GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Material Estruturado

QUINZENA
22
24/11 a 05/12

SUBSECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA E PROFISSIONAL

GERÊNCIA DE CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

3ª Série | Ensino Médio

MATEMÁTICA

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

HABILIDADE(S)	EXPECTATIVA(S) DE APRENDIZAGEM	DESCRITOR(ES) DO PAEBES
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.	• Identificar equações lineares e suas características, como incógnitas, coeficientes e termos independentes. • Compreender o conceito de sistema de equações lineares. • Resolver sistemas lineares utilizando métodos algébricos, como substituição e adição. • Resolver graficamente sistemas lineares 2x2 com solução única, infinitas soluções ou sem solução.	D131_M Resolver problema envolvendo sistema linear. D127_M Relacionar a determinação do ponto de intersecção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

Contextualização

O desenvolvimento da teoria dos sistemas lineares remonta a contribuições de diversos matemáticos e matemáticas em diferentes momentos da história. Os primeiros indícios de uso datam de 300 a.C. a 100 a. C., na Babilônia e na China.

Hoje, os sistemas lineares são uma ferramenta utilizada nas mais diversas áreas do conhecimento e relacionada a problemas relevantes do nosso dia-a-dia, desde aplicações em matemática pura a balanceamento de equações química, inteligência artificial, tráfego de veículos em vias públicas e otimização de custos em empresas.

Por isso, estudar e compreender como solucionar um sistema linear é um conhecimento de grande valia em várias áreas do mercado de trabalho.

Neste material iremos definir e apresentar métodos para a solução de um sistema linear com duas ou três incógnitas.

Bons estudos!

Conceitos e Conteúdos

EQUAÇÕES LINEARES

Equação linear é toda equação que pode ser escrita na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b,$$

em que $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ são as **incógnitas**, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ são números reais chamados de **coeficientes da equação** e b é o **termo independente**.

Observe alguns exemplos de equações lineares abaixo:

1. $2x + 3y = 15$
   É uma equação linear com **incógnitas** x e y, **coeficientes** 2 e 3 e **termo independente** 15.

2. $x - 2y + 5z = 10$
   É uma equação linear com **incógnitas** x, y e z, **coeficientes** 1, -2 e 5 e **termo independente** 10.

3. $a + b + 3c = 5$
   É uma equação linear com **incógnitas** a, b e c, **coeficientes** 1, 1 e 3 e **termo independente** 5.

4. $3m - 8n + 4p + q = 21$
   É uma equação linear com **incógnitas** m, n, p e q, **coeficientes** 3, -8, 4 e 1 e **termo independente** 21.

No entanto, as equações abaixo não são lineares:

5. $x \cdot y + z = 4$
6. $x^2 + y^2 - x - y = 2$
7. $x^3 - xy + yz - z^2 = 16$

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR

Considere a primeira equação linear apresentada acima: $2x + 3y = 15$. vejamos o que acontece ao trocar

- x por 3 e y por 3: $2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 6 + 9 = 15.$
- x por 0 e y por 5: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 0 + 15 = 15.$
- x por 1 e y por 6: $2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 = 2 + 18 = 20 \neq 15.$

Nos dois primeiros casos, o cálculo retorna o valor esperado (15), no último isso não ocorre. Dizemos, então, que os pares ordenados (3, 3) e (0, 5) são soluções da equação linear 2x+3y=15, enquanto o par ordenado (1, 6) não é solução da equação.

