GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL | GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

Trigonometria: semelhança e relações métricas.

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.	• Reconhecer relações de semelhança entre triângulos, usando critérios como a congruência de ângulos correspondentes nos dois triângulos ou a proporcionalidade entre medidas de lados correspondentes. • Deduzir experimentalmente as relações métricas no triângulo retângulo (inclusive o Teorema de Pitágoras) a partir de relações de semelhança de triângulos. • Utilizar as relações métricas no triângulo retângulo (inclusive o Teorema de Pitágoras) na resolução de problemas.	• **D049_M** Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas. • **D051_M** Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

Caro(a) Professor(a),

Informamos que, a partir da Quinzena 14, o Material Estruturado incluirá todo o conteúdo relativo a esta quinzena, de modo a não haver mais duas capas e sintetizar o conteúdo em um único volume. Esperamos, assim, que essa mudança facilite o seu trabalho, planejamento e sua organização em sala de aula.

Contextualização

A Matemática não é apenas uma ferramenta abstrata; ela está presente em tudo ao nosso redor. A semelhança entre figuras geométricas, especialmente triângulos, nos permite compreender desde pequenas construções até os grandes fenômenos do universo. E entre essas aplicações, uma das mais importantes é a dedução do Teorema de Pitágoras.

Você provavelmente já estudou o famoso Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, mas já se perguntou por que ele funciona? Será que o teorema é apenas uma regra que aceitamos sem questionar, ou podemos prová-lo de maneira lógica e intuitiva?

Neste material, vamos explorar como a semelhança de triângulos não apenas explica o Teorema de Pitágoras, mas também fundamenta diversas relações métricas dentro do triângulo retângulo. Você verá que a Matemática não precisa ser decorada – ela pode ser descoberta e compreendida de forma natural e experimental.

Agora, antes de seguir adiante, pense: se a Matemática pode prever a altura de um prédio sem medições diretas, o que mais ela pode nos revelar?

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

SEMELHANÇA ENTRE POLÍGONOS

Definição

Dois polígonos são ditos semelhantes se, e somente se:

1. Possuem ângulos ordenadamente congruentes; e
2. Os lados correspondentes são proporcionais.

Utilizamos o símbolo "$\sim$" para denotar semelhança entre polígonos.

Por exemplo, considerando os triângulos abaixo:

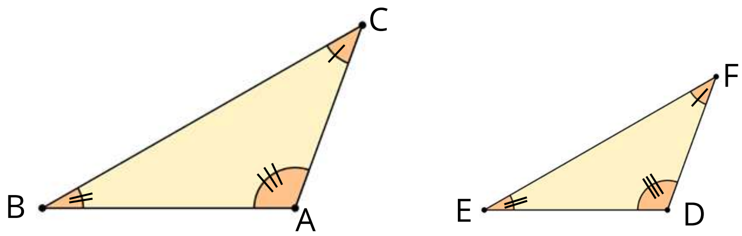


Figura 1: Dois triângulos semelhantes.

Podemos expressar a semelhança entre eles da seguinte forma:

$$ABC \sim DEF \iff \begin{cases} \widehat{A} \equiv \widehat{D} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{E} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{F} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \end{cases}$$

Essa relação indica que os ângulos correspondentes possuem medidas iguais, e os lados correspondentes são proporcionais, garantindo a semelhança entre estes polígonos.

SEMELHANÇA ENTRE TRIÂNGULOS

Apesar de dois polígonos serem semelhantes apenas quando possuem ângulos correspondentes congruentes e lados homólogos proporcionais, os triângulos constituem um caso especial. É possível estabelecer critérios mínimos que garantem sua semelhança sem a necessidade de verificar todas essas condições simultaneamente. Esses critérios, conhecidos como **casos de semelhança de triângulos**, podem ser demonstrados matematicamente. A seguir, apresentamos três desses casos.

Caso AA (ângulo, ângulo)

Se dois triângulos possuem dois ângulos internos ordenadamente congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Exemplo

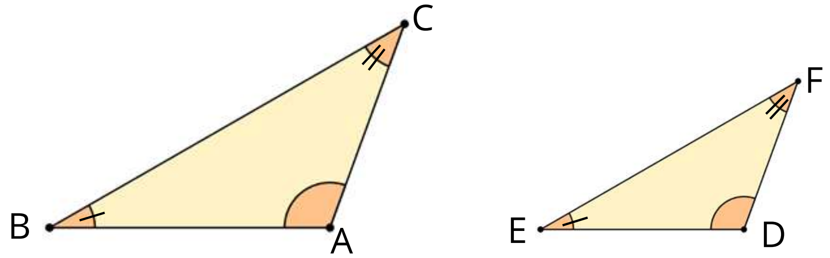


Figura 2: Dois triângulos semelhantes segundo o critério AA.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{C} \equiv \widehat{F} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{E}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

VOCÊ SABIA?

