CONEXÕES MATEMÁTICAS

QUINZENA 21
10/11 a 21/11

SEDU - 2025

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

ANÁLISE COMBINATÓRIA: CONTAGEM E AGRUPAMENTOS ORDENÁVEIS.

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.	• Utilizar diagramas de árvore para organizar as possibilidades em problemas de contagem, garantindo que todos os casos sejam considerados. • Diferenciar e aplicar o princípio multiplicativo (casos em que a escolha de um elemento não interfere nas escolhas subsequentes) e o princípio aditivo (casos em que há escolhas mutuamente exclusivas). • Reconhecer situações que envolvem agrupamentos ordenáveis (permutação, arranjo) compreendendo suas características. • Resolver problemas envolvendo agrupamentos ordenáveis.	D042_M Utilizar o princípio multiplicativo de contagem na resolução de problema.

Contextualização

Contar parece algo muito intuitivo, algo que fazemos naturalmente. Certamente você sabe quantas camisetas tem no seu guarda-roupa. Mas será que consegue contar quantos “looks” diferentes pode montar com todas as suas roupas para sair numa festa? Com certeza você sabe contar quantas pessoas moram na sua casa, mas já pensou de quantas maneiras diferentes elas podem se organizar em volta de uma mesa?

Essa contagem básica, que você já domina, é extremamente útil. Porém, queremos dar um passo além — para o momento em que sua contagem natural começa a falhar ou se torna cansativa demais. É justamente aí que entra a Matemática, com suas ferramentas e técnicas que facilitam o processo de contar, mesmo quando as possibilidades se multiplicam e ficam difíceis de visualizar.

Para lidar com esses desafios, vamos usar recursos matemáticos chamados princípios de contagem, que nos ajudam a contar situações difíceis de forma mais prática. Também estudaremos a permutação, que corresponde à ordenação de todos os elementos de um conjunto, e o arranjo, que trata da organização de apenas parte desses elementos.

Com essas ferramentas, será muito mais fácil descobrir quantas possibilidades existem em diferentes contextos do dia a dia.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

CONTAGEM

Introdução

Contar de quantas formas algo pode acontecer pode ser tão simples quanto perceber que, ao lançar uma moeda ao ar, ela pode cair de duas maneiras — com a face "cara" ou "coroa" voltada para cima — ou tão complexo quanto calcular quantos apertos de mão únicos podem ocorrer entre 40 estudantes de uma turma.

Para situações simples, nossa dedução direta é geralmente suficiente. Porém, em situações mais complexas, utilizamos um ramo da matemática chamado Análise Combinatória. Essa área estuda técnicas de contagem que nos permitem determinar, sem listar todos os casos, quantas possibilidades existem em decorrência de um acontecimento.

Para começarmos, vamos definir alguns conceitos importantes e, em seguida, partimos para a definição dos princípios básicos da contagem.

O acontecimento e seus resultados

Antes de iniciarmos os métodos de contagem propriamente ditos, é importante sistematizar alguns termos fundamentais que servirão de base para todo o estudo.

- Acontecimento: é a descrição de uma situação que pode ocorrer, cujos resultados são bem definidos e passíveis de contagem.
- Conjunto resultados de um acontecimento: é o conjunto que reúne todas as possíveis consequências ou desfechos associados a esse acontecimento.
- Cardinalidade do conjunto: é a quantidade de elementos existentes em um determinado conjunto. Se A é um conjunto qualquer, sua cardinalidade é denotada por $n(A)$.

Obs.: Outras notações comumente utilizadas na literatura para indicar cardinalidade são $|A|$ ou $\#A$.

Nosso objetivo neste material é compreender os diferentes tipos de acontecimentos e aprender a determinar a cardinalidade de seus conjuntos de resultados, aplicando princípios sistemáticos de contagem.

atenção

Caro(a) professor(a), embora o termo evento seja frequentemente usado como sinônimo de acontecimento, optamos por adotar acontecimento como termo principal nesta abordagem introdutória. Isso nos permite reservar o termo evento para uma definição mais formal e específica no estudo de Estatística, como subconjunto do espaço amostral.

Exemplo 1

Considere o seguinte acontecimento:

Lançar uma moeda ao ar e verificar qual face fica para cima quando ela estiver estável no chão: cara ou coroa.

O conjunto resultados para esse acontecimento é:

$$R = \{\, cara \;,\; coroa \,\}$$

Logo, a cardinalidade do conjunto R é:

$$n\,(R) = 2$$

Princípios da Contagem

Muitos acontecimentos que analisamos envolvem **etapas sucessivas** ou podem ser **divididos em casos diferentes** e às vezes até combinam essas duas situações.

