Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 3:** trigonometria: 506 exercícios propostos com resposta, 167 testes de vestibulares com resposta. 9 ed., São Paulo: Atual, 2013.

TÁBUA DE MARÉS. **TÁBUA DE MARÉS E SOLUNARES - Vitória 13 julho 2025**. Disponível em: https://tabuademares.com/br/espirito-santo/vitoria#google_vignette. Acesso em 18 de julho de 2025.

ATIVIDADES

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 3:** trigonometria: 506 exercícios propostos com resposta, 167 testes de vestibulares com resposta. 9 ed., São Paulo: Atual, 2013.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

QUINZENA **20** 27/10 a 31/10

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

FUNÇÃO COSSENO

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.	• Associar a um ponto P na circunferência trigonométrica um triângulo retângulo definido pelo ponto P, pela projeção do ponto P sobre o eixo x, o ponto (0,0). • Calcular o cosseno do arco AP, considerando o triângulo retângulo definido pelo ponto P, pela projeção do ponto P sobre o eixo x, o ponto (0,0). • Reconhecer que o cosseno de alfa pode ser definido pela abscissa do ponto P. • Determinar valores para o cosseno de ângulos de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°, bem como de arcos côngruos a eles. • Determinar valores para o cosseno em todos os quadrantes, utilizando inclusive o processo de redução ao primeiro quadrante. • Analisar a função cosseno, considerando o domínio, o contradomínio e a imagem. • Analisar o gráfico da função cosseno, considerando o período e a amplitude. • Reconhecer que a função cosseno pode ser utilizada para modelar fenômenos periódicos reais. • Resolver problemas envolvendo a função cosseno.	D051_M Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente). D126_M Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.

Caro(a) Professor(a),

Informamos que, a partir da Quinzena 14, o Material Estruturado incluirá todo o conteúdo relativo a esta quinzena, de modo a não haver mais duas capas e sintetizar o conteúdo em um único volume. Esperamos, assim, que essa mudança facilite o seu trabalho, planejamento e sua organização em sala de aula.

Contextualização

Seguindo o estudo das funções trigonométricas, este material abordará sobre a função cosseno.

Assim como a função seno, estudada na quinzena anterior, a função cosseno nos ajuda a compreender fenômenos naturais periódicos. Neste material daremos um enfoque especial para o fenômeno das marés.

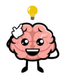
Se você já visitou o litoral, deve ter notado que em determinados momentos do dia a água do mar avança sobre a praia; já em outros momentos, a água do mar recua. Isso ocorre pois a força gravitacional da lua e do sol, junto com o movimento de rotação da terra, faz com que a água do mar sofra um deslocamento vertical, aumentando ou diminuindo a profundidade da água em um determinado ponto.

Veremos que o movimento das marés, na cidade de Vitória, pode ser descrito por uma função cosseno. Além disso, estudaremos que as funções seno e cosseno estão relacionadas por uma propriedade.

Bons estudos!

ATIVIDADE 8

Construa o gráfico da função $f(x) = -1 - \cos(x)$



Para essa tarefa utilizaremos apenas o domínio 0 a 2π rad.

ATIVIDADE 9

Uma máquina industrial opera 24 horas por dia, realizando ciclos de aquecimento e resfriamento para processar peças. A função que melhor modela a temperatura interna de um de seus componentes cruciais (em graus Celsius) é:

$$T(h) = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot h\right) + 20$$

Sabendo que h é o número de horas decorridas desde o início do ciclo de 24 horas da máquina (h = 0 representa o início do ciclo), determine:

a) A temperatura do componente no início do ciclo.

b) Qual é a temperatura do componente exatamente 12 horas após o início do ciclo?

ATIVIDADE 10

Determine o valor de **a** na função $f(x) = a + 4 \cdot \cos(x)$ para que $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -7$.

ATIVIDADE 7

Associe as funções a seguir a sua respectiva curva no gráfico:

$f(x) = 1 + \cos(x)$

$g(x) = -2 + \cos(x)$

$h(x) = 2 - \cos(x)$

Gráfico 1

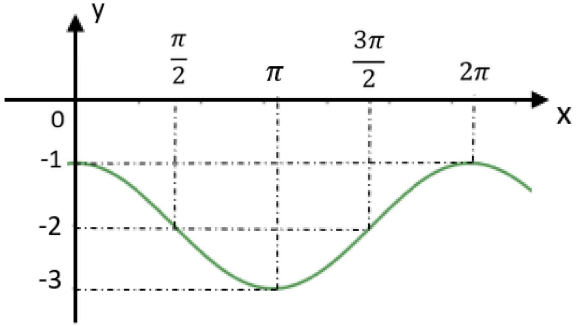


Gráfico 2

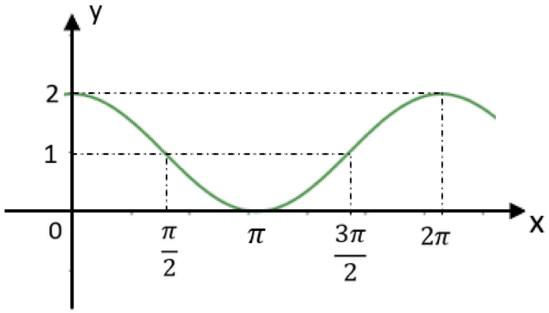
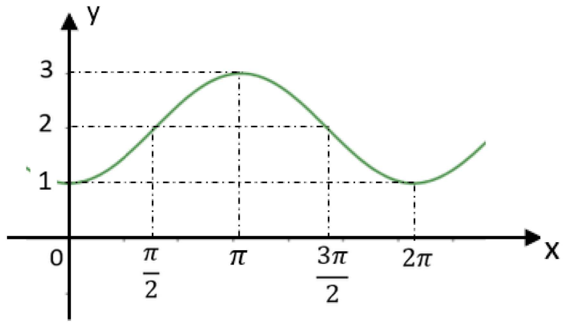


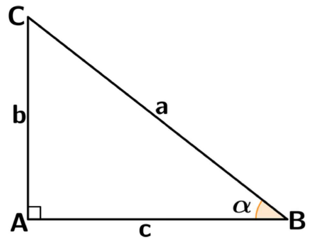
Gráfico 3



Conceitos e Conteúdos

O COSSENO NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considere um triângulo retângulo ABC como na figura abaixo:



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

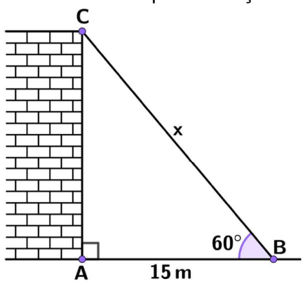
O cosseno de um ângulo α é a razão entre a medida do cateto adjacente a ele e a medida da hipotenusa, ou seja,

$$cos(\alpha) = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}.$$

Vejamos um exemplo:

Um engenheiro precisa fixar um cabo de sustentação partindo do solo até o topo de um prédio. A extremidade fixa do cabo no solo se encontra a 15 m do prédio. Sabendo que o cabo está completamente esticado e forma com o solo um ângulo de 60°, qual o comprimento mínimo do cabo a ser utilizado pelo engenheiro?

Inicialmente é necessário criar uma representação deste problema:



$sen(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$

$tg(60^\circ) = \sqrt{3}$

Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Em relação ao ângulo $\hat{B}$ temos o cateto adjacente e desejamos determinar a hipotenusa, portanto, usaremos o cosseno:

$$cos(60^\circ) = \frac{15}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 15 \cdot 2 = 30\ m.$$

Vejamos, a partir de agora, como usar a circunferência trigonométrica para determinar o cosseno de um ângulo.

O COSSENO NA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

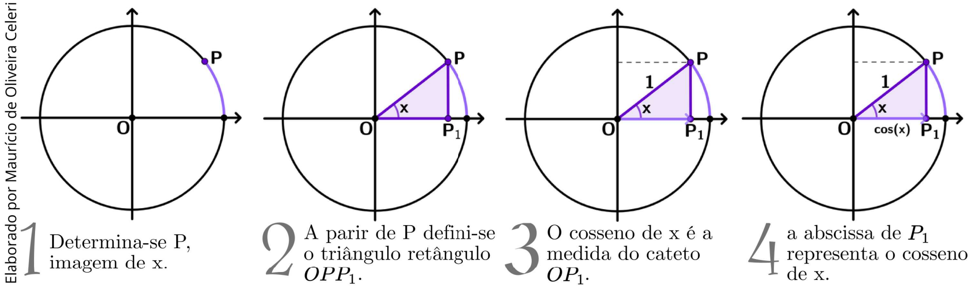
Considere um número real qualquer e seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. A partir desse ponto é possível definir um triângulo retângulo OPP_1, onde P_1 é a projeção de P sobre o eixo horizontal. O ângulo Ô mede x e OP é um raio, logo sua medida é 1.

Como visto anteriormente, cos(x) é a razão entre o cateto adjacente, OP_1, e a hipotenusa OP, assim, cos(x) é a medida do cateto OP_1.

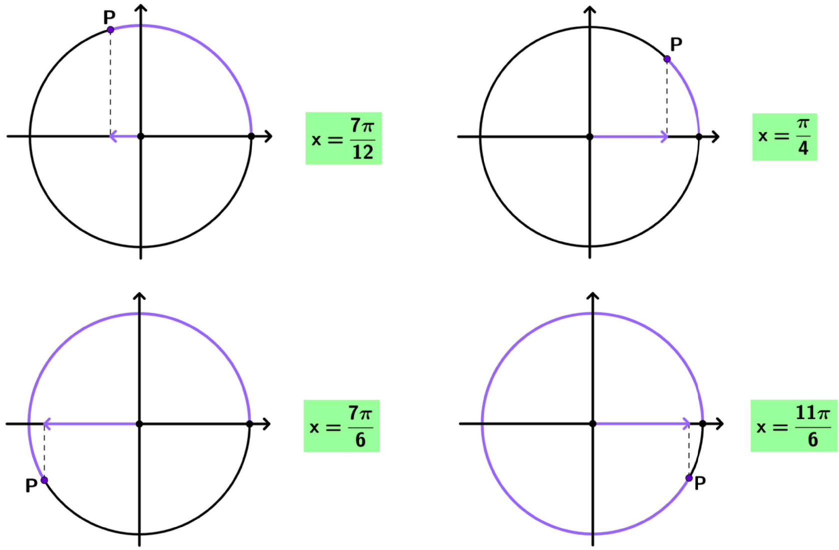
Desta forma, concluímos que a abscissa de P_1 representa o cosseno de x.