Um exemplo de aplicação prática da semelhança de triângulos é a **paralaxe estelar**. Esse é um método utilizado por astrônomos para medir a distância de estrelas próximas com base no deslocamento aparente da estrela em relação ao fundo estelar quando observada de diferentes pontos da órbita da Terra.

Caso LAL (lado, ângulo, lado)

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

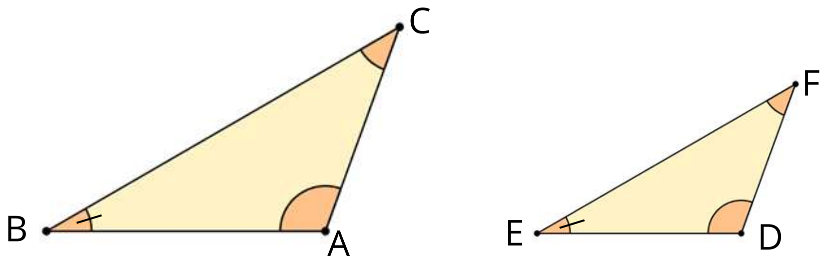


Figura 3: Dois triângulos semelhantes segundo o critério LAL.

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{B} \equiv \widehat{E} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Caso LLL (lado, lado, lado)

Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

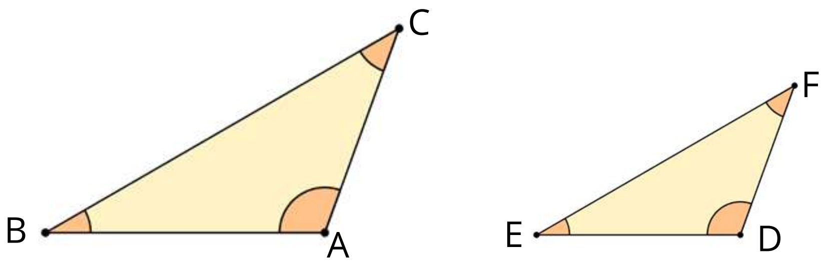


Figura 4: Dois triângulos semelhantes segundo o critério LAL.

$$\left.\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

VOCÊ SABIA?

Topógrafos usam a semelhança de triângulos para calcular a altura de edifícios, torres e montanhas sem precisar medi-los diretamente. Um método comum envolve a projeção de sombras e ângulos de visão.

ELEMENTOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Consideremos um triângulo ABC, retângulo em A, e tracemos a altura AD perpendicular a BC, com D pertencente a BC.

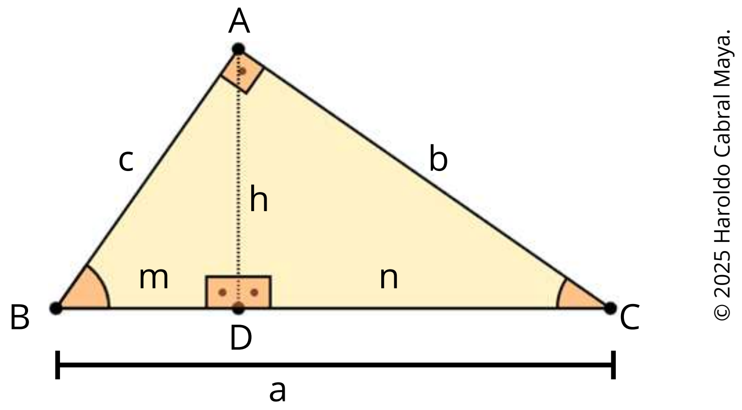


Figura 5: Triângulo retângulo com cota de altura perpendicular ao lado oposto ao ângulo reto.

