GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

9º Ano | Ensino Fundamental Anos Finais

MATEMÁTICA

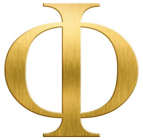
Números irracionais e reais

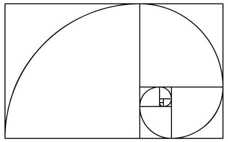
HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO SAEB	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
EF09MA01 - Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). **EF09MA02** - Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.	• Reconhecer que o lado de um quadrado e sua diagonal são incomensuráveis; • Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica; • Estimar a localização de alguns números irracionais na reta numérica: raízes quadradas não exatas, pi e phi (número de ouro). • Comparar ou ordenar números reais, com ou sem suporte da reta numérica.	**9N1.10** Determinar uma fração geratriz para uma dízima periódica. **9N1.3** Identificar números racionais ou irracionais. **9N1.4** Comparar OU ordenar números reais, com ou sem suporte da reta numérica, OU aproximar números reais para múltiplos da potência de 10 mais próxima.	**D009_M** Corresponder pontos da reta numérica a números racionais. **D021_M** Identificar a localização de números inteiros na reta numérica. **D013_M** Reconhecer as diferentes representações de um número racional. **D033_M** Identificar a localização de números irracionais na reta numérica.

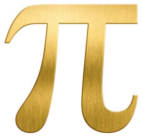
Caro(a) Professor(a),

Informamos que, a partir da Quinzena 14, o Material Estruturado incluirá todo o conteúdo relativo a esta quinzena, de modo a não haver mais duas capas e sintetizar o conteúdo em um único volume. Esperamos, assim, que essa mudança facilite o seu trabalho, planejamento e sua organização em sala de aula.

Contextualização


Design: TiTi Lee / Fonte: canva


Design: Koblizeek / Fonte: canva


Design: TiTi Lee / Fonte: canva

A razão áurea é um número que fascina a humanidade há séculos. Conhecida também como número de ouro, proporção áurea ou simplesmente phi (representado pelas letras gregas φ ou Φ), essa razão aparece de maneira surpreendente em diversas áreas do conhecimento humano. Desde a arte até a arquitetura, passando pela biologia e até mesmo pela astronomia, ela se destaca por estar associada a formas consideradas harmoniosas e esteticamente agradáveis. Civilizações antigas, como os gregos, acreditavam que essa proporção possuía propriedades quase místicas.

A razão áurea é um número irracional, assim como o famoso π (pi). Isso significa que sua representação decimal é infinita e não periódica, ou seja, ela nunca termina e não apresenta uma repetição regular de dígitos. Estima-se que seu valor aproximado seja 1,6180339887..., mas é impossível escrevê-lo de forma exata com algarismos decimais ou fração comum. Essa característica já revela uma das maravilhas da matemática: certos números fogem completamente dos padrões mais simples de representação.

Apesar de toda a aura mística que envolve o número Φ, é importante lembrar que ele é, antes de tudo, um conceito matemático. Sua presença em estruturas naturais, como o arranjo das pétalas de flores ou a disposição das sementes em um girassol, não deve ser interpretada como algo sobrenatural, mas como um convite para observar o mundo por meio de uma lente matemática. O estudo desses padrões amplia nosso entendimento sobre o universo e torna a matemática ainda mais fascinante.

Nesta semana, iremos estudar como identificar números racionais como aqueles que podem ser escritos como razão entre dois números inteiros a e b, tal que b seja diferente de zero; reconhecer que dízimas periódicas são números racionais; determinar uma fração geratriz para uma dízima periódica. Também vamos reconhecer que o lado de um quadrado e sua diagonal são incomensuráveis; reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica; e, por fim, estimar a localização de alguns números irracionais na reta numérica, como raízes quadradas não exatas, pi e phi (número de ouro).

Referências

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

DANTE, L. R. Teláris Essencial: Matemática 9o ano (ALUNO). SÃO PAULO, SP: Editora Ática S.A, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. A Conquista Matemática 9º Ensino Fundamental – Anos Finais. São Paulo, SP: Editora FTD, 2022.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. Circunferências. Portal da OBMEP. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=30. Acesso em: 20 maio 2025.

ORIENTAÇÕES CURRICULARES. Currículo ES, 2024. Disponível em: Orientações curriculares. Currículo ES, 2024. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares/. Acesso em: 28 de maio de 2025.. Acesso em: 28 maio 2025.