Para lidar com essas situações e calcular a **cardinalidade total** do conjunto de resultados com organização e eficiência, utilizamos os chamados **Princípios da Contagem**, que veremos a seguir:

- **Princípio Multiplicativo**
- **Princípio Aditivo**
- **Combinação dos dois princípios**

Princípio Multiplicativo da Contagem

Se um acontecimento é composto por k etapas sucessivas e independentes, e cada etapa tem seu próprio conjunto resultados R_i (com i variando de 1 até k), sendo que o resultado de uma etapa não interfere nos resultados das demais, então a cardinalidade total do conjunto resultados, R, é dada pelo produto da cardinalidade de cada uma de suas etapas:

$$n\left(R\right) = n\left(R_1\right) \cdot n\left(R_2\right) \cdot \cdots \cdot n\left(R_{k-1}\right) \cdot n\left(R_k\right)$$

Exemplo 2

Uma pessoa vai se vestir para sair e precisa escolher:

- *uma das quatro camisetas disponíveis:* $A = \{\,Amarela\,,\ Verde\,,\ Cinza\,,\ Vermelha\,\}$
- *uma das duas bermudas disponíveis:* $B = \{\,Azul\,,\ Marrom\,\}$*; e*
- *um dos calçados disponíveis:* $C = \{\,Tênis\,\}$.

Como cada escolha é independente das demais, aplicamos o Princípio Multiplicativo:

$$n\left(A\right) \cdot n\left(B\right) \cdot n\left(C\right) = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$$

Portanto, o acontecimento pode ocorrer de **8 formas diferentes**.

Podemos utilizar uma ferramenta gráfica chamada **árvore de possibilidades** para visualizar, de forma organizada, todos os resultados possíveis de um acontecimento. Na figura 1, observamos a árvore correspondente ao Exemplo 2.

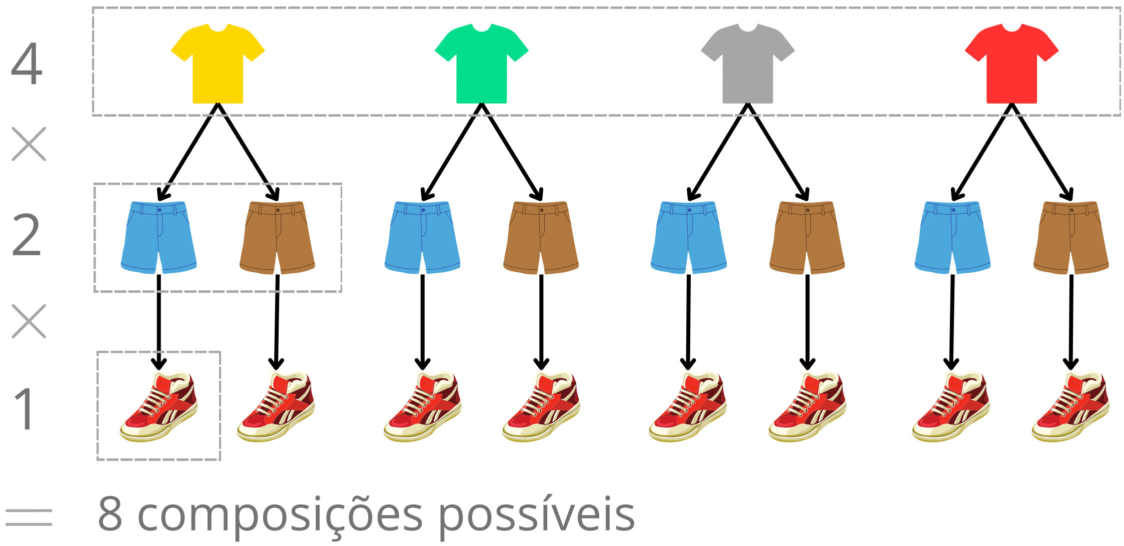


Figura 1: **Árvore de possibilidades representando o acontecimento do exemplo 2.**

Princípio Aditivo

Seja R o conjunto total de resultados de um acontecimento que pode ocorrer de k formas diferentes, sendo cada forma um caso específico do acontecimento, com seu próprio conjunto resultados R_i (com i variando de 1 até k). Se esses casos são mutuamente excludentes, ou seja, se apenas um pode ocorrer por vez, então a cardinalidade total de R é dada pela soma das cardinalidades dos conjuntos resultados de cada caso:

$$n(R) = n(R_1) + n(R_2) + \cdots + n(R_{k-1}) + n(R_k)$$

Exemplo 3

Um estudante decide como vai usar o tempo do recreio na escola. Ele pode optar por:

- *Praticar um dos esportes coletivos disponíveis na quadra:* $E = \{\, Basquete \,,\ Futsal \,,\ Vôlei \,\}$*; ou*
- *Fazer uma revisão de uma das disciplinas com avaliação marcada para as próximas aulas:* $R = \{\, Lingua\ Portuguesa \,,\ Matemática \,\}$ *.*

Como ele só pode escolher uma atividade, os sub-acontecimentos E e R são mutuamente excludentes. Aplicamos, então, o Princípio Aditivo:

$$n(E) + n(R) = 3 + 2 = 5$$

Portanto, o acontecimento escolher o que fazer no recreio pode ocorrer de 5 formas diferentes.

Combinação dos Princípios Aditivo e Multiplicativo

Em muitos problemas, temos situações em que:

- Existem **casos diferentes**, **mutuamente excludentes** (Princípio Aditivo);
- E, **dentro de cada caso**, há **etapas sucessivas** (Princípio Multiplicativo).

Nesses casos, usamos **os dois princípios combinados**:

1. Aplicamos o **Princípio Multiplicativo** dentro de cada caso,
2. Usamos o **Princípio Aditivo** para somar os totais de cada caso.

Exemplo 4

Arthur está em uma praça e decide fazer um lanche antes de voltar para casa. Ele tem **duas opções exclusivas** de local para lanchar:

Pastelaria:

- 3 *tipos de pastéis; e*
- *3 tipos de bebida.*

Banca de sanduíches

- *2 tipos de sanduíche; e*
- *3 tipos de bebida.*

Em qualquer uma das opções, Arthur deve montar um **combo** com **uma comida e uma bebida**.

Arthur conhece suas limitações e sabe que aguenta lanchar em apenas um dos dois locais. Portanto, os casos são **mutuamente excludentes**. Vamos aplicar os **princípios da contagem** para determinar a quantidade total de possibilidades.

Caso 1: Arthur escolhe lanchar na pastelaria

Aqui, a cardinalidade é calculada pelo Princípio Multiplicativo, pois a escolha da comida não interfere na escolha da bebida. Seja P o conjunto de lanches distintos na pastelaria, então:

$$n\left(P\right) = 3 \cdot 3 = 9$$

Portanto, há 9 possibilidades de refeições na pastelaria.

Caso 2: Arthur escolhe lanchar na banca de sanduíches

Também aplicamos o Princípio Multiplicativo. Seja S o conjunto de lanches distintos na banca de sanduíches, então:

$$n\left(S\right) = 2 \cdot 3 = 6$$

Portanto, há 6 possibilidades de refeições na banca.

Agora, como Arthur só vai a **um dos locais**, aplicamos o **Princípio Aditivo** para obter o total de possibilidades:

$$n\left(P\right) + n\left(S\right) = 9 + 6 = 15$$

Portanto, o acontecimento “Arthur fazendo um lanche na praça” pode ocorrer de 15 maneiras diferentes, que pode ser visto na árvore de possibilidades representada na figura 2.