Definimos os seguintes elementos:

$a = \overline{BC}$: *hipotenusa*

$b = \overline{AC}$: *cateto*

$c = \overline{AB}$: *cateto*

$m = \overline{BD}$: *projeção do cateto c sobre a hipotenusa*

$n = \overline{CD}$: *projeção do cateto b sobre a hipotenusa*

$h = \overline{AD}$: *altura relativa à hipotenusa*

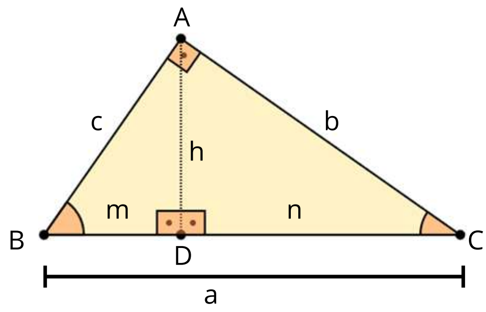
A altura AD divide o triângulo original em dois triângulos retângulos menores, ambos semelhantes ao triângulo $\triangle$ABC e entre si (veja na figura 5). Isso ocorre porque os três triângulos possuem os mesmos ângulos internos, garantindo a semelhança pelo critério AA.

Assim, temos a seguinte relação:

$$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC}$$

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Podemos explorar a proporcionalidade entre polígonos semelhantes para obter algumas das relações métricas notáveis do triângulo retângulo da figura ao lado. Vejamos:



$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Longrightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c \\ \frac{b}{c} = \frac{h}{m} \Rightarrow b \cdot m = c \cdot h \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Longrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n \\ \frac{b}{c} = \frac{n}{h} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot n \end{cases}$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Longrightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

VOCÊ SABIA? O funcionamento das lentes em câmeras e telescópios utiliza a semelhança de triângulos para calcular a ampliação da imagem e a posição do foco.

DEDUÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Somando as expressões obtidas para os quadrados dos catetos, $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$:

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$$

Como $m + n = a$, substituímos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot \left(\underbrace{m+n}_{a} \right) \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Portanto, concluímos que, em qualquer **triângulo retângulo**:

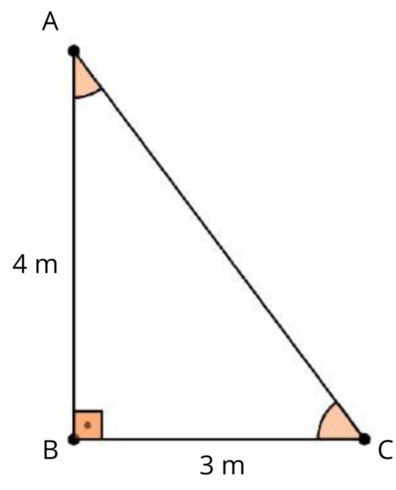
$$\boxed{\text{Hipotenusa}^2 = (\text{Cateto } 1)^2 + (\text{Cateto } 2)^2}$$

Exemplo

Deseja-se subir em um muro com 4 metros de altura. Para isso, apoia-se uma escada a 3 metros de distância desse muro, de modo que ela não ultrapasse a altura desse muro. Determine o comprimento da escada utilizada.

Solução

Podemos representar este exemplo por um modelo matemático (triângulo ABC, retângulo em B), onde queremos determinar a sua hipotenusa, ou seja, o lado do triângulo oposto ao ângulo reto.



Chamemos o lado AB, com 4 m, de Cateto 1, e o lado BC, com 3 m, de Cateto 2.
Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\text{Hipotenusa}^2 = (\text{Cateto } 1)^2 + (\text{Cateto } 2)^2$$

$$\text{Hipotenusa}^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

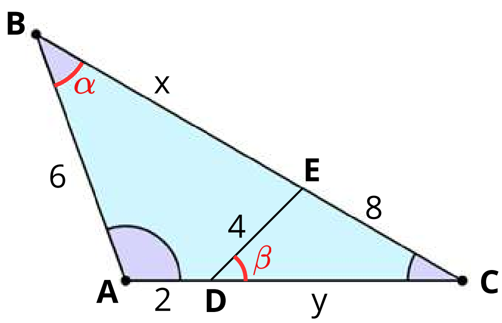
$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{25} = 5$$

Desse modo, conclui-se que a escada possui 5 m de comprimento.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Se $\alpha = \beta$, determine x e y:



Pelo caso AA, vê-se que os triângulos ABC e CED são semelhantes, uma vez que:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv \beta \\ A\hat{C}B \equiv D\hat{C}E \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC}$$

Utilizando a relação dos lados de triângulos semelhantes, obtêm-se:

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{y+2}{8} = \frac{x+8}{y}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{y+2}{8} \Rightarrow 4 \cdot (y+2) = 6 \cdot 8 \Rightarrow y + 2 = \frac{6 \cdot \cancel{8}^{2}}{\cancel{4}^{1}} \Rightarrow$$

$$y = 12 - 2 = 10$$

Ainda pela relação dos lados de triângulos semelhantes, tem-se:

$$\frac{6}{4} = \frac{x+8}{y} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{x+8}{10} \Rightarrow x+8 = \frac{\cancel{10}^{5} \cdot \cancel{6}^{3}}{\cancel{4}^{1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 5 \cdot 3 - 8 = 15 - 8 = 7}$$

Assim, conclui-se que $x = 7$ e $y = 10$.

