- Em $3^4 = 81$, 4 é o logaritmo de 81 na base 3, ou seja, $\log_3 81 = 4.$
- Em $10^3 = 1000$, 3 é o logaritmo de 1000 na base 10, ou seja, $\log 1000 = 3.$
- Em $\pi^0 = 1$, 0 é o logaritmo de 1 na base π, ou seja, $\log_\pi 1 = 0.$
- Em $7^{-1} = \frac{1}{7}$, -1 é o logaritmo de $\frac{1}{7}$ na base 7, ou seja, $\log_7 \frac{1}{7} = -1.$

PROPRIEDADES DECORRENTES DA DEFINIÇÃO

1ª propriedade: *o logaritmo de 1 em qualquer base é igual a zero.*

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

Justificativa

$$\log_a 1 = x \Leftrightarrow a^x = 1 \Leftrightarrow a^x = a^0 \Leftrightarrow x = 0$$

Exemplos

- $\log_4 1 = 0$
- $\log_{\sqrt{2}} 1 = 0$

2ª Propriedade: *quando o logaritmando é igual à base, o logaritmo é 1.*

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Justificativa

$$\log_a a = x \Leftrightarrow a^x = a \Leftrightarrow x = 1$$

Exemplos

- $\log_{25} 25 = 1$
- $\log_\pi \pi = 1$

***3ª propriedade:** a potência de base a e exponente $\log_a b$ é igual a b*

$$a^{\log_a b} = b$$

Justificativa

Por definição, $\log_a b$ é igual ao expoente que quando aplicado a base a resulta em b. Portanto, $a^{\log_a b} = b$.

Exemplos

- $2^{\log_2 7} = 7$
- $\pi^{\log_\pi \sqrt{2}} = \sqrt{2}$

***4ª Propriedade:** logaritmos de mesma base são iguais se, e somente se, seus logaritmandos forem iguais.*

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Justificativa

$$\log_a b = \log_a c = x \begin{cases} a^x = b \\ a^x = c \end{cases} \Leftrightarrow b = c$$

Exemplos

- $\log_a b = \log_a 0,2 \Leftrightarrow b = 0,2$
- $\log x = \log \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DO LOGARITMO

Logaritmo do produto

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Exemplos

- $\log_2 (3 \cdot 5) = \log_2 3 + \log_2 5$
- $\log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3$

Logaritmo do quociente

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Exemplos

- $\log \frac{11}{2} = \log 11 - \log 2$
- $\log_7 0,3 = \log_7 \frac{3}{10} = \log_7 3 - \log_7 10$

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DO LOGARITMO

Logaritmo da potência

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

Exemplos

- $\log_\pi 5^3 = 3 \cdot \log_\pi 5$
- $\log \sqrt{3} = \log (3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 3$

Logaritmo com potência na base

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

Exemplos

- $\log_{5^3} \pi = \frac{1}{3} \cdot \log_5 \pi$
- $\log_{\sqrt{2}} 10 = \log_{(2)^{\frac{1}{2}}} 10 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 10 = 1 \cdot 2 \cdot \log_2 10 = 2 \cdot \log_2 10$

Mudança de base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

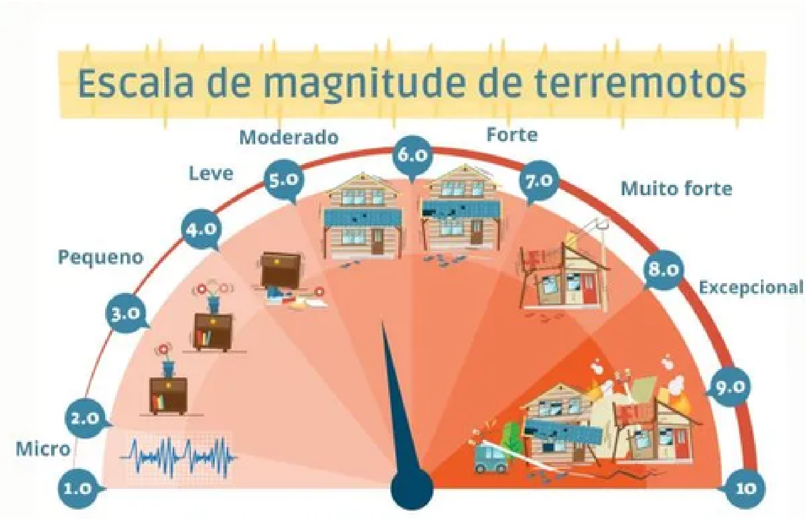
Exemplos

- $\log_2 3 = \frac{\log_4 3}{\log_4 2}$
- $\log 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 10}$

