



GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado



SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

2ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

ANÁLISE COMBINATÓRIA: COMBINAÇÕES.

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.	<ul style="list-style-type: none"> Reconhecer situações que envolvem agrupamentos não ordenáveis (combinação) compreendendo suas características. Resolver problemas envolvendo agrupamentos não ordenáveis. Elaborar problemas relacionados a agrupamentos ordenáveis e não ordenáveis, utilizando contextos variados, como jogos, competições e organização de eventos. 	D042_M Utilizar o princípio multiplicativo de contagem na resolução de problema.

Contextualização

No material anterior, aprendemos a lidar com agrupamentos em que a ordem dos elementos faz diferença. Vimos como a Matemática pode nos ajudar a contar situações em que precisamos organizar todos os elementos (como nas permutações) ou apenas parte deles (como nos arranjos), considerando que a ordem em que aparecem é relevante.

Agora, vamos avançar mais um passo.

Existem muitas situações em que **a ordem dos elementos não importa** — apenas a seleção feita. Se você vai montar uma equipe com 3 amigos para um campeonato, por exemplo, pouco importa quem é escolhido primeiro ou por último: o que importa é quem está na equipe, e não a ordem em que os nomes foram chamados. Nesses casos, estamos lidando com **agrupamentos não ordenáveis**.

Para resolver esse tipo de situação, vamos utilizar as ferramentas da **Análise Combinatória** mais uma vez, focando agora no conceito de **combinação**. Com esse novo recurso, aprenderemos a identificar quando a ordem dos elementos pode ser ignorada e como isso muda a forma de contar.

Vamos lá?

Bons estudos!





Conceitos e Conteúdos

COMBINAÇÃO

Arranjo x Combinação

Uma **combinação** é um tipo de agrupamento em que **a ordem dos elementos não importa**. Ou seja, estamos interessados apenas **nos elementos escolhidos**, não na posição que ocupam no grupo.

Para compreender melhor, pense na seguinte situação:

*Você e mais 9 colegas estão disputando uma vaga para uma comissão de alunos. Dentre vocês, **serão escolhidos 3 estudantes** para representar a escola. A comissão não tem cargos definidos — todos os três representantes têm a mesma função.*

Nesse caso, **a ordem em que os três alunos são escolhidos não importa**. Ser escolhido primeiro ou por último não muda o resultado: o importante é **quem está no grupo**.

Esse é um exemplo clássico de combinação. Estamos formando grupos com **parte dos elementos de um conjunto**, sem nos preocupar com a ordem.

Agora compare com o que já vimos anteriormente:

- No material anterior, vimos a escolha de presidente, vice-presidente e secretário do grêmio estudantil da escola. A ordem dos nomes representa o cargo ocupado, portanto, (Ana, Bruno, Carla) é diferente de (Carla, Bruno, Ana). Esse tipo de situação é um **arranjo**, assunto que já estudamos na quinzena anterior.
- Por outro lado, se quisermos apenas selecionar 3 representantes, sem definir cargos, a ordem deixa de importar. Nesse caso, temos uma **combinação**.



Desenvolvimento Matemático

Vamos começar com um exemplo simples para entender o raciocínio.

Exemplo 1

De um grupo de 6 estudantes — Ana, Bruno, Carla, Daniel, Elisa e Fábio — queremos formar **um grupo de 3 alunos** para participar de um projeto. Quantos grupos diferentes de 3 pessoas podemos formar?

Solução:

Se a ordem importasse, resolveríamos o problema por um arranjo de 6 pessoas tomadas 3 a 3:

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Ou seja, 120 arranjos possíveis.

Mas como **a ordem não importa** (ou seja, o grupo Ana, Bruno e Carla é o mesmo que Ana, Carla e Bruno, que é o mesmo que Bruno, Ana e Carla, etc...), temos repetições. Cada trio está repetindo 3!, pois a quantidade de ordenação possível de 3 elementos é sua permutação. Portanto, devemos dividir o arranjo resultante por 3!. Assim:

$$\frac{120}{3!} = \frac{120}{3 \cdot 2} = \frac{120}{6} = 20$$

Portanto, **há 20 grupos diferentes de 3 pessoas** formados de um grupo de 6 pessoas.