EXERCÍCIO 2

Um engenheiro deseja determinar a altura de um prédio sem precisar escalá-lo. Para isso, ele utiliza um poste de 2 metros de altura e mede sua sombra, que tem 3 metros de comprimento. No mesmo momento, ele mede a sombra do prédio e encontra 15 metros.

Sabendo que o Sol projeta sombras de maneira semelhante para ambos os objetos, determine a altura do prédio

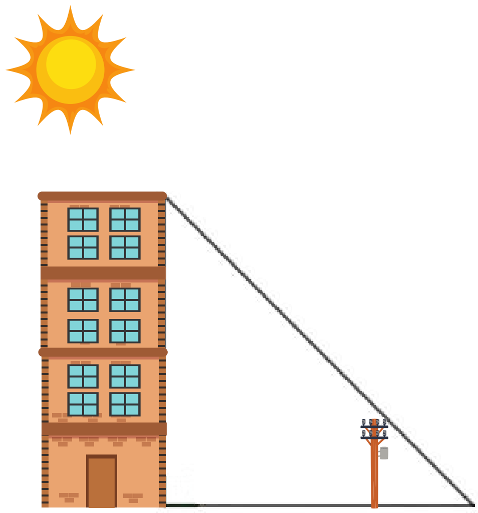
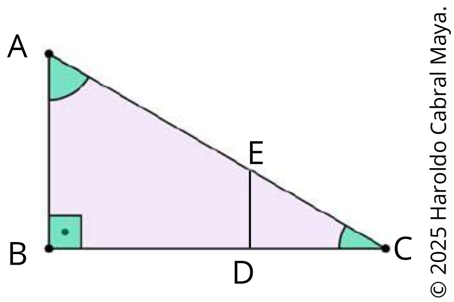


Imagem produzida no canva

Pelo caso AA, vê-se que os triângulos ABC e EDC são semelhantes, uma vez que:



$$\left.\begin{aligned} A\widehat{C}B \equiv E\widehat{C}D \\ A\widehat{B}C \equiv E\widehat{D}C \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC}$$

Assim, podemos dizer que:

$$\frac{altura\ do\ prédio}{altura\ do\ poste} = \frac{sombra\ do\ prédio}{sombra\ do\ poste}$$

Substituindo os valores, temos:

$$\frac{h}{2} = \frac{15}{3}$$

Considerando a propriedade fundamental das proporções, a multiplicação de 2 e 15 equivale a multiplicação de 3 e h. Logo:

$$3 \cdot h = 2 \cdot 15$$

$$3 \cdot h = 30$$

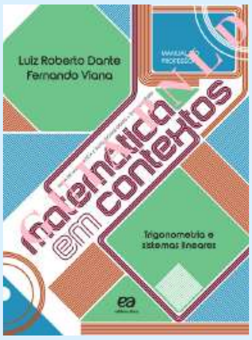
$$\frac{3 \cdot h}{3} = \frac{30}{3}$$

$$h = 10$$

Assim, concluímos que altura do prédio é igual a 10 metros.

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em contexto: geometria plana e geometria espacial. (DANTE)

Capítulo 1: Trigonometria.

- Trigonometria no triângulo. (p. 17 - 19).

Prisma matemática: geometria e trigonometria. (BONJORNO)

Capítulo 1: proporcionalidade e semelhança.

- Polígonos semelhantes. (p. 29).
- Semelhança de triângulos. (p. 38- 41)
- Relações métricas no triângulo retângulo. (p. 44 - 48).