ESCALA RICHTER E LOGARITMO

A escala Richter é amplamente utilizada por sismólogos para medir e comunicar a magnitude de terremotos. Essa magnitude é calculada com base na razão entre a intensidade do terremoto, representada por I, e uma intensidade de referência, I_0, correspondente ao menor movimento sísmico detectável por um sismógrafo. Como os valores podem variar de milhares a até bilhões de vezes o valor de referência, utiliza-se o logaritmo da razão para simplificar a leitura e a interpretação dos dados. Os valores da escala Richter são frequentemente arredondados ao décimo ou centésimo mais próximo, garantindo uma apresentação mais prática e precisa. A fórmula que define a escala Richter é:

$$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$



Fonte: Brasil Escola

Exemplo

Um terremoto 9 na escala richter equivale a um tremor 1 000 000 000 (um bilhão) de vezes maior que a escala de referência, pois:

$$\log\left(\frac{1\,000\,000\,000 \cdot \cancel{I_0}}{\cancel{I_0}}\right) = \log 1\,000\,000\,000 = \log 10^9 = 9 \cdot \cancelto{1}{\log 10} = 9$$

Exercícios Resolvidos

Exercício 1

Utilizando as propriedades dos logaritmos, resolva:

a) $\log_2 16$

b) $9 \cdot \log_5 \sqrt[3]{5}$

c) $\log_4 8$

d) $\log_{100} 10\,000$

e) $\log_{\frac{1}{\pi}} \pi$

Resolução

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \cancel{\log_2 2}^{1} = 4 \cdot 1 = 4$

b) $9 \cdot \log_5 \sqrt[3]{5} = 9 \cdot \log_5 (5)^{\frac{1}{3}} = 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_5 5 = 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \cancel{\log_5 5}^{1} = 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}^{1}} = 3$

c) $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3 \cdot \cancel{\log_2 2}^{1}}{2 \cdot \cancel{\log_2 2}^{1}} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$

d) $\log_{100} 10\,000 = \log_{10^2} 10^4 = \frac{4}{2} \cdot \cancel{\log_{10} 10}^{1} = \frac{4}{2} = 2$

e) $\log_{\frac{1}{\pi}} \pi = \log_{\pi^{-1}} \pi = \log_{\pi^{-1}} \pi = \frac{1}{-1} \cdot \cancel{\log_\pi \pi}^{1} = \frac{1}{-1} = -1$

Exercício 2

Calcule os logaritmos sabendo que $\log 2 \approx 0,301$; $\log 3 \approx 0,477$; $\log 5 \approx 0,699$ **e** $\log 7 \approx 0,845$

a) $\log 105$

b) $\log 108$

c) $\log \sqrt[3]{72}$

d) $\log 2,4$

Resolução:

a) $$\begin{aligned}\log 105 &= \log(3 \cdot 5 \cdot 7) = \log 3 + \log 5 + \log 7 \\ &= 0,477 + 0,699 + 0,845 = 2,021\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}\log 108 &= \log\left(2^2 \cdot 3^3\right) = \log 2^2 + \log 3^3 = 2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3 \\ &= 2 \cdot 0,301 + 3 \cdot 0,477 = 0,602 + 1,431 = 2,033\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\log \sqrt[3]{72} &= \log \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2} = \log\left(2 \cdot \sqrt[3]{3^2}\right) = \log 2 + \log \sqrt[3]{3^2} = \log 2 + \log 3^{\frac{2}{3}} \\ &= \log 2 + \frac{2}{3} \cdot \log 3 = 0,301 + \frac{2}{3} \cdot 0,477 = 0,301 + 0,318 = 0,619\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\log 2,4 &= \log \frac{24}{10} = \log 24 - \cancelto{1}{\log 10} = \log\left(2^3 \cdot 3\right) - 1 = \log 2^3 + \log 3 - 1 \\ &= 3 \cdot \log 2 + \log 3 - 1 = 3 \cdot 0,301 + 0,477 - 1 = 0,903 + 0,477 - 1 = 0,38\end{aligned}$$

Exercício 3

Se a intensidade de um terremoto foi determinada como sendo 100 000 vezes a intensidade de referência, qual é a leitura na escala Richter?

