GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.	• Identificar arcos na circunferência trigonométrica. • Associar a um arco na circunferência trigonométrica uma medida angular. • Escrever a medida angular de um arco na circunferência trigonométrica em graus ou em radianos. • Reconhecer arcos côngruos na circunferência trigonométrica. • Associar um arco AP (origem em A de coordenadas (1,0)) na circunferência trigonométrica ao ponto de extremidade P. • Corresponder a um ponto P na circunferência trigonométrica a medida do comprimento do arco AP (sendo o ponto A a extremidade na origem (1,0)) expressa por número real alfa.	D043_M Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.

Caro(a) Professor(a),

Informamos que, a partir da Quinzena 14, o Material Estruturado incluirá todo o conteúdo relativo a esta quinzena, de modo a não haver mais duas capas e sintetizar o conteúdo em um único volume. Esperamos, assim, que essa mudança facilite o seu trabalho, planejamento e sua organização em sala de aula.

Contextualização

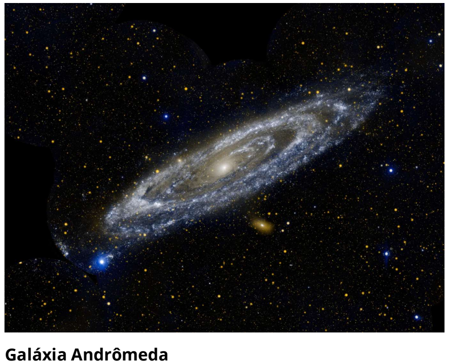
A origem da trigonometria remonta a, aproximadamente, 2 000 anos antes de Cristo, e seu uso inicial como uma ferramenta para a medição de ângulos para construção das pirâmides do Egito; no relógio de sol pelos egípcios, babilônicos e gregos; e na astronomia por Hiparco e Ptolomeu.

Hiparco mediu com precisão a duração de um ano e elaborou o primeiro catálogo de estrelas. Os Egípcios tinham conhecimento sobre tangentes e as pirâmides eram construídas de tal forma que suas faces formavam um ângulo de 52º com o plano da base.

Você pode notar que a medição de ângulos é tão antiga quanto podemos imaginar e uma tarefa essencial para o desenvolvimento de diversas aplicações.

Como primeiro material de estudo de trigonometria, nesta quinzena estudaremos os ângulos para responder a duas perguntas principais: Quais unidades de medida podemos usar para medir ângulos? Como associar ângulos e arcos de uma circunferência?

Bons estudos!



Galáxia Andrômeda
Design: NASA CC0
Fonte: Canva Imagens

Pirâmide do Egito
Design: Getty Images Signature
Fonte: Canva Imagens

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: geometria e trigonometria. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar, 3:** trigonometria: 506 exercícios propostos com resposta, 167 testes de vestibulares com resposta. 9 ed., São Paulo: Atual, 2013.

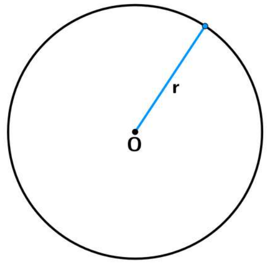
ATIVIDADES

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 3:** trigonometria: 506 exercícios propostos com resposta, 167 testes de vestibulares com resposta. 9 ed., São Paulo: Atual, 2013.

Conceitos e Conteúdos

A CIRCUNFERÊNCIA E SEUS ELEMENTOS

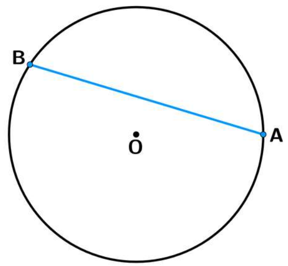
Considere um ponto O num plano. A **circunferência** é definida como um conjunto de pontos desse plano que distam exatamente r de O. O ponto O é chamado de centro da circunferência e r é chamado de raio da circunferência.