Atividades

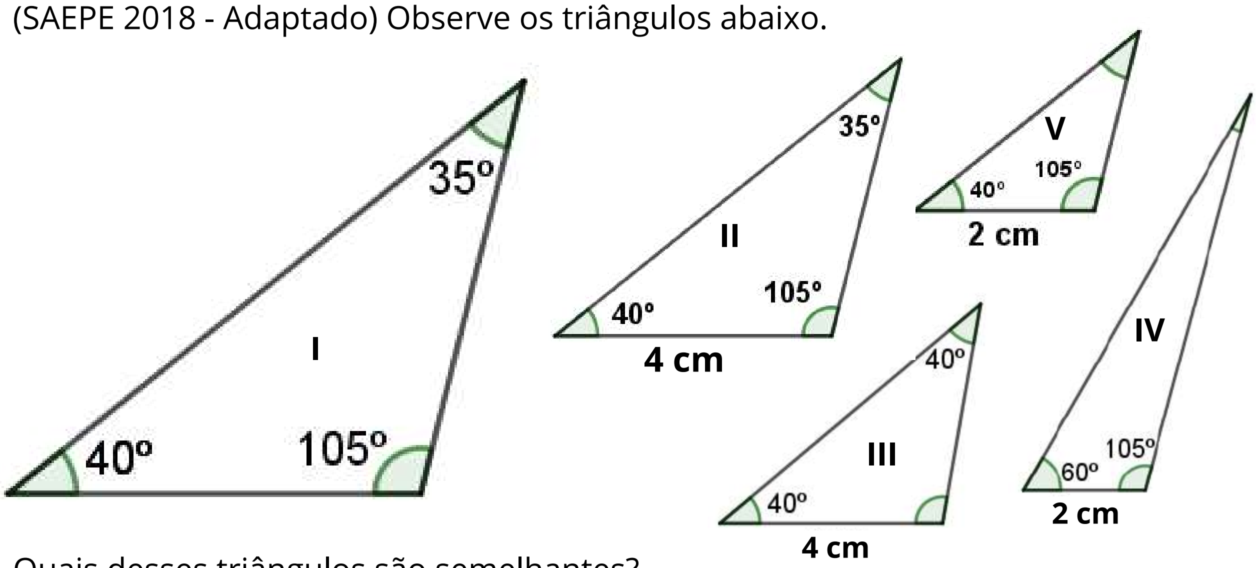
ATIVIDADE 1

Em relação à semelhança de triângulos, assinale a alternativa correta:

A) Triângulos com ângulos correspondentes de medidas iguais são sempre congruentes.
B) A semelhança de triângulos pode ser estabelecida apenas pela comparação de dois lados.
C) Dois triângulos são semelhantes se os comprimentos de seus lados são iguais, independente dos seus ângulos correspondentes serem congruentes.
D) Dois triângulos são semelhantes se têm lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes de medidas iguais.
E) A semelhança de triângulos não pode ser determinada por meio da razão entre os lados.

ATIVIDADE 2

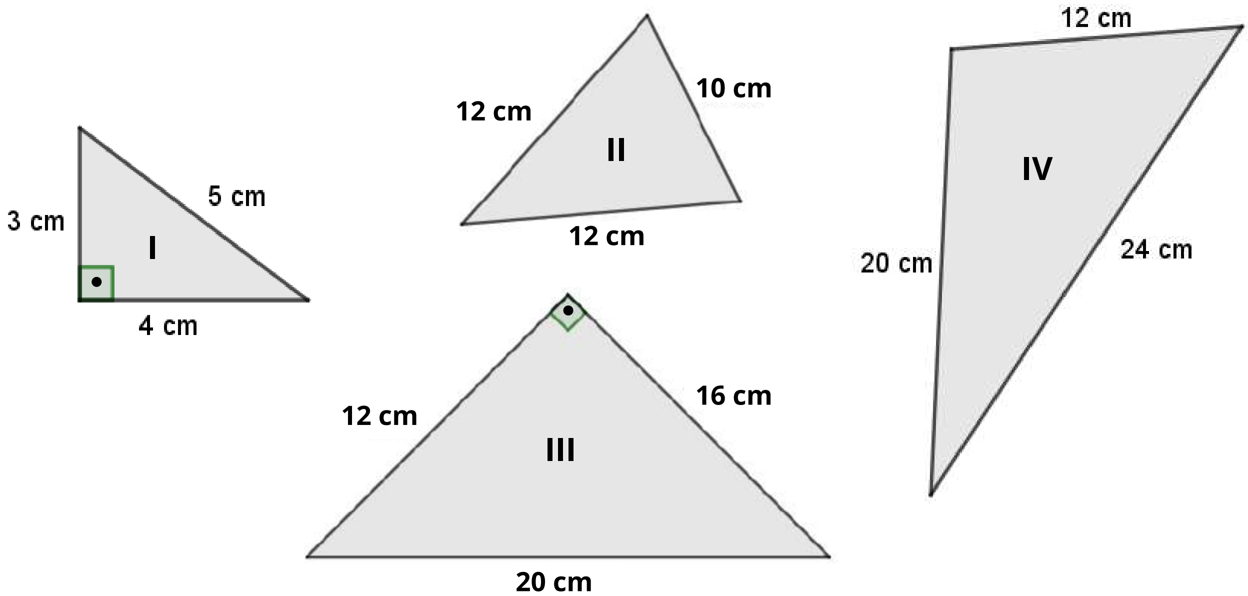
(SAEPE 2018 - Adaptado) Observe os triângulos abaixo.