Resolução

Sabendo que $I = 100\,000 \cdot I_0$, temos:

$$M = log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$M = log\left(\frac{100\,000.I_0}{I_0}\right)$$

$$M = log\left(\frac{100\,000.\cancel{I_0}}{\cancel{I_0}}\right)$$

$$M = log(10^5)$$

$$ou$$

$$log\ 10^5 = \text{M}$$

$$10^M = 10^5$$

$$\therefore$$

$$M = 5$$

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 2: Função logaritmica.

- Logaritmo. (p. 70 - 82)

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 3: função logaritmica.

- Introdução. (p. 86 - 98).

ESCALA RICHTER

Ampliando as discussões sobre ESCALA RICHER

Prezada professora, prezado professor,

Na sala de estudo do site da OBMEP você encontra o texto “Logaritmos x terremos”. O material possibilita ampliar a discussão que apresentamos no material e, até mesmo, pensar numa proposta de trabalho interdisciplinar. Nessa página, há um vídeo bem didático que aborda como funciona a escala Richter e que pode ser utilizado em sala de aula num momento oportuno de estudo desta semana ou das próximas, quando continuaremos abordando sobre logaritmo.

Atividades

ATIVIDADE 1

O logaritmo é uma operação matemática inversa à exponenciação. Em termos simples, ele responde à pergunta: "A que potência devemos elevar um número (chamado de base) para obter um determinado valor?”

A expressão de um logaritmo é geralmente escrita da seguinte forma: $log_a b = c$, onde *a* e *b* são números reais, com *a* > 0, *a* ≠ 1, e *b* > 0. Assim, quando dizemos que o logaritmo de *b* na base *a* é igual ao número real *c*, podemos representar da forma:

$a)\ a = b^c$

$b)\ b = a^c$

$c)\ c = b^a$

$d)\ b = c^a$

$e)\ c = a^b$

ATIVIDADE 2

Em cada caso a seguir, calcule o valor da potência e depois escreva o logaritmo correspondente. Por exemplo: $3^4 = 81$, então $log_3 81 = 4$.

$a)\ 2^3$

$b)\ 7^2$

$c)\ 10^3$

$d)\ 3^{-1}$

$e)\ 7^{\frac{1}{2}}$

$f)\ 5^{-2}$

ATIVIDADE 3

Usando a definição, calcule o valor de cada logaritmo.

$a)\ log_2 16 =$

$b)\ log_3 27 =$

$c)\ log_5 125 =$

$d)\ log_{10} 1\,000 = log\, 1\,000 =$

$e)\ log\, 10\,000 =$

$f)\ log_7 1 =$

$g)\ log_8 8 =$

$h)\ log_2 \left(\frac{1}{8}\right) =$

$i)\ log_{10} 0,01 =$

$j)\ log_{\frac{1}{2}} 32 =$

ATIVIDADE 4

Utilizando as definições de logaritmos, determine em cada caso o valor de A.

$a)\, A = log_6 36 + log_4 4$

$b)\; A = lo_3 81 - log_2 1 + log\, 100$

ATIVIDADE 5

Utilizando as consequências da definição de logaritmos, determine em cada caso os valores desconhecidos de *x*.

$a)\; log_3\ x = 4$

$b)\; log_x\ 9 = 2$

$c)\; log_8\ x = log_8\ \left(\frac{2}{3}\right)$

$d)\;\; 3^{\,log_3 2} = x$

ATIVIDADE 6

Calcule os logaritmos a seguir considerando $log\, 2 \approx 0,30,\;\; log\, 3 \approx 0,48\;\; e\;\; log\, 5 \approx 0,70$

$a)\; log\ 15 =$

$b)\; log\ 6 =$

$c)\; log\ 32 =$

$d)\; log\ \left(\frac{2}{3}\right) =$

$e)\; log\ 1,5 =$

$f)\; log\ 30 =$

ATIVIDADE 7

Utilizando as propriedades operatórias dos logaritmos, determine o valor da expressão A, em cada caso.