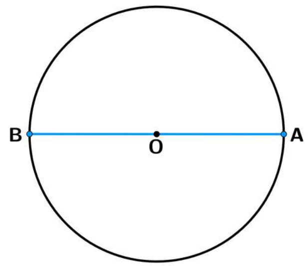
Circunferência de centro O e raio r
Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Corda e Diâmetro

Dados dois pontos A e B de uma circunferência de centro O e raio r, o segmento de reta AB é uma **corda** da circunferência. Se o centro da circunferência (O) pertencer ao segmento AB, essa corda se chama **diâmetro**.



AB é uma corda da circunferência

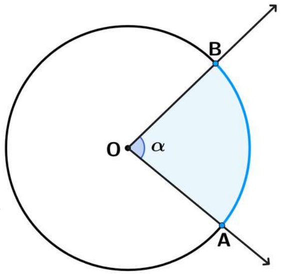


AB é um diâmetro da circunferência

Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

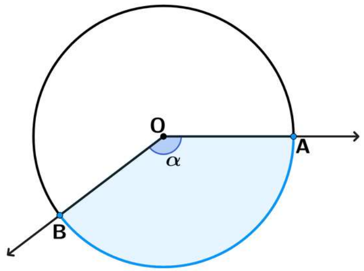
Arco de circunferência e ângulo

Dados dois pontos A e B de uma circunferência de centro O, podemos definir o **arco** $\overset{\frown}{AB}$ como sendo a interseção do ângulo AÔB com a circunferência.
O ângulo AÔB é chamado de **ângulo central** e o arco $\overset{\frown}{AB}$ é chamado de arco correspondente a esse ângulo. Como existe essa correspondência entre o ângulo central e o arco, dizemos que *a medida do arco é igual à medida do ângulo central correspondente*.



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

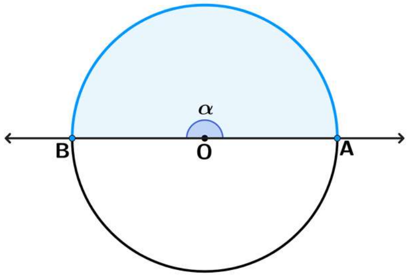
Arco de uma circunferência associado a um ângulo central AÔB



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Arco de uma circunferência associado a um ângulo central BÔA

Caso A e B sejam extremidades de um diâmetro da circunferência o arco $\widehat{AB}$ é chamado de semicircunferência, observe a figura abaixo.



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Arco $\widehat{AB}$ representa uma semicircunferência

Medidas de arcos

Quando medimos ângulos e, consequentemente, arcos é comum usarmos como unidade de medida o grau (º). Neste material vamos conhecer uma nova unidade de medida: o **radiano** (rad).

Grau	Radiano
Grau é um arco unitário com medida igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que o contém.	Radiano é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.

Observe na figura abaixo a representação do radiano.

ATIVIDADE 9

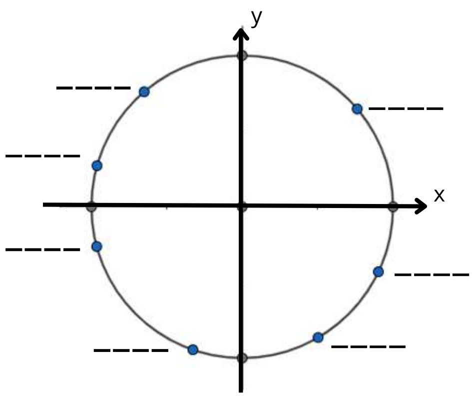
O engenheiro Bernardo está trabalhando no projeto de uma nova pista de corrida circular para um parque municipal localizado em Serra-ES. Ele precisa definir o comprimento exato de uma seção específica da pista, onde será construída uma arquibancada.

Considerando que a pista circular tem um raio de 5 metros, e a seção da arquibancada corresponde a um ângulo central de $\frac{\pi}{2}$ radianos, determine qual será o comprimento dessa seção (arco) da pista? (Utilize π = 3,14)

ATIVIDADE 10

Indique, nas regiões demarcadas do ciclo trigonométrico da figura, a localização de cada um dos ângulos seguintes, que estão expressos em radiano.