Esse processo pode ser observado nas imagens abaixo:

Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri



Para cada número x existe uma única imagem P e cada imagem P tem um único valor para cos(x). Observe abaixo a representação do cosseno de alguns valores.



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

ATIVIDADE 3

Se $\cos\frac{11\pi}{36} \cong 0{,}57$, determine o valor de $\cos\frac{47\pi}{36}$.

ATIVIDADE 4

Após a administração intravenosa de um determinado medicamento, a concentração desse medicamento na corrente sanguínea de um paciente, em miligramas por litro (mg/L), pode ser modelada por uma função trigonométrica do tempo. Em vez de um modelo simples de decaimento exponencial, para alguns medicamentos, a absorção e eliminação podem seguir um padrão oscilatório no início, devido a complexos processos metabólicos e de distribuição no corpo. Considere que a concentração C(t) do medicamento na corrente sanguínea, em mg/L, em função do tempo t, em horas, é dada por:

$$C(t) = 5 + 3\left(1 - \cos\frac{\pi t}{4}\right)$$

Qual a concentração de medicamento na corrente sanguínea após 2 horas da administração?

ATIVIDADE 5

Considerando a função $f(x) = 2 + \cos(x)$

a) Que tipo de valores pode o ângulo **x** assumir? Existem restrições para os ângulos?

b) Qual é o seu domínio?

c) Qual é o seu contradomínio?

d) Quais são os valores de máximo e de mínimo que essa função pode atingir? Em que ângulos esses valores ocorrem?

e) Qual é o conjunto imagem dessa função?

ATIVIDADE 6

Sendo $y = 3 - 2 \cdot \cos(x)$ responda:

a) O que o número "**– 2**" faz com o gráfico e a imagem da função cos(x) original?

b) O que o número "**+ 3**" faz com o gráfico e a imagem da função cos(x) original?

c) Qual é o conjunto imagem dessa função? Expresse-o na forma de intervalo.

Atividades

ATIVIDADE 1

Preencha o quadro abaixo com todas as informações solicitadas.

Ângulo (Graus)	Ângulo (Radianos)	Quadrante (ou Eixo)	Ângulo de Referência no 1º Quadrante	Sinal do Cosseno	Valor do Cosseno
0º			----		
30º			----		
45º			----		
60º			----		
90º			----		
120º					
135					
150º					
180º			----		
210°					
225º					
240º					
270º			----		
300º					
315º					
330º					
360º			----		

ATIVIDADE 2

Dado um **arco x** no ciclo trigonométrico, e sabendo que **sen (x) = 0,8**, encontre o valor de **cos (x)**.

PROPRIEDADES

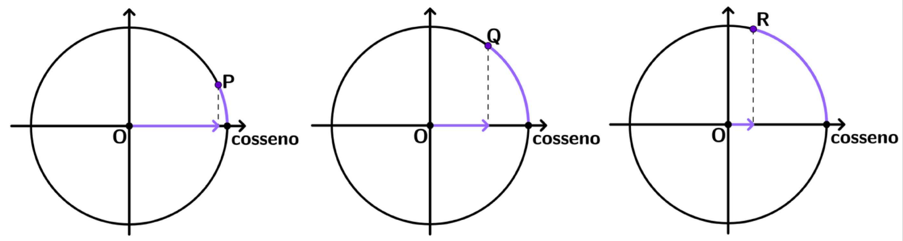
- Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então cos(x) é positivo.
- Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então cos(x) é negativo.
- O maior valor assumido pelo cosseno é 1 e o menor valor assumido é -1.

As propriedades podem ser observadas nas imagens da página anterior.

- Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrantes, então cos(x) é decrescente.

Observe abaixo o exemplo para o 1º quadrante:

1º quadrante

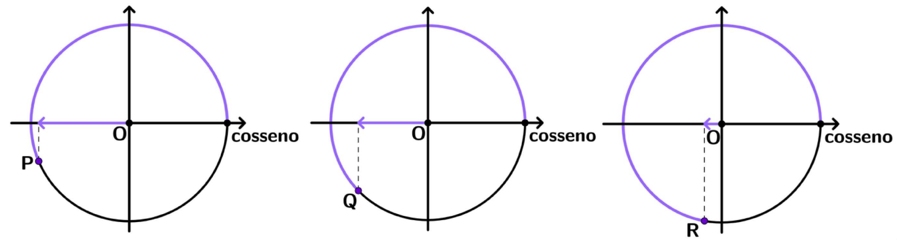


Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

- Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrantes, então cos(x) é crescente.