Definição

Considere um conjunto com n elementos distintos. O número total de subconjuntos que podemos formar com r elementos ($r \leq n$), é chamado de combinação simples, denotado por $C_{n,r}$, e dado por:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Exemplo 2

Quantos grupos de 4 alunos podem ser formados em uma turma com 12 estudantes?

Solução:

Vamos calcular a combinação entre 12 elementos distintos, dados 4 a 4, portanto,

$$C_{12,4} = \frac{12!}{4! \cdot (12-4)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{4! \cdot \cancel{8!}} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot 2} = \frac{11 \cdot \cancel{10}^5 \cdot 9}{\cancel{2}^1} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495$$

Portanto, é possível formar **495 grupos diferentes de 4 alunos**.

Exemplo 3

O professor de Educação Física vai organizar um torneio de vôlei entre os alunos da escola. Há 10 alunos interessados e ele precisa escolher 6 jogadores para formar um time titular. Durante a partida, os jogadores rotacionam entre as posições conforme a regra oficial do vôlei, ou seja, todos os escolhidos desempenharão todas as funções em algum momento do jogo. Nesse caso, a ordem de escolha dos jogadores não importa, pois todos participarão igualmente. De quantas formas diferentes o professor pode escolher os 6 jogadores entre os 10 interessados?

Solução:

Trata-se de um problema de **combinação**, pois estamos apenas escolhendo quem vai participar, e a **ordem não altera o resultado**

$$C_{10,6} = \frac{10!}{6! \cdot (10-6)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot 2} = \frac{10 \cdot \cancel{8}^3 \cdot 7}{\cancel{2}^1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

Portanto, o professor pode formar 210 equipes diferentes com 6 jogadores, dentre os interessados.



Sites de streaming como Netflix e Spotify usam análise combinatória para gerar recomendações personalizadas. Eles calculam milhões de combinações possíveis entre gostos, perfis e conteúdos.



Exemplo 4

Depois da aula, um grupo de **10 alunos** resolveu comemorar o aniversário de um colega no pátio da escola. Como de costume, todos decidiram **se cumprimentar entre si** com um aperto de mão para celebrar a amizade e o momento especial.

Um dos alunos, curioso com a situação, decidiu usar a matemática para **descobrir quantos cumprimentos aconteceram** no total. Considerando que cada cumprimento ocorre uma única vez entre dois alunos distintos, e que cumprimentos repetidos ou com a própria pessoa não são contados, quantos cumprimentos foram dados?

Solução:

Este é um problema clássico de combinação de 2 a 2 dos 10 alunos, pois estamos formando pares sem se importar com a ordem.

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2! \cdot \cancel{8!}} = \frac{\cancel{10}^5 \cdot 9}{\cancel{2}^1} = 5 \cdot 9 = 45$$

Ocorreram 45 cumprimentos entre os 10 alunos.





Sugestão de Atividade

CRIANDO E RESOLVENDO PROBLEMAS QUE ENVOLVEM AGRUPAMENTOS

Esta é uma sugestão de atividade voltada para auxiliar os alunos a compreender e aplicar os diferentes tipos de agrupamentos da Análise Combinatória, por meio da elaboração e resolução de problemas contextualizados. O objetivo é mostrar a diferença entre agrupamentos ordenáveis (como arranjos e permutações) e não ordenáveis (combinações), desenvolvendo a habilidade de elaborar e resolver situações que envolvam esses conceitos.

O professor pode adaptar a proposta conforme considerar mais adequado à sua turma, ou substituir por outra atividade que contemple a seguinte expectativa de aprendizagem: **elaborar problemas relacionados a agrupamentos ordenáveis e não ordenáveis, utilizando contextos variados, como jogos, competições e organização de eventos.**

Orientações para a Atividade



Formação de Grupos

Organize-se em grupos de 3 a 4 integrantes.