De forma geral, dada uma equação linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b,$$

uma ênupla de números reais $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n)$ é chamada de solução da equação se

$$a_1 \cdot \beta_1 + a_2 \cdot \beta_2 + a_3 \cdot \beta_3 + \cdots + a_n \cdot \beta_n = b.$$

Vejamos outro exemplo: considere a equação linear $x + y + 3z = 5$, então

- (1, 1, 1) é solução da equação pois, $1 + 1 + 3{\cdot}1 = 1 + 1 + 3 = 5;$
- (2, 2, -1) não é solução da equação pois, $2 + 2 + 3{\cdot}(-1) = 2 + 2 - 3 = 1 \neq 5;$
- (5, -6, 2) é solução da equação pois, $5 + (-6) + 3{\cdot}2 = 5 - 6 + 6 = 5.$

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Um **sistema de equações lineares m×n** (ou **sistema linear m×n**) é um conjunto de m equações lineares em n incógnitas, que pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Na notação utilizada ao lado o elemento a_{12} simboliza o coeficiente da segunda incógnita na primeira equação.

Observe alguns exemplos:

❶ $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$ É um **sistema linear 2×2**, isto é, possui duas equações e duas incógnitas (x e y).

❷ $\begin{cases} 2x + y = 4 - y \\ 5x + 2y = 7 - x \end{cases}$ É um **sistema linear 2×2**, isto é, possui duas equações e duas incógnitas (x e y).

❸ $\begin{cases} 2x + y - 2z = 6 \\ 5x + 2y + 3z = 8 \end{cases}$ É um **sistema linear 2×3**, isto é, possui duas equações e três incógnitas (x, y e z).

❹ $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3x + y - 3z = 9 \\ x - 2y - z = 12 \end{cases}$ É um **sistema linear 3×3**, isto é, possui três equações e três incógnitas (x, y e z).

❺ $\begin{cases} x + y - 4z - w = 10 \\ 3x + 2y - z - 2w = 1 \\ 2x + y + z - 7w = 8 \\ x - 5y + 2z + w = 4 \end{cases}$ É um **sistema linear 4×4**, isto é, possui quatro equações e quatro incógnitas (x, y, z e w).

SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Dizemos que uma ênupla de números reais $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n)$ é uma solução do sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se ela for solução de cada uma das equações lineares desse sistema.

Vejamos alguns exemplos:

❶ $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$

O par ordenado (1, 2) é uma solução do sistema, pois

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 = 1 + 4 = 5 \\ 4 \cdot 1 - 2 = 4 - 2 = 2 \end{cases}.$$

❷ $\begin{cases} 2x + y - 2z = 6 \\ 5x + 2y + 3z = 8 \end{cases}$

A tripla ordenada (3, 2, 1) não é uma solução do sistema, pois

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 + 2 - 2 \cdot 1 = 6 + 2 - 2 = 6 \\ 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 15 + 4 + 3 = 22 \neq 8 \end{cases}.$$

De posse dos conceitos básicos de sistemas lineares podemos nos aprofundar um pouco mais, buscando responder às questões: Como determinar a solução de um sistema linear? Será que todo sistema linear tem solução? Quantas soluções tem um sistema linear?

Iniciaremos esse percurso pelos sistemas lineares mais simples, os sistemas lineares 2×2.

SISTEMA LINEAR 2×2

Chamamos de sistema linear 2×2 o conjunto de 2 equações em 2 incógnitas. Este tipo de sistema pode ser pode ser representado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Por exemplo,

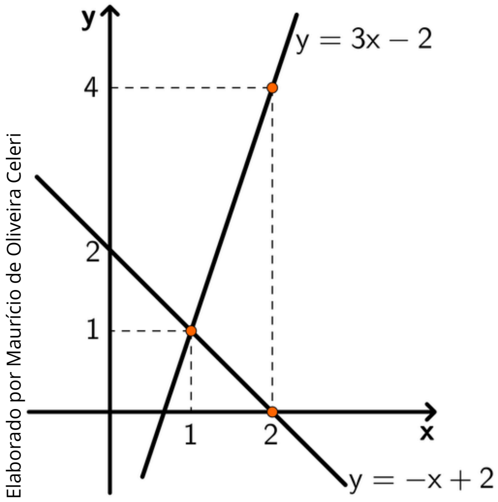
$$\begin{cases} -3x + y = -2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

é um sistema linear 2×2 nas incógnitas x e y.