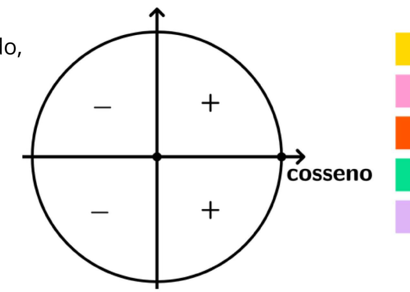
Observe abaixo o exemplo para o 3º quadrante:

3º quadrante



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

O sinal do seno pode ser representado, esquematicamente, da seguinte forma:

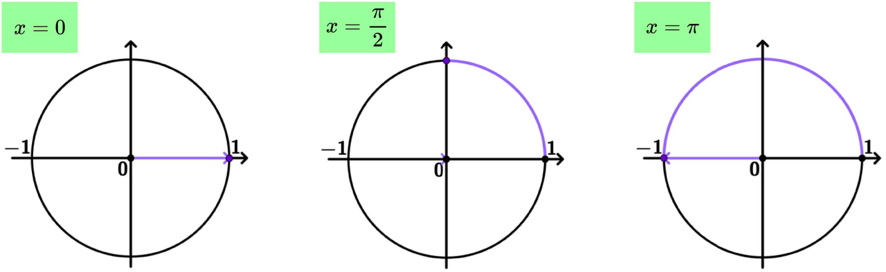


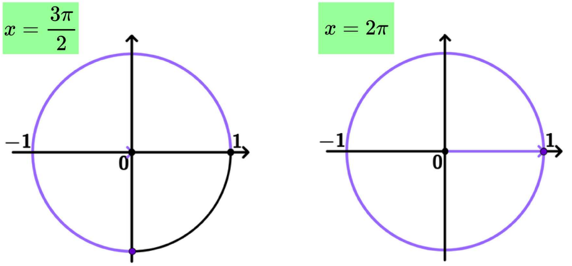
Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Alguns valores de cosseno já são de nosso conhecimento, vamos relembrar:

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Observe, abaixo, a determinação de mais alguns valores de seno:



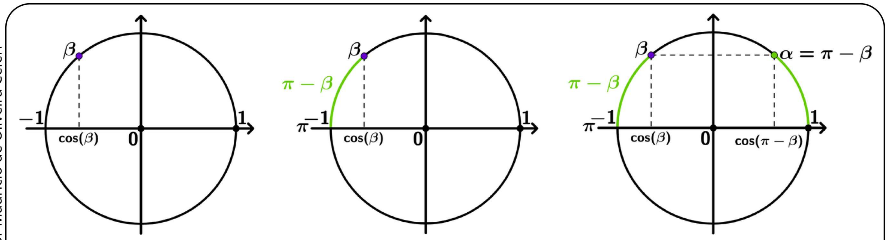


$$cos\,(0) = 1$$
$$cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$cos\,(\pi) = -1$$
$$cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$
$$cos\,(2\pi) = 1$$

Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Dado um valor qualquer pertencente do 2º ao 4º quadrante, é possível determinar um valor do 1º quadrante que possua cosseno com a mesma magnitude do valor requerido. Chamamos esse processo de **redução ao primeiro quadrante**. Vejamos como proceder em cada caso:

2º Quadrante



Dado um valor β pertencente ao segundo quadrante.

Calcula-se a diferença entre π e β (π - β).

Marca-se, no primeiro quadrante o valor α = π - β. Assim, $cos\,(\beta) = -cos\,(\pi - \beta)$

Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 3 (Geometria e Trigonometria) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
   - p. 101-105; 134-139.
2. **Volume 4 (Trigonometria e Sistemas Lineares) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
   - p. 20-28; 57-61; 64-76.

PORTAL DA OBMEP

A sessão “Funções trigonométricas” apresenta vídeos, material teórico e exercícios que podem ser utilizados para incrementar o material proposto.

GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO

Durante a construção do gráfico da função cosseno, alguns estudantes podem apresentar dificuldade ou dúvida na compreensão da forma do gráfico. Pensando nisso, esta aplicação do GeoGebra foi pensada para mostrar, de forma intuitiva a construção de um período da função cosseno.

KHAN ACADEMY

As atividades “Ciclo trigonométrico” e “Círculo trigonométrico (com radianos)”da plataforma Khan Academy podem ser utilizadas para ajudar na compreensão dos conceitos deste material e revisão dos conceitos do material anterior.