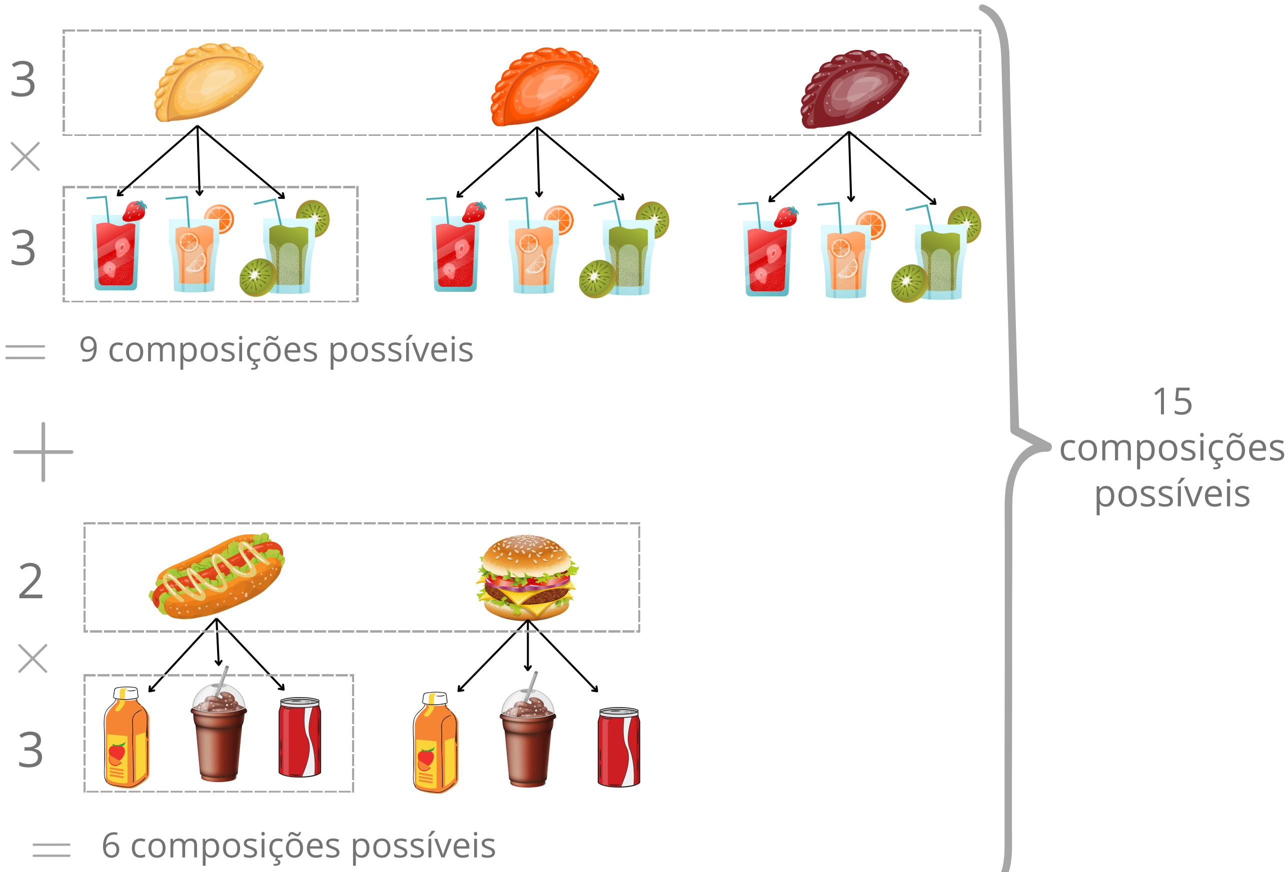


***Figura 2:* Árvore de possibilidades representando o acontecimento do exemplo 4.**

AGRUPAMENTOS ORDENÁVEIS

Introdução

Os princípios da contagem apresentados no tópico anterior são ferramentas fundamentais para determinar o número de resultados possíveis de um acontecimento. No entanto, em muitos problemas, a aplicação direta desses princípios pode se tornar trabalhosa ou pouco eficiente.

Por isso, vamos estudar uma classe especial de problemas de contagem que envolve a organização de elementos de um conjunto em determinada ordem. Situações como a formação de filas com alunos, a disposição de trabalhos em um mural, ou mesmo a montagem de senhas com letras e números são exemplos em que precisamos considerar tanto os elementos envolvidos quanto a ordem em que aparecem. Nesses casos, vamos aplicar os princípios da contagem para deduzir fórmulas que simplificam e agilizam o processo de contagem.

Fatorial

Antes de definirmos arranjos e permutações, que são tipos de agrupamentos que vamos estudar neste material, precisamos entender o conceito de fatorial, pois ele aparece nas fórmulas principais desse estudo.

Definição:

O fatorial de um número natural a, denotado por $a!$, é o produto de todos os inteiros positivos de 1 até a.
Ou seja,

$$a! = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

E, por convenção,

$$0! = 1$$

Exemplos:

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$
- $(10-6)! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $\dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 8 \cdot 7 = 56$

Permutação

Chamamos de permutação toda organização ordenada em que utilizamos todos os elementos disponíveis de um conjunto. A principal característica das permutações é que a ordem importa e todos os elementos participam da organização.
Existem dois tipos principais:

- **Permutação simples**: todos os elementos são distintos.
- **Permutação com repetição**: alguns elementos se repetem, e trocá-los entre si **não gera** novas organizações distintas.

Para descobrir quantas permutações diferentes podem ser feitas, usamos os princípios da contagem, ajustando os cálculos sempre que houver repetições. A seguir, veremos exemplos e fórmulas específicas para cada caso.