TEIXEIRA, L. A. SuperAÇÃO! Matemática 8º ano: Manual do Professor. Moderna, 2022.

TEIXEIRA, L. A. SuperAÇÃO! Matemática 9º ano: Manual do Professor. Moderna, 2022.

WARLES, Prof. D11 (9º ANO - Mat.). Blog do Prof. Warles. [S.l.]: Google Docs, [s.d.]. Disponível em: https://docs.google.com/document/d/1zAFKnm4xdH4K5dzf9VAGiRXUmHaZEE1M/edit. Acesso em: 29 maio 2025.

ATIVIDADE 7

Observe os seguintes números:

$$\frac{7}{3},\ \sqrt{9},\ \sqrt{5},\ \frac{5}{6}$$

Colocando esses números em ordem crescente, a alternativa correta é:

A) $\frac{5}{6},\ \sqrt{5},\ \frac{7}{3},\ \sqrt{9}$
B) $\sqrt{5},\ \frac{5}{6},\ \sqrt{9},\ \frac{7}{3}$
C) $\sqrt{9},\ \sqrt{5},\ \frac{7}{3},\ \frac{5}{6}$
D) $\sqrt{9},\ \frac{5}{6},\ \sqrt{5},\ \frac{7}{3}$

ATIVIDADE 8

Dois famosos números aparecem com frequência tanto na matemática quanto na natureza: o número π (pi), que representa a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro de um círculo, e o número φ (phi), também chamado de número de ouro ou proporção áurea, associado a proporções harmônicas presentes em obras de arte, na arquitetura e em elementos naturais, como plantas e conchas.

Considere:

- π ≈ 3,141592654...
- φ ≈ 1,618033989...

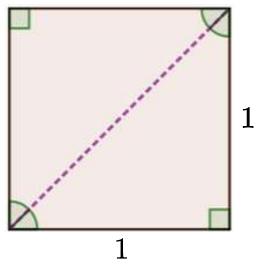
Assinale a alternativa correta:

A) Tanto π quanto φ são números irracionais, pois não podem ser expressos como uma fração exata entre dois números inteiros, e suas casas decimais continuam infinitamente sem repetição ou padrão.
B) O número π é irracional, mas φ é racional, pois aparece na arte e na natureza.
C) O número φ é irracional, mas π é um número racional, pois frequentemente utilizamos a aproximação 3,14 para representar seu valor.
D) Ambos π e φ são números racionais, pois podem ser expressos como uma fração exata entre dois números inteiros.

Conceitos e Conteúdos

CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Nem todos os números com infinitas casas decimais apresentam um padrão de repetição. Quando os algarismos decimais se estendem indefinidamente sem formar uma sequência que se repete, estamos diante de um número irracional. Esses números não podem ser escritos na forma de fração exata, pois sua parte decimal é infinita e não periódica. O conjunto dos números irracionais inclui exemplos famosos como π (pi), usado em cálculos de circunferência, e $\sqrt{2}$, a raiz quadrada de 2, que aparece em contextos geométricos. Eles se distinguem dos racionais justamente por não possuírem uma fração geratriz e por apresentarem uma sequência decimal que nunca se repete de forma regular.

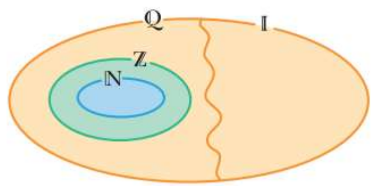


Desing: Sketchify Education
Fonte: Canva

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2}$$

Em um quadrado, a relação entre o lado e a diagonal pode ser estudada por meio do Teorema de Pitágoras. Quando aplicamos esse teorema em um quadrado de lado 1, descobrimos que a diagonal mede $\sqrt{2}$, um número que não pode ser escrito como fração. A razão entre a diagonal e o lado é $\sqrt{2}$, que é um número irracional. Isso significa que o lado e a diagonal não têm uma medida comum exata — eles são incomensuráveis. Essa descoberta, que remonta aos antigos gregos, foi um dos primeiros indícios da existência dos números irracionais.

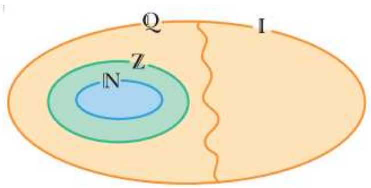
No diagrama de Venn ao lado, está representada a relação entre os conjuntos dos números naturais (ℕ), dos inteiros (ℤ), dos racionais (ℚ) e dos irracionais (𝕀).