- $\frac{13\pi}{18}$
- $\frac{5\pi}{3}$
- $\frac{25\pi}{18}$
- $\frac{67\pi}{36}$
- $\frac{2\pi}{9}$
- $\frac{8\pi}{9}$
- $\frac{13\pi}{12}$



ATIVIDADE 4

ATIVIDADE 5

Considere o arco de $\frac{\pi}{4}$rad. Determine as medidas, em radianos, dos arcos simétricos a ele em relação ao eixo das ordenadas (eixo y), à origem O e ao eixo das abscissas (eixo x). Para os três casos, determine também seu quadrante.

ATIVIDADE 6

Se a medida de AÔD = 130º, determine as medidas dos arcos (sentido anti-horário):

A) AÔB

B) AÔF

C) AÔH

D) BÔC

E) BÔD

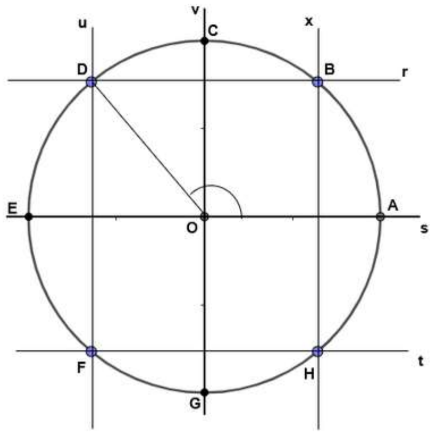
F) BÔE

G) BÔF

H) BÔH

I) GÔH

J) FÔG



ATIVIDADE 7

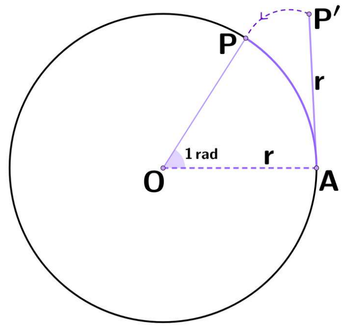
Para cada arco dado abaixo, encontre 2 arcos côngruos diferentes. Certifique-se de que pelo menos um dos arcos côngruos que você encontrar seja negativo.

A) 75º B) 220º C) – 130º D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{5\pi}{6}$ F) $-\frac{2\pi}{3}$

ATIVIDADE 8

Indique a menor representação positiva em radianos para os seguintes arcos:

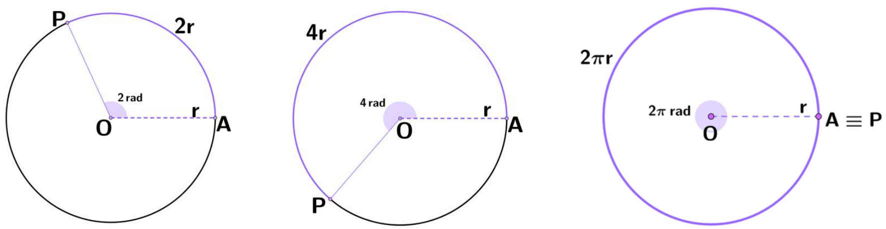
A) $\frac{7\pi}{2}$ B) 5π C) $-\frac{5\pi}{3}$



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Seguindo assim, um arco com medida igual a um diâmetro equivale a 2 radianos; um arco com medida igual a 4 raios, equivale a 4 radianos; e, um arco equivalente à circunferência completa equivale a 2π radianos, já que a circunferência possui comprimento igual a 2πr.

Estas relações podem ser observadas nas figuras abaixo.



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

A partir da terceira circunferência ilustrada acima podemos desenvolver a relação entre graus e radianos: sabemos que um arco equivalente à circunferência completa corresponde a 2π radianos, no entanto, ele também equivale a 360º.