$a)\ A = log\,5 + log\,200$

$b)\ A = log_2\,100 - log_2\,25$

$c)\ A = log\,30 + log\,7 - log\,21$

$d)\ A = log_2\,(0,5)^6 - log\,100^{-4}$

ATIVIDADE 8

Considere que $log\,2 \approx 0,30,\ log\,3 \approx 0,48\ \ e\ \ log\,5 \approx 0,70$, com aproximação de duas casas decimais e usando a propriedade de mudança de base, determine em cada caso o valor do expoente *x*.

$a)\ 2^x = 3$

$b)\ 100^x = 3$

$c)\ 2^x = 5$

$d)\ 5^x = 27$

ATIVIDADE 9

O pH do sangue dos seres humanos, em condições normais, é 7,4 (levemente básico). Algumas alterações, como certas doenças, podem modificar esse valor. Pode-se calcular o pH do sangue pela equação de Henderson-Hasselbalch, dada por:

$$pH = 6,1 + log\left(\frac{B}{C}\right)$$

em que *B* representa a concentração de bicarbonato, a substância básica (ou alcalina), em mmol/l, e *C* representa a concentração de ácido carbônico, a substância ácida, em mmol/l. Calculando o pH do sangue de uma pessoa cuja concentração de bicarbonato é de 25 mmol/l e de ácido carbônico é 2 mmol/l, obtemos:

Dados: $log\, 2 \approx 0,30 \; e \; log\, 5 \approx 0,70$ (mmol/l significa milimol por litro.)

a) 6,5 mmol/l
b) 7,1 mmol/l
c) 7,2 mmol/l
d) 7,8 mmol/l
e) 18,6 mmol/l

ATIVIDADE 10

Uma instituição financeira cobra juros de 10% ao mês sobre o saldo devedor do cartão de crédito, caso a fatura não seja paga até a data de vencimento. Um cliente que deixou de pagar seu boleto, no valor de R$ 400,00, em um determinado mês, só conseguiu quitar a dívida meses depois, pagando R$ 640,00. Sabendo que a expressão $M = 400 \cdot (1,1)^t$ relaciona o montante *M* (valor total acumulado) com o tempo *t* de atraso, em meses, o tempo necessário para que a dívida atinja R$ 640,00, caso não seja paga, será de: (Considere: $log\, 2 \approx 0,30;\; log\, 1,6 \approx 0,20 \; e \; log\, 1,1 \approx 0,04$).

a) 2 meses
b) 3 meses
c) 4 meses
d) 5 meses
e) 6 meses

Gabarito

ATIVIDADE 01: B
ATIVIDADE 09: C
ATIVIDADE 10: D

RESOLUÇÃO PARA O(A) PROFESSOR(A)

ATIVIDADE 1

A expressão completa de um logaritmo é geralmente escrita da seguinte forma:

$$log_a b = c$$

Onde: *a* é a base do logaritmo (um número real maior que 0 e diferente de 1); *b* é o argumento do logaritmo (um número real positivo); *c* é o resultado ou valor do logaritmo (um número real que responde à pergunta "A que potência devemos elevar *a* para obter *b*?").
Portanto, dizemos que o logaritmo de *b* na base *a* é igual a *c*, o que significa que: $a^c = b$, ou seja, *c* é a potência à qual a base *a* deve ser elevada para resultar em *b*. Resposta correta **LETRA B.**

ATIVIDADE 2

Para cada item, apresentaremos o resultado de cada potência, juntamente com a representação do logaritmo correspondente a cada termo.