Fonte: Texeira, 2022.

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

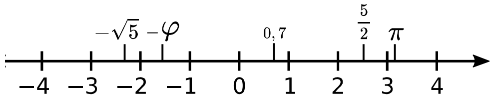
Quando reunimos todos os números racionais (que podem ser escritos como frações) com os números irracionais (que possuem casas decimais infinitas e não periódicas), formamos um conjunto ainda maior: o conjunto dos números reais. Esse conjunto é representado pela letra $\mathbb{R}$ e inclui todos os tipos de números que usamos no dia a dia e na matemática escolar: naturais, inteiros, decimais, frações e raízes não exatas. Ou seja, qualquer número que possa ser representado em uma reta reta numérica pertence ao conjunto dos números reais.



$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Fonte: Teixeira, 2022.

Uma reta numérica que representa os números reais é chamada reta real.



RAIZ QUADRADA EXATA

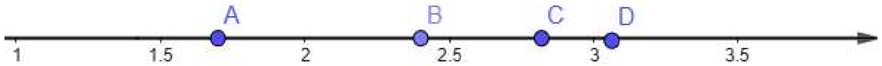
A raiz quadrada exata de um número racional não negativo **a** é o número racional não negativo que, elevado ao quadrado, resulta em **a**. Por exemplo:

- A raiz quadrada de 36 é 6, pois $6^2 = 36$, e 6 > 0. Indica-se $\sqrt{36}$.
- A raiz quadrada de $\frac{1}{4}$ é $\frac{1}{2}$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, e $\frac{1}{2} > 0$. Indica-se $\sqrt{\frac{1}{4}}$.
- A raiz quadrada de 0,0625 é 0,25, pois $0,25^2 = 0,0625$ e, 0,25 > 0. Indica-se $\sqrt{0,0625}$.

Note que todo número quadrado perfeito tem uma raiz quadrada exata.

ATIVIDADE 4

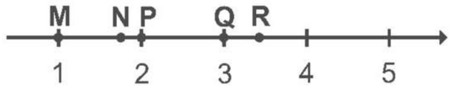
Na reta numérica abaixo, qual ponto está mais próximo da localização do número irracional $\sqrt{6}$?



A) A
B) B
C) C
D) D

ATIVIDADE 5

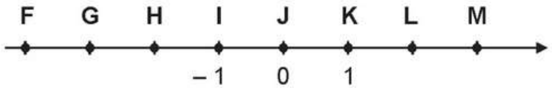
Observe abaixo cinco pontos representados na reta real dividida em segmentos de mesma medida.



O número $2\sqrt{3}$ está melhor representado pelo ponto
A) N.
B) P.
C) Q.
D) R.

ATIVIDADE 6

Observe a reta numérica abaixo. Essa reta está dividida em segmentos de mesma medida.



O número correspondente a $-\sqrt{5}$ está localizado entre quais pontos dessa reta?
A) F e G.
B) G e H.
C) H e I.
D) K e L.

Atividades

ATIVIDADE 1

Escolha a opção em que todos os números são racionais:

A) $\pi; 0,22222...; 7; \sqrt{9}$

B) $\sqrt{16}; 1,8579241; \sqrt{289}; \frac{19}{13}$

C) $-5; 0,22222...; 7; \sqrt{10}$

D) $\frac{1}{2}; \frac{4}{5}; \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{8}{\sqrt{2}}$

ATIVIDADE 2

Calcule $\sqrt{58}$ com duas casas decimais.

ATIVIDADE 3

Calcule o valor das raízes.

a) $\sqrt{196}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[5]{-32}$

d) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}}$

e) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$

f) $\sqrt[3]{-0,125}$

g) $\sqrt{0,01}$

h) $\sqrt{7}$

i) $\sqrt{15}$

j) $\sqrt{30}$

conexões matemáticas SEDU - 2025

RAIZ QUADRADA APROXIMADA

Nem todo número racional não negativo tem raiz quadrada exata. Quando isso acontece, a raiz desse número é um número irracional, ou seja, é um número com infinitas casas decimais e sem um período que se repita. Por exemplo:

$\sqrt{3}$ é um número irracional, pois não existe **n** racional tal que $n^2 = 3$.

Usando uma calculadora, obtemos o seguinte: 1,7320508075688772935274463415059...

Como chegar nesse resultado?

Podemos determinar o número que expressa a raiz quadrada, com aproximação de uma ou mais casas decimais, fazendo uma estimativa desse valor.