Assim, para determinar a medida de outros ângulos em radianos, usamos a proporcionalidade. Observe a seguir como transformar os ângulos de 90º, 180º e 270º radianos:

ângulo de 90º

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \_\_ & 360^\circ \\ x & \_\_ & 90^\circ \end{array} \Rightarrow 90^\circ \cdot 2\pi = 360^\circ \cdot x \Rightarrow x = \frac{90^\circ \cdot 2\pi^{\div 90}}{360^{\circ \div 90}} = \frac{2\pi^{\div 2}}{4^{\div 2}} = \frac{\pi}{2}\ rad.$$

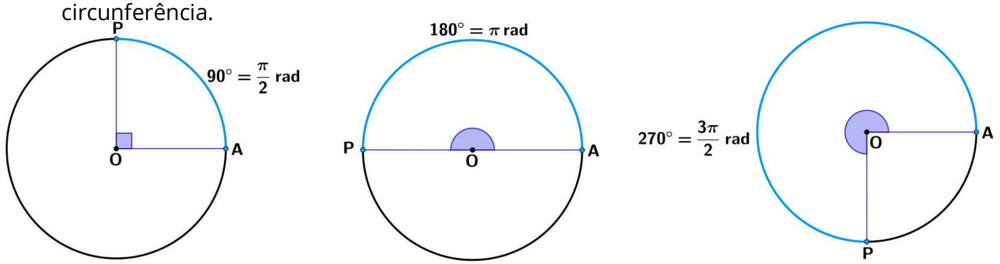
ângulo de 180º

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \_\_ & 360^\circ \\ x & \_\_ & 180^\circ \end{array} \Rightarrow 180^\circ \cdot 2\pi = 360^\circ \cdot x \Rightarrow x = \frac{180^\circ \cdot 2\pi^{\div 180}}{360^{\circ \div 180}} = \frac{2\pi^{\div 2}}{2^{\div 2}} = \pi\ rad.$$

ângulo de 270º

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \_\_ & 360^\circ \\ x & \_\_ & 270^\circ \end{array} \Rightarrow 270^\circ \cdot 2\pi = 360^\circ \cdot x \Rightarrow x = \frac{270^\circ \cdot 2\pi^{\div 90}}{360^{\circ \div 90}} = \frac{6\pi^{\div 2}}{4^{\div 2}} = \frac{3\pi}{2}\ rad.$$

Observe abaixo esses três ângulos e seus arcos AÔP correspondentes na circunferência.



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

A equação da circunferência

Considere agora uma circunferência de raio r desenhada no plano cartesiano de modo que seu centro coincida com a origem do plano cartesiano.
É possível determinar uma equação que representa essa circunferência:

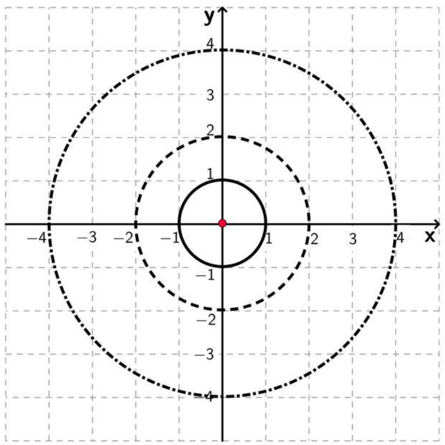
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Assim, observando a figura ao lado identificamos três circunferências:

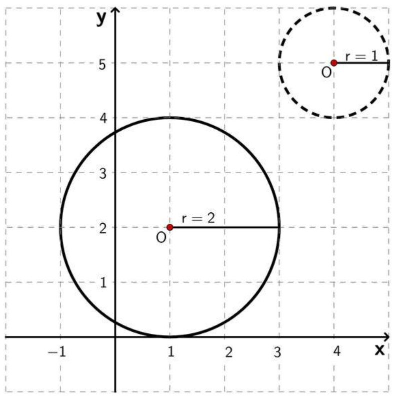
—— $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow r = 1.$

– – – $x^2 + y^2 = 4 \rightarrow r = 2.$

–·–· $x^2 + y^2 = 16 \rightarrow r = 4.$



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Considere agora uma circunferência de raio r desenhada no plano cartesiano de modo que seu centro coincida com o ponto O=(a,b).
É possível determinar uma equação que representa essa circunferência:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Assim, na a figura ao lado, identificamos duas circunferências:

—— $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4.$

– – – $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 1.$

Podemos, ainda, desenvolver as expressões, obtendo:

—— $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

– – – $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 10y + 40 = 0$

Atividades

ATIVIDADE 1

A equação da circunferência que possui centro no ponto C (2,– 3) e raio r = 5, pode ser representada por:

a) $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 25 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 13 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 25 = 0$

ATIVIDADE 2

Expresse os ângulos abaixo em radiano:

a) 70º

b) 150º

c) 290º

d) 350º

e) 450º

ATIVIDADE 3

Expresse os ângulos abaixo em grau:

a) $\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{5\pi}{6}$

e) $\frac{7\pi}{4}$

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 3 (Geometria e Trigonometria) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
   - p. 88-100.
2. **Volume 4 (Trigonometria e Sistemas Lineares) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
   - p. 39-56.

PORTAL DA OBMEP

A sessão “Radianos e a circunferência trigonométrica” trás vídeos, material teórico e exercícios que podem ser utilizados para incrementar o material proposto.

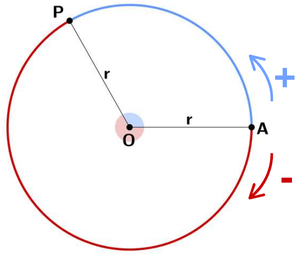
KHAN ACADEMY

A Lição “Conhecendo o radiano” da plataforma Khan Academy pode ser direcionada para os estudantes como forma de estudo extraclasse ou usada como teste em aula.

A CIRCUNFERÊNCIA ORIENTADA

Considere, num plano, uma circunferência de centro O e raio r.

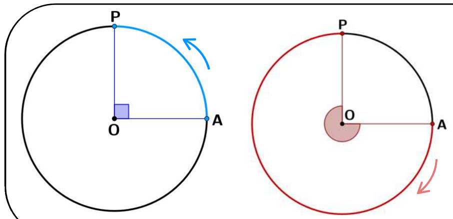
Defina um ponto A como ponto de referência, podemos orientar essa circunferência a partir desse ponto. Considera-se como orientação positiva o sentido anti-horário de percurso partindo de A e, consequentemente, a orientação negativa é o sentido horário de percurso partindo de A.



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Todo ponto na circunferência pode ser representado através de dois arcos: um no sentido anti-horário e outro no sentido horário. Observe alguns exemplos abaixo:

1

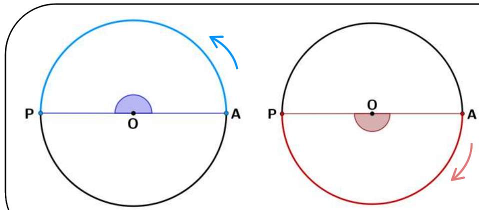


Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Arco $\widehat{AP}$ azul equivale a 90º

Arco $\widehat{AP}$ vermelho equivale a -270º

2

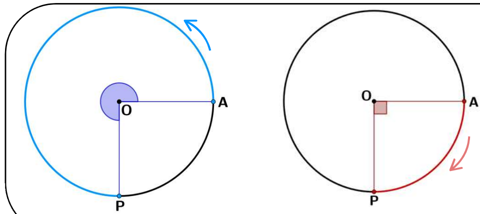


Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Arco $\widehat{AP}$ azul equivale a 180º

Arco $\widehat{AP}$ vermelho equivale a -180º

3



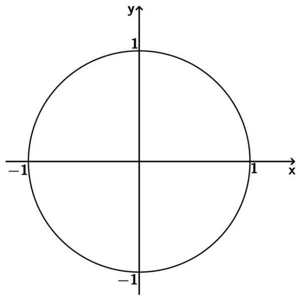
Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Arco $\widehat{AP}$ azul equivale a 270º

Arco $\widehat{AP}$ vermelho equivale a -90º

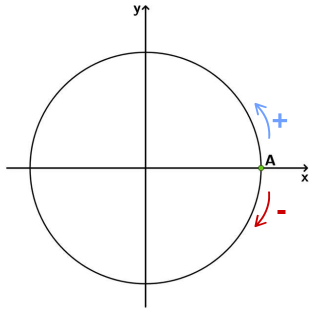
A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Considere, no plano cartesiano, a circunferência de centro na origem e raio 1. Observe abaixo:



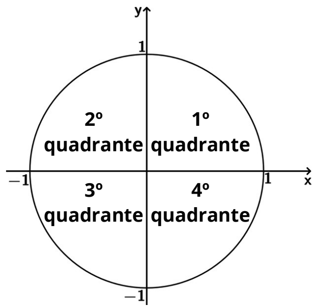
Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Consideramos agora o ponto A (1, 0) como origem de todos os arcos e orientamos essa circunferência como feito anteriormente: considera-se a orientação positiva como o sentido anti-horário de percurso partindo de A e a orientação negativa como o sentido horário de percurso partindo de A.



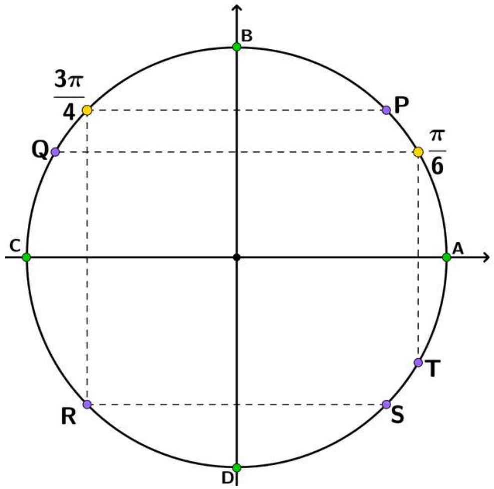
Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

A essa circunferência damos o nome de **circunferência trigonométrica** ou **ciclo trigonométrico**. Ainda podemos dividir a circunferência trigonométrica em 4 quadrantes:



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Exercício 3. Na circunferência trigonométrica abaixo temos alguns pontos marcados.



Com base nas informações presentes na imagem, associe os pontos P, Q, R, S e T aos seguintes valores:

( ) $-\frac{\pi}{4}$	( ) $\frac{5\pi}{6}$	( ) $\frac{5\pi}{4}$	( ) $\frac{\pi}{4}$	( ) $\frac{11\pi}{6}$

Solução: Pela simetria da Circunferência Trigonométrica é possível afirmar que o ponto T está associado ao número

$$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

O ponto Q está associado a

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

A distância de $\frac{3\pi}{4}$ a C é

$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi - 3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Assim, P está associado a $\frac{\pi}{4}$ e S a $-\frac{\pi}{4}$.

O ponto R está associado a

$$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + \pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

Portanto, a associação correta é:

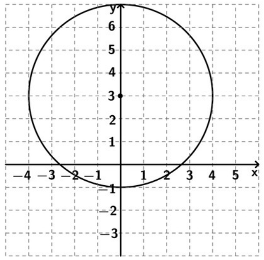
(S) $-\frac{\pi}{4}$	(Q) $\frac{5\pi}{6}$	(R) $\frac{5\pi}{4}$	(P) $\frac{\pi}{4}$	(T) $\frac{11\pi}{6}$

Exercícios Resolvidos

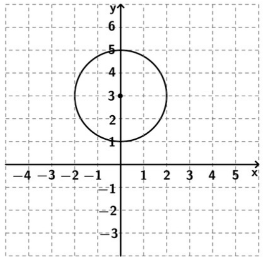
Exercício 1. Determine a representação gráfica da seguinte circunferência

$$x^2 + (y-3)^2 = 4.$$

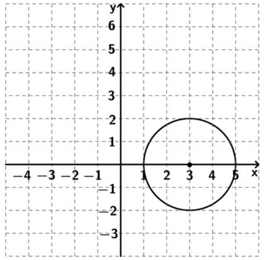
a)



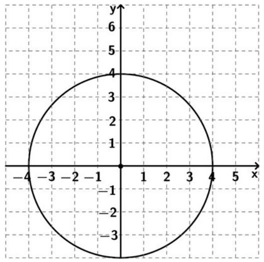
b)



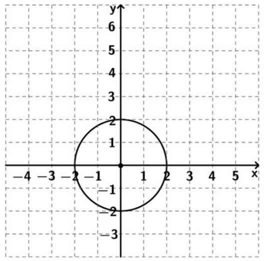
c)



d)



e)



Solução: Podemos reescrever a equação da circunferência da seguinte forma

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 = 2^2.$$

Desta forma, o centro da circunferência é O=(0, 3) e o raio é r=2. Portanto, a representação gráfica desta circunferência está corretamente representada na alternativa **b)**.