Permutação Simples

Na permutação simples, estamos interessados em descobrir de quantas formas podemos ordenar todos os elementos de um conjunto, considerando que todos são distintos e cada elemento aparece uma única vez.
Para compreender como calcular esse tipo de permutação, vamos analisar a seguinte situação:

> *Três estudantes — Ana, Bruno e Carla — vão se apresentar para a turma. De quantas maneiras diferentes eles podem organizar a ordem das apresentações?*

Como temos 3 pessoas e queremos formar todas as ordens possíveis, aplicamos o Princípio Multiplicativo:

- Para a 1ª apresentação, há 3 opções (qualquer um dos três estudantes);
- Para a 2ª apresentação, restam 2 opções;
- Para a 3ª apresentação, sobra apenas 1 estudante.

Assim, o número total de maneiras distintas é:

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras distintas de organizar a apresentação.

Essas são as possíveis ordens:

{ (Ana, Bruno, Carla) , (Ana, Carla, Bruno) , (Bruno, Ana, Carla) ,
(Bruno, Carla, Ana) , (Carla, Ana, Bruno) , (Carla, Bruno, Ana) }

Definição

Considere um conjunto com n elementos distintos. O número total de ordenações diferentes desses elementos, que denominamos de permutação e denotamos como P_n, é dado por:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exemplo 5

De quantas formas diferentes podemos ordenar os 5 primeiros livros de uma estante?

Como todos os livros são diferentes e queremos todas as possíveis ordens, aplicamos:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Portanto, existem **120 disposições distintas** para organizar esses 5 livros

Permutação com Repetição

Uma permutação com repetição acontece quando alguns elementos do conjunto são idênticos (ou seja, se repetem), e queremos saber de quantas formas diferentes podemos ordená-los, considerando que trocar elementos repetidos entre si não gera uma nova ordem.

Vamos começar com uma situação simples: de quantas formas diferentes podemos organizar as letras da palavra "AME"? Como todas as três letras são distintas, trata-se de uma permutação simples com $3! = 6$ anagramas:

{ AME , AEM , MAE , MEA , EAM , EMA }

Anagrama é uma reorganização das letras de uma palavra ou frase, formando novas palavras ou frases, desde que todas as letras sejam usadas.

Agora, considere a palavra **AMA**, que também possui três letras, mas com **duas letras A**. Se distinguirmos os A's como A_1 e A_2, teremos:

$$\{ A_1MA_2 , A_2MA_1 , MA_1A_2 , MA_2A_1 , A_1A_2M , A_2A_1M \}$$

Embora a contagem inicial também indique **6 permutações**, na prática, algumas são **visualmente idênticas**, pois a troca entre letras A não altera a palavra. Isso significa que só há **3 anagramas distintos**:

{ AMA , MAA , AAM }

Para corrigir essa contagem, devemos **dividir o total de permutações pelo número de maneiras de reorganizar os elementos repetidos entre si**. No caso, as duas letras **A** podem ser organizadas de $2! = 2$ formas que resultam a mesma palavra. Logo, o número de permutações distintas da palavra AMA é:

$$\frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3 \text{ variações}$$

Por fim, vamos analisar a palavra IRIRI, que tem 5 letras, sendo que:

- A letra I aparece 3 vezes
- A letra R aparece 2 vezes

Se todas fossem diferentes, o número de permutações seria:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Mas como temos repetições, devemos dividir esse total pelas permutações dos elementos repetidos:

- Os 3 I's podem ser permutados entre si de $3! = 6$ formas; e
- Os 2 R's podem ser permutados entre si de $2! = 2$ formas.

Então, o número real de permutações distintas da palavra **IRIRI** é:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = \frac{5 \cdot \cancelto{2}{4}}{\cancelto{1}{2}} = 5 \cdot 2 = 10$$

Assim, existem **10 anagramas distintos** da palavra IRIRI:

{ IRIRI , IRIIR , IRRII , IIRIR , RIRII , IIRRI , RIIRI , IIIRR , RIIIR , RRIII }

Definição

Considere um conjunto com n elementos, dos quais um elemento é repetido r_1 vezes, outro elemento é repetido r_2 vezes, e assim por diante. O número total de ordenações diferentes desses elementos, descontando as suas repetições, que denotamos como $P_n^{r_1, r_2, \cdots, r_n}$, é dado por:

$$P_n^{r_1, r_2, \cdots, r_n} = \frac{n!}{r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n}$$

Exemplo 6

Quantos anagramas podemos formar com a palavra AVIVAVA?