Criação dos Problemas

Cada grupo deve elaborar 3 problemas, sendo:

- um problema envolvendo arranjo (com ou sem repetição);
- um problema envolvendo combinação; e
- um problema envolvendo permutação com repetição (evite anagramas).

A resolução completa dos três problemas criados deve ser entregue separadamente, apenas ao professor, visando verificar a viabilidade e a razoabilidade matemática dos enunciados.





Troca e Resolução

Após a entrega, o professor sorteará as atividades entre os grupos. Cada grupo deverá resolver os três problemas elaborados por outro grupo, apresentando a resolução completa e bem justificada.

Avaliação em Rubrica

Cada grupo será avaliado com base em quatro critérios, recebendo um escore de 0, 1 ou 2 em cada um, totalizando até 8 escores. Esses escores servem como base para o professor converter proporcionalmente em pontos, conforme o peso atribuído à atividade, de acordo com o quadro abaixo.

CRITÉRIO	ESCORE 0	ESCORE 1	ESCORE 2
Relação com o tipo de agrupamento	Uso incorreto	Correto, mas com justificativa incompleta	Correto e bem justificado
Originalidade e contextualização	Sem contexto ou copiado	Contexto simples ou genérico	Criativo, realista e bem contextualizado
Cooperação no grupo	Participação desigual	Cooperação parcial observada	Participação ativa e equilibrada entre todos os membros
Resolução da atividade de outro grupo	Incompleta ou incorreta	Correta, mas com justificativa insuficiente	Correta e com boa argumentação matemática

Para facilitar a organização do seu trabalho, você poderá usar as páginas seguintes para registrar cada questão desenvolvida separadamente.



ATIVIDADE: CRIANDO E RESOLVENDO PROBLEMAS QUE ENVOLVEM AGRUPAMENTOS

1. Nome dos estudantes que elaboraram as questões:

2. Nome dos estudantes que resolverão as questões:

3. Avaliação em Rubrica

CRITÉRIO	ESCORE 0	ESCORE 1	ESCORE 2	NOTA
Relação com o tipo de agrupamento	Uso incorreto	Correto, mas com justificativa incompleta	Correto e bem justificado	
Originalidade e contextualização	Sem contexto ou copiado	Contexto simples ou genérico	Criativo, realista e bem contextualizado	
Cooperação no grupo	Participação desigual	Cooperação parcial observada	Participação ativa e equilibrada entre todos os membros	
Resolução da atividade de outro grupo	Incompleta ou incorreta	Correta, mas com justificativa insuficiente	Correta, clara e com boa argumentação matemática	

TOTAL: _____



4. Questão Elaborada

5. Resolução da Questão



Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS



Matemática em contexto: combinatória, probabilidade. (DANTE)

Capítulo 1: Análise combinatória.

- Combinação simples (p. 34 - 39).



Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade. (BONJORNO)

Capítulo 3: Combinatória.

- Problemas de contagem (88 - 98).

LEITURA



As placas dos automóveis

No volume “Estatística, Combinatória e Probabilidade” da coleção Prisma, sugerimos a leitura e estudo do texto “As placas dos automóveis” (páginas 102 e 104).

ATENÇÃO, PROFESSOR (A):

Mesmo com as expectativas de aprendizagem deste material destacando sobre agrupamentos não ordenáveis, consideramos importante trazer, na seção das atividades, algumas questões sobre os agrupamentos ordenáveis, que foram contemplados no material anterior. Por isso, há atividades que integram esses dois tipos de agrupamentos e outras que os abordam separadamente. O objetivo deste movimento é mostrar as diferenças entre eles, em diferentes contextos.