Exercício 2. No skate, algumas manobras levam em consideração o ângulo de giro que o atleta e o aparelho fazem no ar, como é o caso do 540º. Qual a representação deste ângulo em radianos?

Solução:

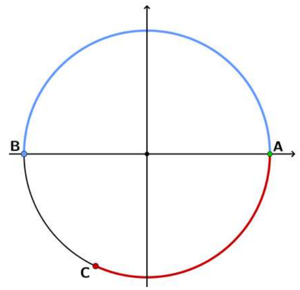
$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \_\_ & 360^\circ \\ x & \_\_ & 540^\circ \end{array} \Rightarrow 540^\circ \cdot 2\pi = 360^\circ \cdot x \Rightarrow x = \frac{540^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{9 \cdot 2\pi}{6} = \frac{6\pi}{2} = 3\pi \ rad.$$

Assim, 540º = 3π radianos.

O objetivo é associar cada número real a um ponto da circunferência trigonométrica, para isso, não vamos fazer distinção entre um número x, um ângulo de medida x radianos e um arco associado a um ângulo de x radianos.

Assim, por exemplo, o número π está localizado na extremidade do arco $\widehat{AB}$ cuja medida é igual a π radianos. Já o número -2 está localizado na extremidade do arco $\widehat{AC}$ cuja medida é igual a 2 radianos, no entanto, esse arco é contado no sentido horário, já que é negativo.

Veja, ao lado, a localização destes dois números na circunferência trigonométrica.



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

A imagem de π é B e a imagem de -2 é C.

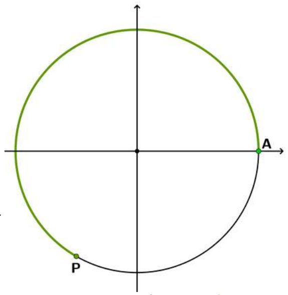
Se a medida do ângulo que desejamos associar a um ponto da circunferência trigonométrica estiver dada em graus, devemos, primeiramente, transformá-la para radianos.

Vamos localizar o ângulo de 240º no círculo trigonométrico. Inicialmente, transformaremos essa medida para radianos:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \_\_ & 360^\circ \\ x & \_\_ & 240^\circ \end{array} \Rightarrow 240^\circ \cdot 2\pi = 360^\circ \cdot x \Rightarrow x = \frac{240^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{2 \cdot 2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \ rad.$$

Assim, o ângulo de 240° está localizada entre os números π e $\frac{3\pi}{2}$, observe abaixo:

Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri



A imagem de 240º é P.

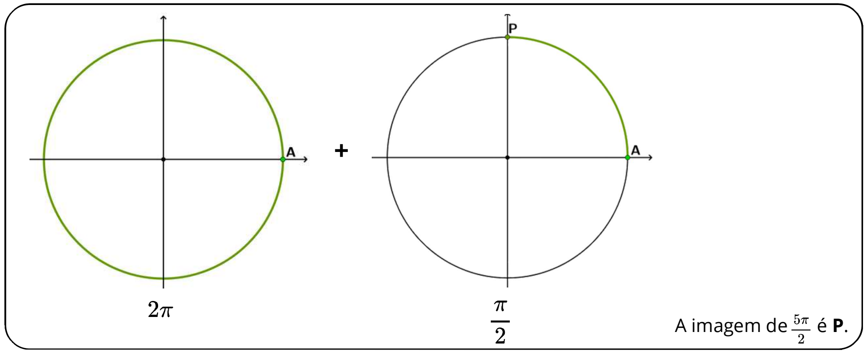
Quando desejamos localizar um número na circunferência trigonométrica e ele é maior do que 2π ou menor do que -2π, isso significa que devemos dar mais de uma volta na circunferência.