$a)\ 2^3 = 8 \ \therefore \ log_2 8 = 3$

$b)\ 7^2 = 49 \ \therefore \ log_7 49 = 2$

$c)\ 10^3 = 1\,000 \ \therefore \ log_{10} 1\,000 = 3$

$d)\ 3^{-1} = \frac{1}{3} \ \therefore \ log_3 \left(\frac{1}{3}\right) = -1$

$e)\ 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{7} = \sqrt{7} \ \therefore \ log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$

$f)\ 5^{-2} = \frac{1}{25} \ \therefore \ log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = -2$

ATIVIDADE 3

Utilizando a definição de logaritmos, teremos:

$a)\ log_2 16 = 4$

$b)\ log_3 27 = 3$

$c)\ log_5 125 = 3$

$d)\ log_{10} 1\,000 = log\, 1000 = 3$

$e)\ log\, 10\,000 = 4$

$f)\ log_7 1 = 0$

$g)\ log_8 8 = 1$

$h)\ log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$

$i)\ log_{10} 0,01 = -2$

$j)\ log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$

ATIVIDADE 4

Utilizando a definição de logaritmos, temos que o valor de A é:

$a)\ A = log_6 36 + log_4 4 \Rightarrow 2 + 1 = 3$

$b)\ A = log_3 81 - log_2 1 + log\, 100 \Rightarrow 4 - 0 + 2 = 6$

ATIVIDADE 5

Utilizando a definição e as consequências da definição de logaritmo, teremos em cada caso:

$a)\ log_3 x = 4,\ logo:\ 3^4 = x \Leftrightarrow x = 81$

$b)\ log_x 9 = 2,\ logo:\ x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \sqrt{9} = 3$ Lembre-se que pela definição de logaritmo, neste caso, x > 0 e x ≠ 1, portanto x = 3.

$c)\ log_8 x = log_8 \left(\frac{2}{3}\right),\ logo:\ x = \frac{2}{3}$ Pois, pela propriedade: $log_a b = log_a c \Leftrightarrow b = c$

$d)\ 3^{log_3 2} = x,\ logo: x = 2$ Pois, pela propriedade: $a^{log_a b} = b$

ATIVIDADE 6

Utilizando as propriedades de logaritmos e considerando os valores de $log\, 2 \approx 0,30$, $log\, 3 \approx 0,48\ e\ log\, 5 \approx 0,70$, teremos em cada caso:

$a)\ log\, 15 \Rightarrow log(3 \cdot 5) = log\, 3 + log\, 5 = 0,48 + 0,70 = 1,18$

$b)\ log\, 6 \Rightarrow log(2 \cdot 3) = log\, 2 + log\, 3 = 0,30 + 0,48 = 0,78$

$c)\ log\, 32 \Rightarrow log\, 2^5 = 5 \cdot log\, 2 = 5 \cdot 0,30 = 1,5$

$d)\ log \left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow log\, 2 - log\, 3 = 0,30 - 0,48 = -0,18$

$e)\ log\, 1,5 \Rightarrow log \left(\frac{15}{10}\right) = log\, 15 - log\, 10 = 1,18 - 1 = 0,18$

$f)\ log\, 30 \Rightarrow log(2 \cdot 3 \cdot 5) = log\, 2 + log\, 3 + log\, 5 = 0,30 + 0,48 + 0,70 = 1,48$

ATIVIDADE 7

Utilizaremos as propriedades operatórias de logaritmos para resolver as questões:

a) Logaritmo de um produto: $A = log\, 5 + log\, 200 \Rightarrow A = log(5 \cdot 200) \Rightarrow A = log\, 1\,000 = 3$

b) Logaritmo de um quociente: $A = log_2 100 - log_2 25 \Rightarrow A = log_2 \left(\frac{100}{25}\right) \Rightarrow A = log_2 4 = 2$

c) Logaritmo de um produto e de um quociente:

$A = log\, 30 + log\, 7 - log\, 21 \Rightarrow A = log(30 \cdot 7) - log\, 21 \Rightarrow A = log \left(\frac{30 \cdot 7}{21}\right) \Rightarrow A = log \left(\frac{210}{21}\right) \Rightarrow A = log\, 10 = 1$

d) Logaritmo de uma potência: $A = log_2 (0,5)^6 - log\, 100^{-4} \Rightarrow A = 6 \cdot log_2 (0,5) - (-4) \cdot log\, 100$

$A = 6 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \Rightarrow A = -6 + 8 = 2$