Trata-se de um problema de permutação com repetição. As letras “A” e “V” se repetem, cada uma 3 vezes e a letra “I” apenas 1. Portanto,

$$P_7^{3,3,1} = \frac{7!}{3! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{6}} = 7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$$

Portanto, há 140 anagramas para a palavra AVIVAVA.

Arranjo

Chamamos de arranjos as organizações ordenadas feitas com elementos de um conjunto. Isso significa que a ordem faz diferença — trocar a posição dos elementos gera uma nova possibilidade.

Existem dois tipos principais:

- arranjo com repetição: permite reutilizar elementos nas posições; e
- arranjo simples (sem repetição): não permite repetição de elementos.

Em ambos os casos, utilizamos os princípios da contagem para determinar quantas organizações possíveis podem ser feitas, como veremos a seguir, com exemplos e fórmulas específicas

Arranjo com repetição

O arranjo com repetição ocorre quando queremos formar agrupamentos ordenados com elementos de um conjunto, permitindo repetições. Nesses casos, a ordem importa e os mesmos elementos podem ser utilizados mais de uma vez.
Para exemplificar, considere um cofre eletrônico exige um código de 3 dígitos, e cada dígito pode ser qualquer número de 0 a 9. Como há 10 opções para cada posição e os dígitos podem se repetir, temos, pelo Princípio Multiplicativo:

$$n\left(A\right) = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$$

Portanto, há **1000 códigos diferentes** possíveis.

Definição

Considere um conjunto com n elementos distintos. O número total de sequências ordenadas dos elementos deste conjunto, tomados r a r (com $r \in \mathbb{N}^*$), permitindo repetições, é denominado arranjo com repetição, denotado por $AR_{n,r}$ e dado por:

$$\boxed{AR_{n,r} = n^r}$$

Exemplo 7

Um professor quer gerar senhas de 4 letras com as opções A, B, C, D e E. Quantas senhas ele pode gerar?

Como as letras podem se repetir, trata-se de um arranjo com repetição de um conjunto com 5 elementos tomados 4 a 4:

$$AR_{5,4} = 5^4 = 625$$

Portanto, há **625 senhas diferentes** possíveis.

Arranjo simples (sem repetição)

O **arranjo simples** ocorre quando queremos formar agrupamentos ordenados com elementos de um conjunto, **sem permitir repetições**. Ou seja, a **ordem dos elementos importa** e **cada elemento pode ser usado apenas uma vez**.

Para entender, considere o seguinte exemplo:
Uma escola vai escolher os alunos que ocuparão os cargos de presidente, vice-presidente e secretário do grêmio estudantil, entre 10 candidatos. Cada cargo será ocupado por uma pessoa diferente e a ordem indica o cargo (presidente, vice-presidente e secretário) ocupado.

Como a ordem é importante e **nenhum aluno pode ocupar mais de uma posição**, trata-se de um **arranjo simples**.
Pelo **Princípio Multiplicativo**, temos:

- 10 opções para o cargo de presidente;
- 9 opções para o cargo de vice-presidente (após a escolha do presidente); e
- 8 opções para o cargo de secretário (após a escolha dos dois primeiros).

Portanto, o número total de maneiras diferentes de ocupar os três cargos é:

$$n(A) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Portanto, há **720 configurações distintas** para a organização desses cargos do grêmio ao se selecionar entre 10 alunos.

Definição

Considere um conjunto com n elementos distintos. O número total de sequências ordenadas dos elementos deste conjunto, tomados r a r (com $r \in \mathbb{N}^*$), sem repetições, é denominado arranjo simples, denotado por $A_{n,r}$ e dado por:

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo 8

Um professor quer gerar senhas de 3 letras diferentes com as opções A, B, C, D e E. Quantas senhas ele pode gerar?

Como não pode repetir letras, temos um problema de **arranjo simples** de 5 elementos tomados 3 a 3:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Portanto, há **60 senhas diferentes** possíveis.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

O modelo antigo de placas no Brasil seguia o formato LLL-NNNN (3 letras e 4 números). Com o modelo Mercosul, passou-se para o formato LLLNLNN (3 letras, 1 número, 1 letra e 2 números intercalados). Considere 26 possibilidades para cada letra (A–Z) e 10 para cada número (0–9), com repetições permitidas.

a) Quantas placas diferentes podem ser formadas em cada modelo?

b) Quantas vezes mais combinações o modelo Mercosul permite em relação ao modelo antigo?