Atenção





Atividades

ATIVIDADE 1

Calcule o valor de:

$$a) A_{7,2} =$$

$$e) C_{7,2} =$$

$$b) A_{6,4} =$$

$$f) C_{8,3} =$$

$$c) A_{10,1} =$$

$$g) C_{6,1} =$$

$$d) A_{4,4} =$$

$$h) C_{4,4} =$$

ATIVIDADE 2

Em um concurso de redação da escola, 5 alunos foram selecionados para destaque: Alice, Bruno, Carla, Diego e Elisa. A escola quer realizar duas ações com esses alunos:

a) Situação A: Serão escolhidos 3 alunos para receber medalhas de ouro, prata e bronze, de acordo com a classificação no concurso. Quantas maneiras diferentes essa premiação pode ser feita?

b) Situação B: Além da situação A, a escola vai formar uma comissão de 3 alunos (dentre os 5) para representar a turma em um evento. Nesta comissão, todos têm a mesma função. Quantas comissões diferentes podem ser formadas?

c) Explique por que o número de possibilidades é diferente nas duas situações, mesmo escolhendo a mesma quantidade de alunos.

ATIVIDADE 3

(Enem - 2009) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

- a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
- b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
- c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
- d) duas combinações.
- e) dois arranjos.

ATIVIDADE 4

Um banco oferece aos seus clientes a opção de criar uma senha numérica composta por 4 dígitos distintos, escolhidos entre os algarismos de 0 a 9. Sabendo que os dígitos não podem se repetir, de quantas maneiras diferentes essa senha pode ser formada?

ATIVIDADE 5

Carlos e sua família estavam conhecendo as belezas da região de Pedra Azul, no Espírito Santo. Ao pararem para lanchar e pedirem uma jarra de suco natural, o atendente informou que havia seis sabores diferentes de suco disponíveis, sendo eles: morango, laranja, abacaxi, uva, goiaba e maracujá. O atendente explicou, ainda, que o suco de morango era feito com morangos da própria região de Pedra Azul, já que ela é um dos polos mais importantes do cultivo de morango no Espírito Santo. Carlos e sua família iriam escolher três sabores distintos de suco, servidos em jarras de 1 litro cada, para que toda a família pudesse experimentar os três sabores e mediante a informação do atendente, decidiram que um deles seria de morango. De quantas maneiras distintas, os outros dois sabores de suco poderiam ser escolhidos, já que o primeiro foi o de morango?

ATIVIDADE 6

Para celebrar o Dia da Consciência Negra (20 de novembro), a Escola Cidadã organizará um evento com apresentações, rodas de conversa e exposições sobre a cultura afro-brasileira, os direitos da população negra e o combate ao racismo.



Seis estudantes — Aline, Bruno, Carla, Danilo, Érica e Fábio — foram selecionados para representar a escola nas atividades. Eles participarão de três momentos diferentes:

a) Situação A – Apresentação cultural: Todos os 6 alunos participarão de uma apresentação artística (dança, poesia ou canto), entrando no palco um de cada vez, em uma ordem previamente definida. De quantas maneiras diferentes essa ordem de entrada pode ser organizada?

b) Situação B – Roda de conversa: Será formada uma roda de conversa com 3 alunos, que representarão os colegas debatendo temas como igualdade racial e ancestralidade. Nessa roda, não há ordem de fala nem cargos definidos. De quantas maneiras diferentes esse grupo de 3 alunos pode ser escolhido entre os 6?

c) Situação C – Entrevistas no podcast da escola: Três dos 6 alunos serão escolhidos para gravar um episódio especial do podcast da escola, no qual falarão, nessa ordem de temas:

- Consciência Negra: Memória, Luta e Identidade;
- Igualdade racial: valorizando a diversidade na escola;
- Educar para a igualdade: ações contra o racismo no ambiente escolar.

Cada aluno falará sobre um tema, um após o outro, respeitando essa ordem. De quantas maneiras diferentes esses 3 alunos podem ser escolhidos e organizados para as entrevistas?

ATIVIDADE 7

(SAEPE - 2019) Uma pizzaria proporciona um serviço em que o cliente pode montar a sua pizza. É possível escolher a massa e um ingrediente de cada um dos 3 grupos, conforme o cardápio representado abaixo.

Tipo de Massa:

- Comum
- Integral

Opções:

- Brócolis
- Ervilha
- Milho
- Ovo
- Palmito
- Presunto

Queijos:

- Muçarela
- Parmesão
- Provolone

Carne:

- Calabresa
- Carne seca
- Frango
- Pepperoni

Monte sua
Pizza



Sônia planeja comprar uma pizza nessa pizzaria para lanche com seus filhos. De quantas formas diferentes Sônia pode escolher a massa e os ingredientes para montar a sua pizza?