Ciclo trigonométrico

Círculo trigonométrico (com radianos)

Exercício 2. (ENEM 2010) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5\ 865}{1 + 0,15 \cdot cos(0,06t)}.$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S.
O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

a) 12 765 km
b) 12 000 km
c) 11 730 km
d) 10 965 km
e) 5 865 km

Solução: Devemos determinar o valor máximo e mínimo de r. Observe que o mínimo é atingido quando cos(0,06t) = -1 e o máximo quando cos(0,06t) = 1, assim:

$$S = \frac{5\ 865}{1 + 0,15 \cdot (-1)} + \frac{5\ 865}{1 + 0,15 \cdot 1} = \frac{5\ 865}{1 - 0,15} + \frac{5\ 865}{1 + 0,15} = \frac{5\ 865}{0,85} + \frac{5\ 865}{1,15}$$

$$S = 6\ 900 + 5\ 100 = 12\ 000\ km$$

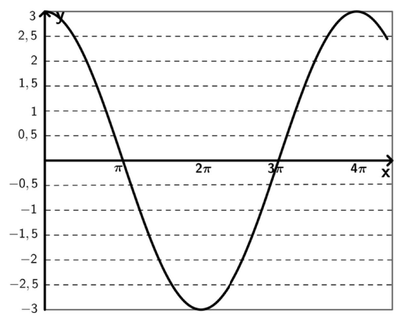
Assim, a alternativa correta é a alternativa **b**.

Exercício 3. O gráfico ao lado corresponde a uma função da forma

$$f(x) = m \cdot cos(n \cdot x), \quad m, n \in \mathbb{R}.$$

É correto afirmar que m e n valem, respectivamente,

a) 0,5 e 3
b) 0,5 e 2
c) 2 e 2
d) 3 e 3
e) 3 e 0,5

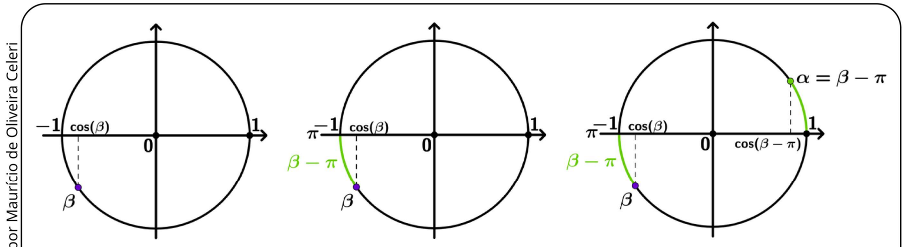


Solução: Note que o período dessa função é 4π e sua imagem é I=[-3,3]. Além disso, o valor de m altera a imagem da função e n altera o período da função. Daí, tiramos que a função foi multiplicada por 3, logo m=3.
Analisando o período, obtemos:

$$p = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow n = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Portanto, a alternativa correta é a alternativa **e**.

3º Quadrante

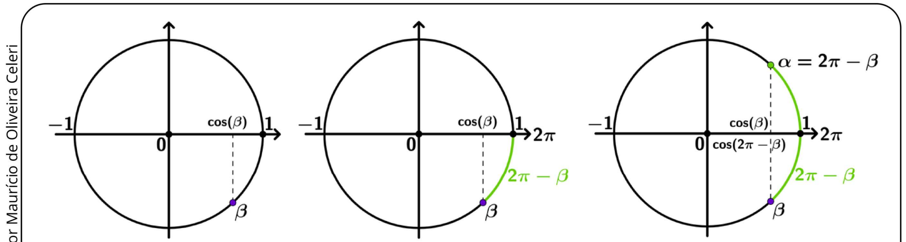


Dado um valor β pertencente ao terceiro quadrante.

Calcula-se a diferença entre β e π (β - π).

Marca-se, no primeiro quadrante o valor α = β - π. Assim, $cos\,(\beta) = -cos\,(\beta - \pi)$

4º Quadrante



Dado um valor β pertencente ao quarto quadrante.

Calcula-se a diferença entre 2π e β (2π - β).

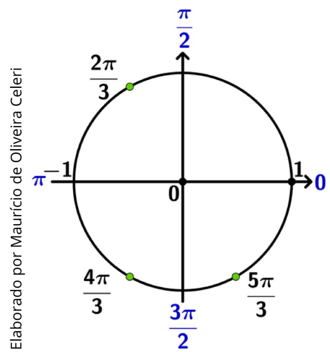
Marca-se, no primeiro quadrante o valor α = 2π - β. Assim, $cos\,(\beta) = cos\,(2\pi - \beta)$

Nos 2° e 3° quadrante, o cosseno é negativo, então, quando fazemos a redução ao primeiro quadrante é importante se atentar ao sinal, pois os valores serão negativos.