Vejamos como localizar $\frac{5\pi}{2}$ na circunferência trigonométrica:

Note que

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{4\pi + \pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Ou seja, para determinar a localização de $\frac{5\pi}{2}$ precisamos dar uma volta completa e mais $\frac{\pi}{2}$:



A imagem de $\frac{5\pi}{2}$ é **P**.

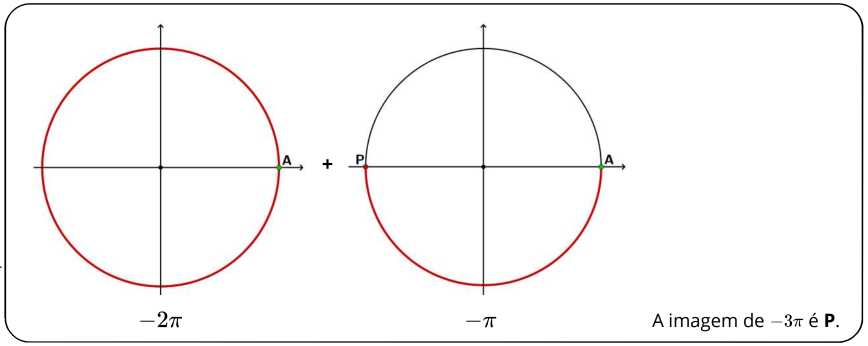
Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

O mesmo vale para valores negativos. Vamos localizar -3π na circunferência trigonométrica:

Note que

$$-3\pi = -2\pi - \pi$$

Ou seja, para determinar a localização de -3π precisamos dar uma volta completa no sentido horário e mais π, também no sentido horário:



A imagem de -3π é **P**.

Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Observe que, no primeiro caso, as imagens de $\frac{5\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ coincidem no mesmo ponto P.

Já no segundo caso, as imagens de -3π e $-\pi$ também coincidem no mesmo ponto P.

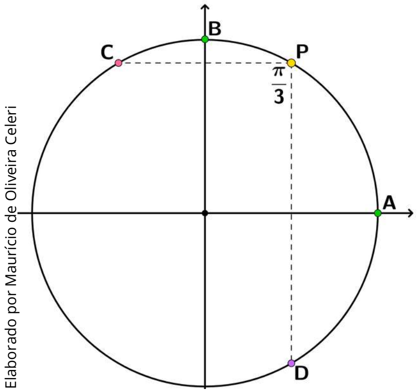
Nesses casos, dizemos que esses pontos determinam arcos **congruentes** na circunferência trigonométrica, já que suas imagens são determinadas pelo mesmo ponto.

Pensando na orientação positiva da circunferência trigonométrica, podemos dizer que -3π coincide com π.

Portanto, dizemos que $\frac{\pi}{2}$ é a **menor representação positiva** de $\frac{5\pi}{2}$ e que π é a menor representação positiva de -3π.

A **menor representação positiva** (ou **primeira representação positiva**) de um arco é um arco côngruo a ele presente na primeira volta no sentido positivo da circunferência trigonométrica.

Outro ponto de atenção na circunferência trigonométrica refere-se a sua simetria. Observe um exemplo abaixo:



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

O ponto P é imagem de $\frac{\pi}{3}$.

O ponto B é imagem de $\frac{\pi}{2}$.

Portanto, o arco $\overset{\frown}{AP}$ equivale a um ângulo de $\frac{\pi}{3}\ rad$, enquanto $\overset{\frown}{PB}$ equivale a um ângulo de $\frac{\pi}{6}\ rad$.

Dessa forma, o arco $\overset{\frown}{AD}$ equivale a um ângulo de $\frac{\pi}{3}\ rad$, enquanto $\overset{\frown}{BC}$ equivale a um ângulo de $\frac{\pi}{6}\ rad$.

Agora, observe que:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + \pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Assim, o ponto C é imagem de $\frac{2\pi}{3}$ e o ponto D é imagem de $\frac{5\pi}{3}$ ou de $-\frac{\pi}{3}$.