ATIVIDADE 8

Considerando a definição de logaritmo, a propriedade de mudança de base, as aproximações com duas casas decimais e os valores $log\,2 \approx 0,30,\ log\,3 \approx 0,48$ e $log\,5 \approx 0,70$, teremos os seguintes resultados em cada item:

$$a)\ 2^x = 3\ \ logo: log_2 3 = x \Leftrightarrow x = \frac{log\,3}{log\,2} = \frac{0,48}{0,30} \approx 1,6$$

$$b)\ 100^x = 3\ \ logo: log_{100} 3 = x \Leftrightarrow x = \frac{log\,3}{log\,100} = \frac{0,48}{2} \approx 0,24$$

$$c)\ 2^x = 5\ \ logo: log_2 5 = x \Leftrightarrow x = \frac{log\,5}{log\,2} = \frac{0,70}{0,30} \approx 2,33$$

$$d)\ 5^x = 27\ logo: log_5 27 = x \Leftrightarrow x = \frac{log\,27}{log\,5} = \frac{log\,3^3}{log\,5} = \frac{3\cdot log\,3}{log\,5} = \frac{3\cdot 0,48}{0,70} = \frac{1,44}{0,70} \approx 2,06$$

ATIVIDADE 9

Para calcular o pH do sangue, substituímos os valores conhecidos para *B* e *C* na expressão Henderson-Hasselbalch:

$$pH = 6,1 + log\left(\frac{B}{C}\right)$$

Onde: B = 25 mmol/l; C = 2 mmol/l

$$pH = 6,1 + log\left(\frac{25}{2}\right)$$

Agora, calculamos $log\left(\frac{25}{2}\right)$. Utilizando as propriedades teremos:

$$log\left(\frac{25}{2}\right) \Rightarrow log\,25 - log\,2 \Rightarrow log 5^2 - log\,2$$

$$2\cdot log\,5 - log\,2 \Rightarrow 2\cdot 0,70 - 0,30 \Rightarrow 1,40 - 0,30 = 1,1$$

$$pH = 6,1 + 1,1$$

$$pH = 7,2\,mmol/l$$

Portanto, o pH do sangue da pessoa é 7,2 mmol/l. Resposta correta é a **LETRA C.**

ATIVIDADE 10

Sabemos que *M* = 640, então substituímos esse valor na equação com o objetivo de determinar o valor de *t* (meses).

$$M = 400\cdot(1,1)^t \Rightarrow 640 = 400\cdot(1,1)^t \Rightarrow \frac{640}{400} = (1,1)^t \Rightarrow 1,6 = (1,1)^t$$

Agora, sabemos que $1,6 = (1,1)^t$ equivale a $log_{1,1} 1,6 = t\ \therefore\ t = log_{1,1} 1,6$.

Ao realizar a mudança de base para a base 10 e considerando que $log\,1,6 \approx 0,20\ e\ log\,1,1 \approx 0,04$, obtemos:

$$t = log_{1,1} 1,6 \Rightarrow t = \frac{log\,1,6}{log\,1,1} = \frac{0,20}{0,04} = 5$$

Portanto, o tempo necessário para que a dívida atinja R$ 640,00 é de 5 meses.
A resposta correta é **LETRA D**.

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto et al. **Prisma matemática: funções e progressões.** 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

______. **Matemática Completa 1º ano**. 4. ed. São Paulo: Editora FTD, 2016.

Chavante, Eduardo. **Quadrante matemática, 1º ano: ensino médio.** 1. ed. São Paulo : Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequências.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

______. **Matemática: contexto & aplicações. 3**. ed. São Paulo: Ática, 2016.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos.** 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson et al. **Conecte: matemática ciência e aplicações, 1.** 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva/ Manoel Paiva.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

Referências

ATIVIDADES

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.** Matemática e suas tecnologias - ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: funções e progressões**. ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: Função exponencial, função logarítmica e sequências**. Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. 1ªed. São Paulo: ática, 2020.

LEONARDO, Fabio Martins. **Conexões com a matemática. Ensino Médio**. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2016.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Funções e suas aplicaçõe**s. Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **Contato Matemática**. Ensino Médio. 1ª ano. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2016.