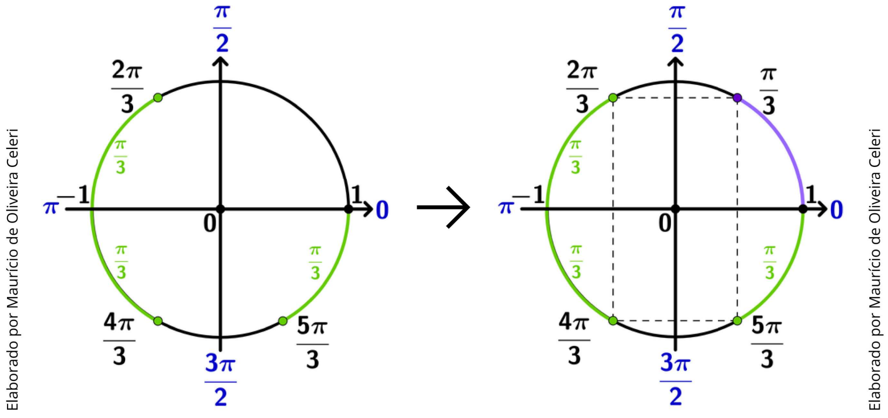
Dessa forma, conhecendo os valores do cosseno dos ângulos associados ao primeiro quadrante, é possível determinar o valor do cosseno de qualquer ângulo.

Vamos calcular o cosseno de: $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

Primeiramente, vamos determinar as imagens desses valores no ciclo trigonométrico:



Para cada um destes valores faremos a redução ao primeiro quadrante:



Dessa forma, obtemos:

$$\begin{cases} cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{3}\right). \\ cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Como $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, temos,

$$\begin{cases} cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}. \\ cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Caso seja de interesse calcular o cosseno de valores menores do que 0 ou superiores a 2π, devemos primeiro fazer sua identificação na primeira volta da circunferência trigonométrica, como visto na quinzena 18.

Por exemplo, vamos determinar o valor do cosseno de 2π e $\frac{43\pi}{6}$:

Note que a imagem de 2π coincide com a imagem de 0 na circunferência trigonométrica e $\frac{43\pi}{6} = \frac{36\pi + 7\pi}{6} = 6\pi + \frac{7\pi}{6}$.

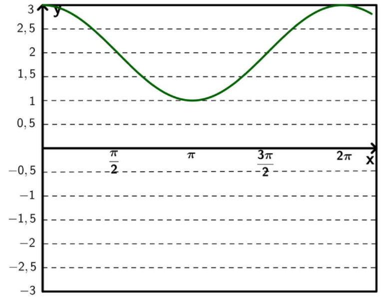
Portanto, $cos(2\pi) = cos(0) = 1 \ \ e \ \ cos\left(\frac{43\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como pode ser observado na figura a seguir:

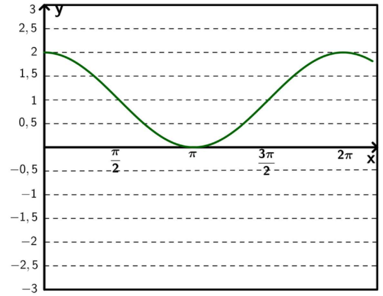
Exercícios Resolvidos

Exercício 1. Determine a representação gráfica da seguinte função $f(x) = 1 + 2cos(x)$.

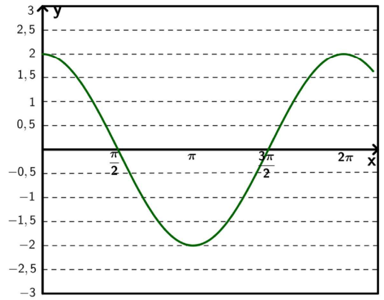
a)



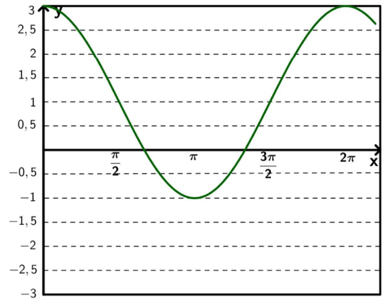
b)



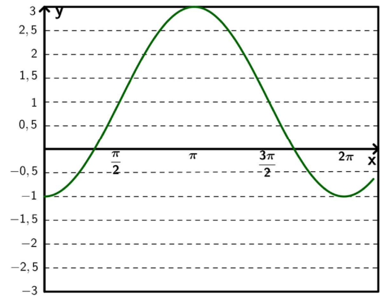
c)



d)



e)



Solução: Note que a função dada possui uma alteração na imagem em relação à função original, com a=1 e b=2. Neste caso a imagem da função passa a ser I=[1-2, 1+2]=[-1,3]. As alternativas que contemplam esta imagem são d ou e. Agora, note que $f(0) = 1 + 2cos(0) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$.
Assim, o gráfico desta função está representado na alternativa **d**.

Vejamos agora uma situação envolvendo aplicações da função cosseno:

As marés são fenômenos cíclicos de elevação e abaixamento das águas do mar. Esse fenômeno afeta navegações, ecossistemas marítimos, pesca e, também, as atividades turísticas e práticas de esportes náuticos. A tábua de marés é um site que monitora o nível das marés ao redor do mundo. As informações podem ser acessadas pelo link ao lado.