Quais desses triângulos são semelhantes?
A) I, II, e III.
B) I, II e V.
C) I e III.
D) II e III.
E) IV e V.

ATIVIDADE 3

(SAEPE - 2019) No desenho abaixo estão representados os triângulos I, II, III e IV e suas medidas em centímetros.



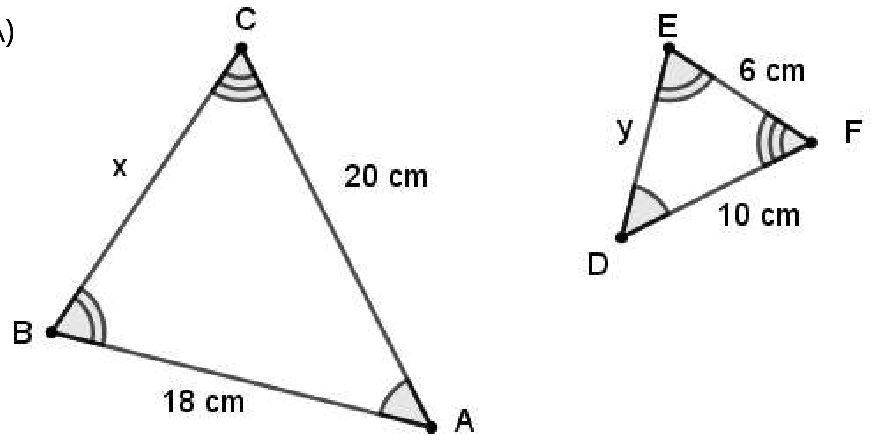
O par de triângulos semelhantes nesse desenho é:

A) I e II.
B) I e III.
C) I e IV.
D) II e IV.
E) III e IV.

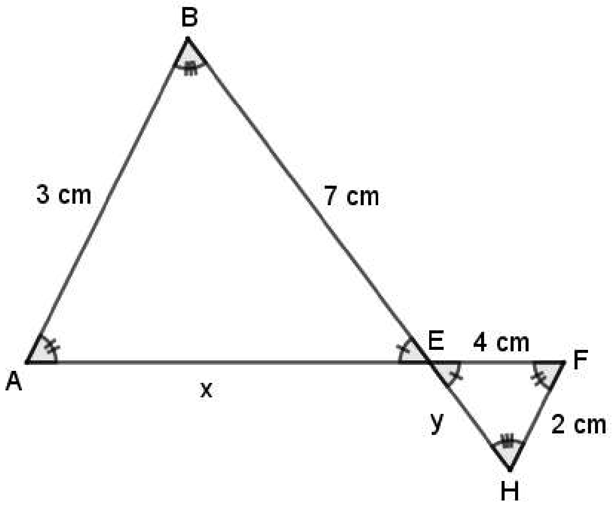
ATIVIDADE 4

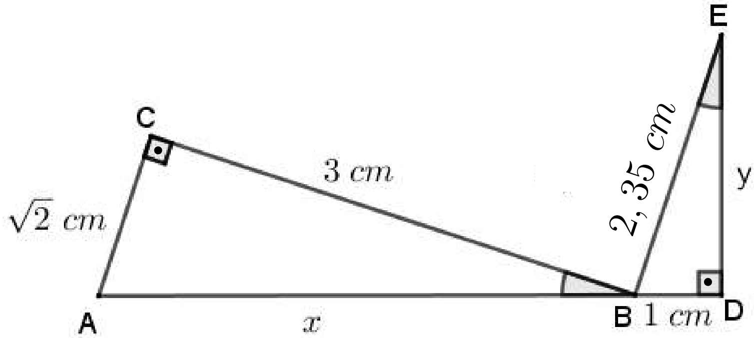
As figuras abaixo nos mostram pares de triângulos semelhantes. Dessa forma, em cada alternativa, calcule os valores de x e y:

A)