Resolução

Como as letras e os números podem se repetir, temos dois arranjos com repetição que são independentes entre si. Portanto, podemos aplicar o princípio multiplicativo entre esses arranjos para calcular o total de possibilidades.

No arranjo das letras, a base da fórmula é 26 (correspondente às 26 letras do alfabeto). No arranjo dos números, a base é 10 (correspondente aos dígitos de 0 a 9).

a) Modelo antigo (LLLNNNN):

- Letras: 26^3 arranjos; e
- Números: 10^4 arranjos.

Total de placas possíveis: $26^3 \cdot 10^4 = 175\,760\,000.$

Modelo novo (LLLNLNN):

- Letras: 26^4 arranjos; e
- Números: 10^3 arranjos.

Total de placas possíveis: $26^4 \cdot 10^3 = 456\,976\,000.$

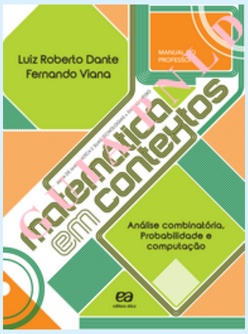
b) Comparação entre os modelos:

$$\frac{26^4 \cdot 10^3}{26^3 \cdot 10^4} = \frac{26}{10} = 2{,}6$$

Ou seja, o modelo Mercosul permite 2,6 vezes mais combinações que o modelo antigo.

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em contexto: combinatória, probabilidade. (DANTE)

Capítulo 1: Análise combinatória.

- Princípio fundamental da contagem (p. 14 - 18).
- Permutação simples (p. 21 - 25).
- Permutação com repetição (p. 25 - 27).
- Arranjo simples (p. 29 - 34).

Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade. (BONJORNO)

Capítulo 3: Combinatória.

- Princípio multiplicativo (p. 81 - 83).
- Princípio aditivo (p. 84 - 85).
- Fatorial (p. 85 - 87).
- Problemas de contagem (88 - 92).

LEITURA

Mais um papel da divisão na Análise Combinatória

Disponível no espaço "Sala de leitura", o texto apresenta algumas discussões e problemas sobre conceitos de Análise Combinatória. Para ter acesso, basta clicar aqui ou via QR-Code (ao lado).

Bom estudo!

Atividades

ATIVIDADE 1

Durante o intervalo do recreio na escola, Lara e suas amigas decidiram se divertir com um jogo usando 4 cartões numerados de 1 a 4, conforme mostrado abaixo:

© 2025 Sebastião Almeida Mota

A proposta do jogo era formar o maior número possível de números de dois algarismos distintos, utilizando os cartões disponíveis sem repetir algarismos no mesmo número. Vencia a aluna que conseguisse formar e listar todos os agrupamentos possíveis primeiro.

a) Quais são todos os números de dois algarismos diferentes que podem ser formados utilizando os quatro cartões?

b) Qual é o total de agrupamentos diferentes (números de dois algarismos distintos) que podem ser formados?

ATIVIDADE 2

Em uma pastelaria, o cliente pode montar um combo que inclui:

- 1 tipo de recheio (frango, carne, queijo ou palmito)
- 1 bebida (água, suco ou refrigerante)
- 1 molho (ketchup ou maionese)

Para organizar os pedidos de forma eficiente, os funcionários decidiram montar um diagrama de árvore que representasse todas as escolhas possíveis

a) Construa um diagrama de árvore que mostre todas as possibilidades de escolhas contendo um recheio, uma bebida e um molho.

b) Liste todas as possibilidades representadas no diagrama.

c) Quantas escolhas diferentes de combos podem ser montadas?

ATIVIDADE 3

Marcos trabalha em uma loja de acessórios tecnológicos que oferece fones de ouvido personalizados. Para montar o fone ideal, o cliente pode escolher uma das 3 opções de fone (intra-auricular, supra-auricular, ou headset), uma das 5 opções de cores de cabo (preto, branco, vermelho, azul, verde) e uma das 8 opções de estampas ou acabamentos para o estojo de proteção.

Quantos fones de ouvido personalizados diferentes podem ser montados nessa loja, por Marcos?

a) 240

b) 120

c) 40

d) 24

e) 15

ATIVIDADE 4

Para celebrar o Dia do Estudante, uma escola preparou uma programação especial com diversas atividades para os alunos. Entre as opções oferecidas, estão modalidades esportivas e jogos de tabuleiro.

As modalidades esportivas disponíveis são: **futsal, vôlei, basquete e tênis de mesa**.

Já os jogos de tabuleiro incluem: **xadrez, dama e dominó**.