Tábua de Marés

Pelas informações fornecidas no site, o nível da maré no município de vitória, no dia 13 de julho de 2025, pode ser, aproximadamente, descrito pela seguinte função:

$$M = 0,75 + 0,55 \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{2\pi}{3}\right),$$

onde M é nível da Maré, em metros, e t é o tempo, em horas, contado a partir de 0h.

Como o evento é cíclico, podemos determinar seu período:

$$p = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 2\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 12\ h.$$

Assim, aproximadamente, a cada 12h o nível da maré se repete.

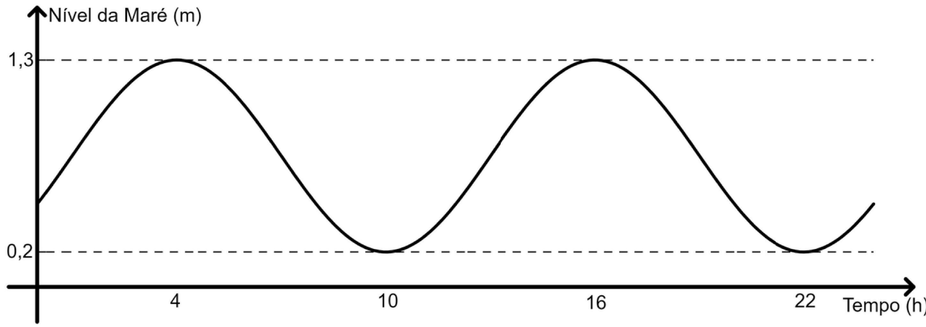
Como o cosseno assume o valor máximo 1 e mínimo -1, é possível notar que a maré alta alcançou 0,75 + 0,55 = 1,3 m de altura, enquanto a maré baixa alcançou 0,75 - 0,55 = 0,2 m de altura. Portanto, a amplitude foi de 1,1m e a imagem dessa função é I = [0,2; 1,3].

Agora, vamos determinar em qual(is) horário(s) do dia (de 0h a 24h) a maré alcançou 1,3 m de altura, ou seja, quando aconteceu a maré alta. Note que o nível máximo é alcançado quando o cosseno atinge seu máximo, assim,

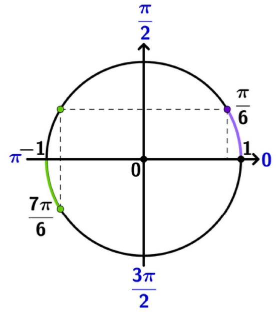
$$\frac{\pi}{6}t - \frac{2\pi}{3} = 0 + 2k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6}t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{6}{\pi}\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = 4 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja, a maré alta ocorre às 4h e às 16h, no período de 1 dia. De forma similar, é possível observar que a maré baixa ocorre às 10h e às 22h.

O gráfico abaixo ilustra a variação da Maré, de acordo com a função apresentada:



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Então, podemos ampliar nossa tabela de valores de cosseno:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

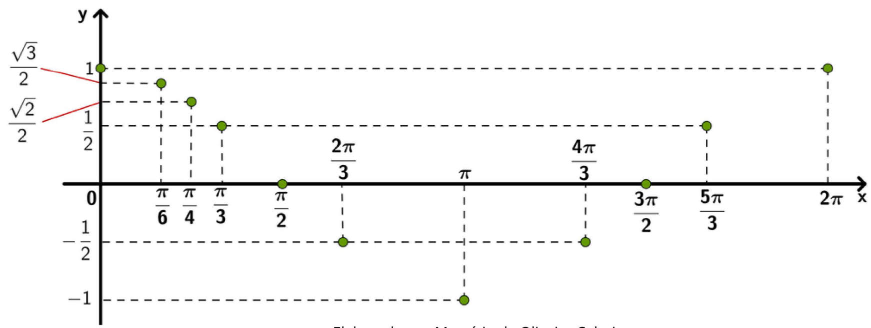
A FUNÇÃO COSSENO

Chamamos de função cosseno à função que associa cada valor real x ao valor de seu cosseno, isso é,

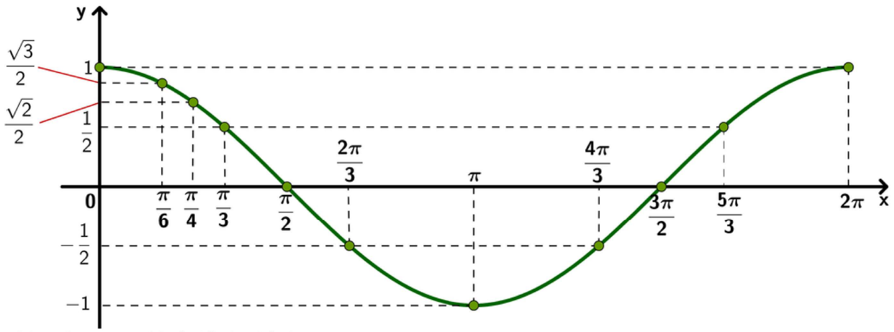
$$f(x) = cos(x).$$

Todas as propriedades vistas anteriormente para o cosseno valem para a função cosseno.