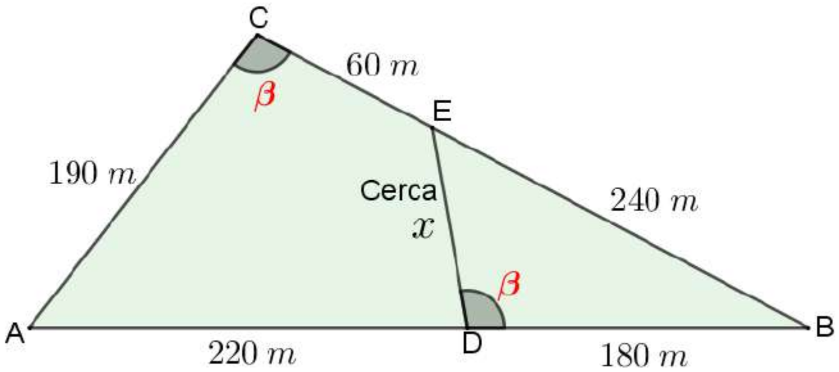
B)





ATIVIDADE 5

Uma fazenda possui uma área de pastagem com formato triangular. Para otimizar o uso do espaço, a fazenda foi dividida em dois piquetes para o gado, com a construção de uma cerca indicada pelo segmento DE, conforme apresentado a seguir em um modelo matemático para representar a área de pastagem.

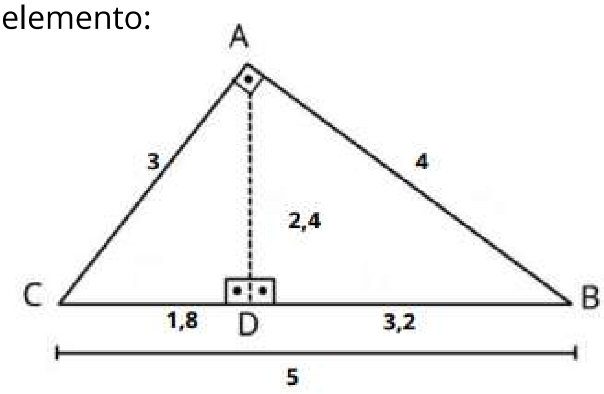


O comprimento *x*, em metros, da cerca DE que divide a área de pastagem em dois piquetes para o gado é:

A) 114 m
B) 142 m
C) 159 m
D) 253 m
E) 316 m

ATIVIDADE 6

Considere o triângulo retângulo ABC representado a seguir e que a unidade de medida utilizada está em cm para todos os segmentos. Indique as medidas de cada elemento:



A) Hipotenusa;

B) Cateto menor;

C) Cateto maior;

D) Altura relativa a hipotenusa;

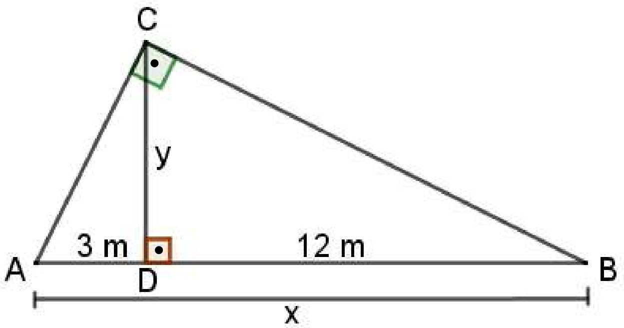
E) Projeção do menor cateto;

F) Projeção do maior cateto;

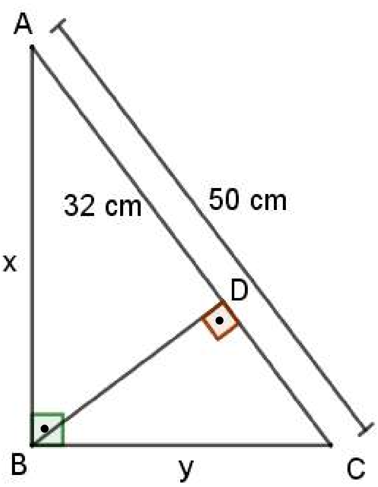
ATIVIDADE 7

Aplique seus conhecimentos nos triângulos retângulos a seguir e encontre a medida *x* e *y* indicada em cada caso.