Vamos verificar, então, como estimar a raiz quadrada de 3 com os conhecimentos que temos sobre os números quadrados perfeitos.

- 3 é um número que está entre os quadrados perfeitos 1 e 4.
- Como $1 = 1^2$ e $4 = 2^2$, o número procurado está entre 1 e 2.
- Vamos descobrir que número é esse fazendo tentativas.

$(1,1)^2 = 1,21$
$(1,2)^2 = 1,44$
$(1,3)^2 = 1,69$
$(1,4)^2 = 1,96$
$(1,5)^2 = 2,25$
$(1,6)^2 = 2,56$
$(1,7)^2 = 2,89$
$(1,8)^2 = 3,24$, mas este é maior do que 3.

Observando os cálculos, verificamos que $\sqrt{3}$ é maior do que 1,7 e menor do que 1,8.

1,7 e 1,8 são números que representam aproximações para $\sqrt{3}$ até décimos.

Para não termos dois valores, convencionamos que o número procurado corresponde ao menor valor e escrevemos: $\sqrt{3} \approx 1,7$.

Caso haja a necessidade de uma aproximação de duas casas decimais, fazemos mais tentativas.

$(1,71)^2 = 2,9241$
$(1,72)^2 = 2,9584$
$(1,73)^2 = 2,9929$
$(1,74)^2 = 3,0276$, mas este é maior do que 3.

Pela convenção já estabelecida, podemos escrever $\sqrt{3} \approx 1,73$, ou seja, a raiz quadrada de 3 é aproximadamente 1,73.

Se quisermos uma aproximação de três ou mais casas decimais, fazemos mais tentativas conforme acabamos de fazer.

RAIZ CÚBICA

A raiz cúbica de um número racional **a** é o número racional que, elevado ao cubo, resulta em **a**.

Indica-se a raiz cúbica de a por $\sqrt[3]{a}$.

Acompanhe os exemplos:

- A raiz cúbica de 125 é 5, pois $5^3 = 125$. Indica-se $\sqrt[3]{125} = 5$.

RAÍZES ENÉSIMAS

Além da raiz quadrada e da raiz cúbica, há também outras raízes: raiz quarta, raiz quinta, raiz sexta, raiz sétima etc.
Vamos estender nosso estudo definindo as chamadas raízes enésimas para números reais.
Consideremos um número real **a** e um número natural **n**, com **n > 1**. A raiz enésima do número **a** é indicada pela expressão:

índice $\sqrt[n]{a}$ radicando

De modo geral, dado **a** um número real e **n** um número natural, com **n > 1**, temos de considerar dois casos:

- Para **n** par e **a ≥ 0**: $\sqrt[n]{a}$ é igual ao número real **b**, com **b ≥ 0**, tal que $b^n = a$.
- Para **n** ímpar: $\sqrt[n]{a}$ é igual ao número real **b**, tal que $b^n = a$.

Se o número real **a** for negativo, e o expoente **n** for par, a expressão $\sqrt[n]{a}$ não está definida no conjunto dos números reais.

Assim, temos:

- A raiz quarta de 16, indicada por $\sqrt[4]{16}$, é igual a 2, pois 2 > 0 e $2^4 = 16$.
- A raiz quinta de 243, indicada por $\sqrt[5]{243}$, é igual a 3, pois $3^5 = 243$.
- $\sqrt[11]{-2\,048} = -2$, pois $(-2)^{11} = -2048$.
- A raiz $\sqrt[4]{-16}$ não está definida no conjunto dos números reais, pois -16 é um número real negativo, e 4 é um número par.

Material Extra

Utilize o livro didático para mais teoria e exercícios.

LIVROS DIDÁTICOS

Livro Teláris Essencial – Matemática – 9º ano

- Páginas: 18 a 24

Livro A Conquista da Matemática – 9º ano

- Páginas: 14 a 22.

PORTAL DA MATEMÁTICA

Números Racionais e Irracionais.

PRÁTICAS EXPERIMENTAIS DE Matemática PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

No ano de 2025, o Ensino Fundamental - Anos Finais apresenta uma importante novidade para o componente curricular Matemática: as Práticas Experimentais de Matemática, que visam fomentar o processo de ensino e aprendizagem favorecendo o desenvolvimento e a consolidação de habilidades, o pensamento crítico e a compreensão e a aplicação da lógica matemática. Intenciona-se, também, combater o estigma de que a Matemática é difícil e inacessível, engajando os estudantes em práticas lúdicas e exequíveis.