Responda às seguintes situações:

a) Se, ao se inscrever, o aluno for informado de que pode escolher apenas uma atividade, seja um esporte ou um jogo de tabuleiro, de quantas maneiras diferentes essa escolha pode ser feita?

b) Se, ao se inscrever, o aluno for informado de que pode escolher uma modalidade esportiva e um jogo de tabuleiro, de quantas maneiras diferentes esses agrupamentos pode ser feita?

ATIVIDADE 5

(ENEM - 2019) Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão.

A quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir é determinada por:

a) 6.

b) 8.

c) 12.

d) 16.

e) 24.

ATIVIDADE 6

Durante a Feira de Matemática da Escola Horizonte, os alunos do 2º ano foram desafiados a criar senhas de segurança para trancar as caixas que continham os prêmios. Essas senhas deveriam ser formadas por números do sistema de numeração decimal, com três algarismos distintos, ou seja, compreendidos entre 100 e 999. Cada grupo de alunos recebeu regras específicas para montar as senhas, utilizando apenas determinados tipos de algarismos (pares, ímpares ou um conjunto fixo).

Com base nesse desafio, responda às seguintes questões:

a) Quantas senhas de três algarismos distintos podem ser formadas utilizando apenas os algarismos 2, 7 e 9?

b) Entre as senhas formadas com os algarismos 2, 7 e 9, quantas são números pares? Liste todas elas.

c) Quantas senhas diferentes de três algarismos distintos podem ser criadas utilizando apenas os algarismos ímpares?

d) Quantas senhas diferentes de três algarismos distintos podem ser criadas utilizando apenas os algarismos pares de 0 a 9?

ATIVIDADE 7

Efetue as operações a seguir:

$a)\ 5!$

$b)\ 0! + 3!$

$c)\ 4! - 1!$

$d)\ 10 \cdot 6!$

$e)\ \dfrac{10!}{7!}$

$f)\ \dfrac{5!}{6!}$

$g)\ \dfrac{7!}{3!\ 4!}$

ATIVIDADE 8

Determine o número de anagramas formados a partir das palavras:

a) FESTA

b) ESCOLA

c) CASA

d) SOCORRO

ATIVIDADE 9

Um anagrama é uma reordenação das letras de uma palavra, podendo ou não formar palavras com sentido. Considerando a palavra BRASIL, que possui 6 letras distintas, responda:

a) Qual é o número total de anagramas que podem ser formados com todas as letras da palavra BRASIL?

b) Quantos desses anagramas começam com a letra B?

c) Quantos anagramas começam com uma vogal?

d) Quantos anagramas começam com as letras BR, juntas e nessa ordem?

e) Quantos anagramas começam com a letra B e terminam com a letra L?

f) Quantos anagramas começam com a letra B ou terminam com a letra L?

ATIVIDADE 10

(ENEM 2024) Para abrir a porta de uma empresa, cada funcionário deve cadastrar uma senha utilizando um teclado alfanumérico como o representado na figura.

Por exemplo: a tecla que contém o número 2 traz as letras correlacionadas A, B e C. Cada toque nessa tecla mostra, sequencialmente, os seguintes caracteres: 2, A, B e C. Para os próximos toques, essa sequência se repete. As demais teclas funcionam da mesma maneira.

As senhas a serem cadastradas pelos funcionários devem conter 5 caracteres, sendo 2 algarismos distintos seguidos de 3 letras diferentes, nessa ordem. Um funcionário irá cadastrar a sua primeira senha, podendo escolher entre as teclas que apresentam os números 1, 2, 5, 7 e 0 e as respectivas letras correlacionadas, quando houver.

O número de possibilidades diferentes que esse funcionário tem para cadastrar sua senha é:

a) 11 520.
b) 14 400.
c) 18 000.
d) 312 000.
e) 390 000.

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUZA, Câmara, P. R. **Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade. Ensino médio. Área do conhecimento: matemática e suas tecnologias.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

CABRAL, R. M. P. **Matemática discreta.** 1. ed. Fortaleza: EDUECE, 2017.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos: combinatória, probabilidade.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar 5:** geometria plana. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. **Discrete mathematics: elementary and beyound.** New York: Springer-Verlag, 2013.

SCHEINERMAN, E. R. **Mathematics: a discrete introduction.** 3. ed. Boston: Cengage Learning, 2012.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade**. Ensino médio. Área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: combinatória, probabilidade**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

GOV.BR. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Inep. Provas e Gabaritos**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 25/05/2025.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Estatística e probabilidade - Ensino Médio**. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.