A)

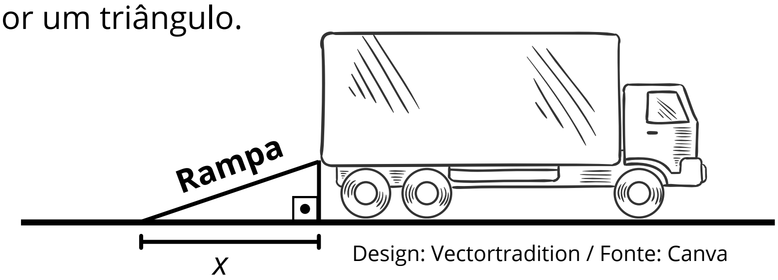


B)



ATIVIDADE 8

(SAEPE - 2009) Um caminhão estaciona em frente a uma rampa para facilitar o carregamento de mercadoria. Essa rampa tem 2,5 m de comprimento e atinge uma altura de 1,5 m do solo, como mostra a figura abaixo, onde a forma da rampa está representada por um triângulo.



Design: Vectortradition / Fonte: Canva

A distância entre o caminhão e o ponto de início de subida da rampa está representado na figura por x. Quanto mede essa distância?

A) 1 m
B) 2 m
C) 3 m
D) 4 m
E) 8 m

ATIVIDADE 9

Um arquiteto fez um projeto de um parque urbano em um terreno triangular. Nesse projeto, ele pretende criar um caminho retilíneo de modo a dividir o terreno em dois jardins menores, também com a forma triangular. O triângulo ABC da figura abaixo representa esse projeto, com as medidas dos lados do terreno, e o segmento AD, o caminho retilíneo que divide o terreno.

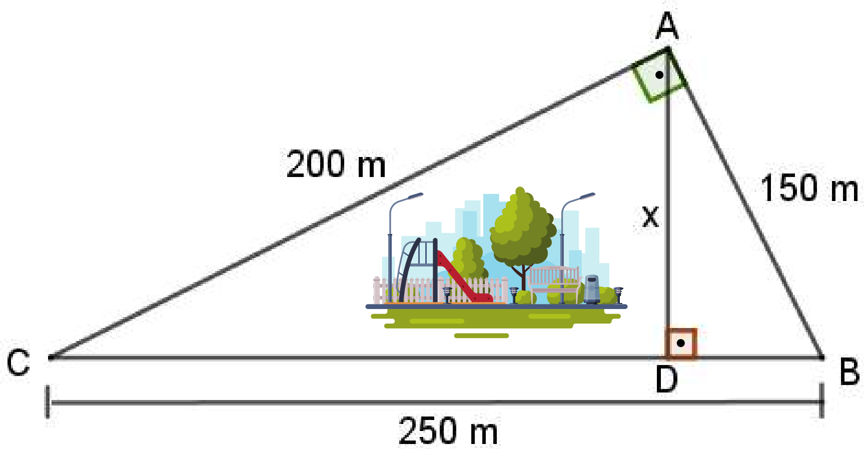
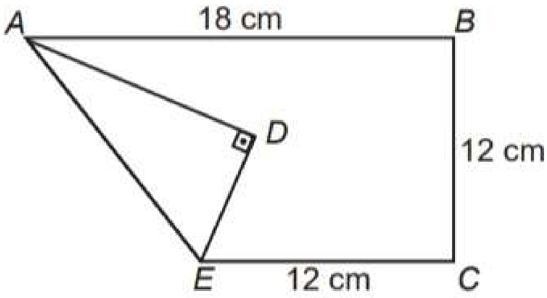


Imagem produzida no Canva

Qual deve ser o comprimento *x* dessa linha reta, que representará o novo caminho no jardim?

ATIVIDADE 10

(Enem 2019 - adaptada) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é:

$A)\ 2\sqrt{22}\ cm$

$B)\ 6\sqrt{3}\ cm$

$C)\ 12\ cm$

$D)\ 6\sqrt{5}\ cm$

$E)\ 12\sqrt{2}\ cm$

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: geometria e trigonometria. ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias.** 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante matemática, 1o ano : ensino médio.** 1ª ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contexto: trigonometria e sistemas lineares.** 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: geometria e trigonometria.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contexto: trigonometria e sistemas lineares**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

GOV.BR. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Inep. **Provas e Gabaritos**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 25/03/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico da Escola. SAEPE – 2009** /Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2009/BOLETIM_SAEPE_VOL3_3EM_MAT_2009.pdf>. Acessado em: 04/04/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico da Escola. SAEPE – 2018** /Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2019/PE%20SAEPE%202019%20RP%20MT%20WEB.pdf>. Acessado em: 28/03/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco. **Revista do Professor – Matemática. SAEPE – 2019** / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. V. 1 (2019), Juiz de Fora – Anual. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2019/PE%20SAEPE%202019%20RP%20MT%20WEB.pdf>. Acessado em: 04/04/2025.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Sequências e trigonometria.** Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.