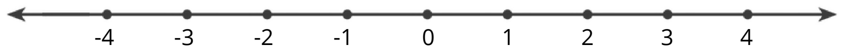
Desse modo, as práticas foram elaboradas a partir das habilidades estruturantes de cada ano, por trimestre. No período em que constar o caderno de Práticas Experimentais, o(a) professor(a) deverá destinar **duas aulas** para cada prática proposta no material.

Prática experimental de Matemática: 9º ano - Quinzena 18.

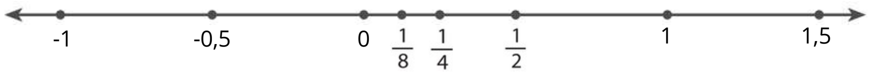
Clique aqui

A RETA NUMÉRICA REAL

Já vimos como representar números inteiros em uma reta numérica.



Da mesma maneira, vimos como representar números racionais em uma reta.

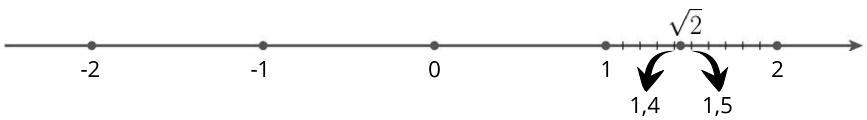


Entendemos que é impossível representar todos os números, pois, entre dois números racionais, existe uma infinidade de outros números racionais. Mesmo que fosse possível, os pontos que representariam esses números não seriam suficientes para cobrir toda a reta numérica. Faltariam ainda os pontos correspondentes aos **números irracionais** para completá-las.

A representação de todos os números racionais e irracionais, isto é, dos números reais, preenche a reta numérica. A essa reta chamamos de reta real.

Vamos, por exemplo, representar na reta real o número irracional $\sqrt{2}$.

A raiz quadrada de dois é um número que está entre 1,4 e 1,5, pois $(1,4)^2 = 1,96$ e $(1,5)^2 = 2,25$. Logo, sua localização aproximada na reta real é:



Assim, sabendo a aproximação decimal de uma raiz quadrada não exata, podemos determinar sua posição aproximada na reta real.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Determine o símbolo que substitui corretamente cada espaço usando ∈, ∉, ⊃, ⊂.

a) 0 ___ ℝ

b) ℚ ___ ℝ

c) ℤ ___ ℕ

d) ℝ ___ ℤ

e) (𝕀 U ℤ) ___ ℝ

f) 0,25 ___ ℚ

g) 0,333... ___ 𝕀

h) 𝕀 ___ ℝ

SOLUÇÃO

Considerando que:

⊂ - Está contido: quando um conjunto é subconjunto de outro, ou seja, está dentro de outro.
⊃ - Contém: quando um conjunto possui um subconjunto, ou seja, quando um conjunto tem um subconjunto dentro.
∈ - Pertence: quando um elemento pertence a um conjunto.
∉ - Não pertence: quando um elemento não faz parte do conjunto.

a) 0 ∈ ℝ

b) ℚ ⊂ ℝ

c) ℤ ⊃ ℕ

d) ℝ ⊃ ℤ

e) (𝕀 U ℤ) ⊂ ℝ

f) 0,25 ∈ ℚ

g) 0,333... ∉ 𝕀

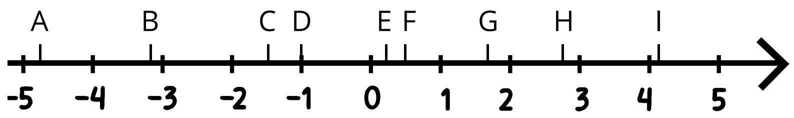
h) 𝕀 ⊂ ℝ

EXERCÍCIO 2

Associe cada número apresentado a uma das letras indicadas na reta numérica.

$$\sqrt{3}; \quad -1; \quad \frac{3}{7}; \quad -1{,}5; \quad \sqrt{17};$$

$$-4{,}785; \quad \sqrt{8}; \quad \frac{4}{25}; \quad -3{,}2$$



SOLUÇÃO

A = - 4,785

B = - 3,2

C = - 1,5

D = -1

E = $\frac{4}{25}$

F = $\frac{3}{7}$

G = $\sqrt{3}$

H = $\sqrt{8}$

I = $\sqrt{17}$