- a) 15
- b) 72
- c) 144
- d) 752
- e) 1 365



ATIVIDADE 8

João, morador da Barra do Jucu, em Vila Velha, pretende passar o final de semana na casa de seu filho, que vive no bairro Serra Sede (Centro), localizado no município da Serra. Para chegar até lá, partindo de sua residência, João irá fazer todo o trajeto de ônibus dividido em três trechos:

- 1º trecho: Da Barra do Jucu até o Terminal de Itaparica (em Vila Velha), há apenas uma opção de linha: 609.
- 2º trecho: Do Terminal de Itaparica até o Terminal de Laranjeiras (na Serra), ele pode escolher entre 11 linhas diferentes: 508, 503, 504, 506, 515, 559, 572, 800, 814, 834 e 857.
- 3º trecho: Do Terminal de Laranjeiras até o bairro Serra Sede (Centro), estão disponíveis 15 linhas diferentes: 815, 816, 817, 818, 819, 821, 833, 849, 852, 854, 858, 881, 884, 885 e 896.

Sabendo que João usará linhas diferentes em cada trecho, de quantas maneiras distintas ele pode completar todo o trajeto?

- a) 27
- b) 150
- c) 160
- d) 165
- e) 176

ATIVIDADE 9

(SAEPE – 2016) Os membros de uma banca examinadora escolheram 7 questões de Matemática, 5 questões de Português e 4 questões de Ciências. Desse grupo de questões, eles irão sortear 2 questões de Matemática, 2 de Português e 1 de Ciências para compor uma prova de um concurso. Quantas provas diferentes poderão ser elaboradas para esse concurso?

- a) 140
- b) 280
- c) 560
- d) 700
- e) 840



ATIVIDADE 10

(ENEM - 2024) Um hospital tem 7 médicos cardiologistas e 6 médicos neurologistas em seu quadro de funcionário. Para executar determinada atividade, a direção desse hospital formará uma equipe com 5 médicos, sendo, pelo menos, 3 cardiologistas. A expressão numérica que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe é:

$$a) \frac{7!}{4!} \times \frac{6!}{4!}$$

$$b) \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!}$$

$$c) \frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!} + \frac{5!}{1! \times 4!}$$

$$d) \left(\frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!} \right) \times \left(\frac{7!}{4! \times 3!} + \frac{6!}{1! \times 5!} \right) \times \left(\frac{7!}{5! \times 2!} + \frac{6!}{0! \times 6!} \right)$$

$$e) \left(\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} \right) + \left(\frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{6!}{1! \times 5!} \right) + \left(\frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{0! \times 6!} \right)$$



Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUZA, Câmara, P. R. **Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade. Ensino médio. Área do conhecimento: matemática e suas tecnologias.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

CABRAL, R. M. P. **Matemática discreta.** 1. ed. Fortaleza: EDUECE, 2017.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos: combinatória, probabilidade.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar 5: geometria plana.** 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. **Discrete mathematics: elementary and beyond.** New York: Springer-Verlag, 2013.

SCHEINERMAN, E. R. **Mathematics: a discrete introduction.** 3. ed. Boston: Cengage Learning, 2012.

Referências

ATIVIDADES

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade**. Ensino médio. Área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contextos: combinatória, probabilidade**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

GOV.BR. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Inep. Provas e Gabaritos**. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>>. Acessado em: 25/05/2025.

SAEPE 2016. Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco - **Revista do Professor - Matemática**. Disponível em: <<https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2018/PE%20SAEPE%202018%20RP%20MT%20WEB.pdf>>. Acessado em 29/06/2025.

SAEPE 2019. Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco - **Revista do Professor de Matemática**. Disponível em: <<https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2018/PE%20SAEPE%202018%20RP%20MT%20WEB.pdf>>. Acessado em 29/06/2025.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Estatística e probabilidade - Ensino Médio**. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.