De posse dos valores de cosseno, podemos construir o **gráfico da função cosseno**:



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$, no gráfico acima mostramos apenas um período da função cosseno, isso é, a partir de 2π o mesmo desenho se repete e, para valores menores do que zero o mesmo ocorre.

Vejamos algumas propriedade da função cosseno:

- **Domínio** de f(x)=cos(x) é $\mathbb{R}$;
- **Imagem** de f(x)=cos(x) é I=[-1,1];
- **Período** de f(x)=cos(x) é p=2π;
- **Amplitude** de f(x)=cos(x) é 2 (comprimento da imagem).

O valor máximo da função cosseno ocorre quando $x = 0 + 2k\pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, isso é, em 0 ou qualquer volta completa a partir deste ponto. O valor mínimo é observado em $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

De forma geral, sendo a, b, c e d números reais, a função cosseno pode apresentar a seguinte forma:

$$f(x) = a + b \cdot cos\,(cx + d).$$

Vejamos o efeito de cada uma dessas constantes na função:

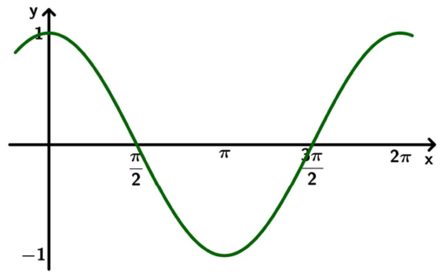
- **a:** translada o gráfico em **a** unidade na vertical. Se a>0, o deslocamento é para cima; se a<0, o deslocamento é para baixo;
- **b:** afeta a amplitude da função. Caso a=0, a função possui imagem igual a I=[-b,b], se a≠0, a imagem é I=[a-b,a+b];
- **c:** afeta o período da função, que passa de $p = 2\pi$ para $p = \frac{2\pi}{c}$;
- **d:** em conjunto com c, provoca o deslocamento de $-\frac{d}{c}$ unidades horizontalmente.

Observe, a seguir, como o gráfico da função f(x)=cos(x) através das mudanças discutidas anteriormente.

> Você deve ter notado até aqui que as funções seno e cosseno se comportam de forma similar: isso não ocorre por acaso. Uma relação interessante entre essas funções é
>
> $$sen(x) = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \;\; e \;\; cos(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$
>
> Ou seja, apesar de serem funções distintas, apresentam uma relação onde uma pode ser obtida a partir da outra.

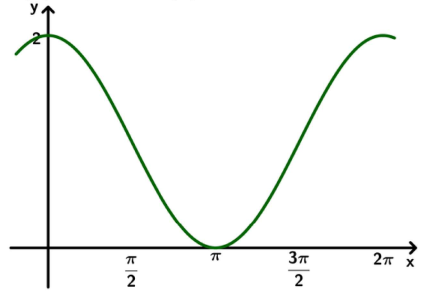
Função original

$f(x) = cos(x)$



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

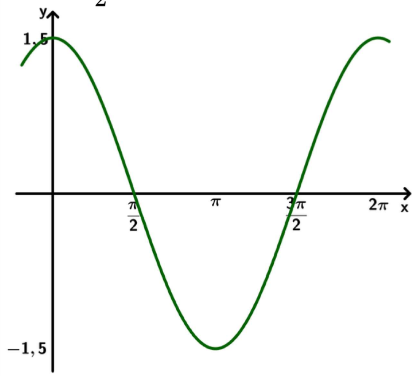
$f(x) = 1 + cos(x)$



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

O gráfico foi deslocado em 1 unidade para cima, o período continua sendo p=2π e a imagem é I=[0,2].

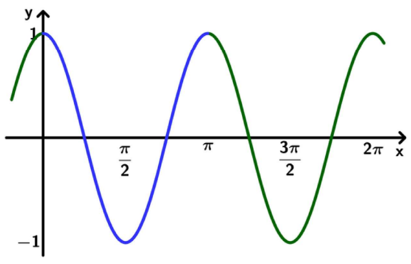
$f(x) = \frac{3}{2} \cdot cos(x)$



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

O gráfico sofre uma mudança na amplitude, interferindo na imagem, que passa a ser $I = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$. O período é p=2π.

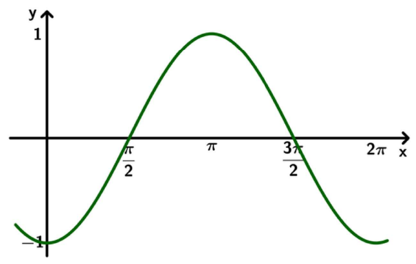
$f(x) = cos(2x)$



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

O gráfico sofre apenas uma mudança no período, que passa a ser p=π.

$f(x) = cos\,(x - \pi)$



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

O gráfico sofre deslocamento de π para a direita. Nem imagem e nem o período são alterados.