Considere ainda esse sistema linear. Como ele é um sistema linear nas incógnitas x e y, podemos reescrever cada equação de modo que y seja escrito em função de x, veja abaixo:

$$\begin{cases} -3x + y = -2 & \rightarrow & y = 3x - 2 \\ x + y = 2 & \rightarrow & y = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

Como temos agora duas funções lineares, podemos representá-las graficamente:



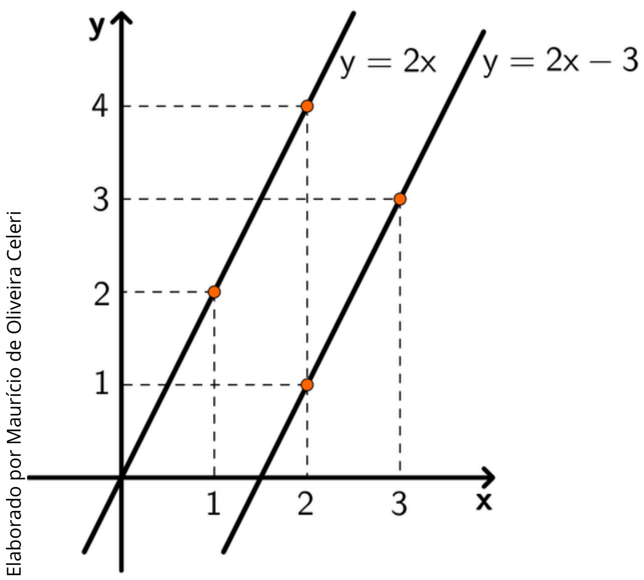
É possível notar que essas retas têm um único ponto em comum: o ponto (1 ,1). Esse ponto é a solução do sistema linear dado originalmente. Vejamos:

$$\begin{cases} -3 \cdot 1 + 1 = -3 + 1 = -2 \\ 1 + 1 = 2 \end{cases}.$$

Assim, esse sistema possui uma única solução. Dizemos que ele é um **sistema possível e determinado** (SPD).

Para cada um dos sistemas a seguir, observe suas representações gráficas:

1 $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$



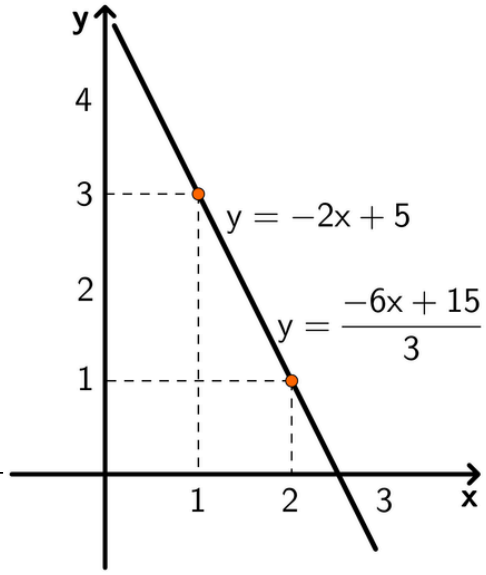
Observe que as duas retas definidas são paralelas e distintas (coeficiente de x é o mesmo, no entanto o termo independente é diferente).

Como sabemos, duas retas paralelas não se intersectam, portanto, não há nenhum ponto em comum às duas retas dadas.

Portanto, o sistema linear dado não possui solução.

Dizemos, então, que esse é um **sistema impossível** (SI).

2 $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$



Elaborado por Maurício de Oliveira Celeri

Observe que as duas retas possuem a mesma equação e podemos verificar isso quando dividimos a segunda equação por 3. Observe:

$$y = \frac{-6x + 15}{3} = -2x + 5.$$

Assim, todas as soluções da primeira equação linear do sistema são, também, solução da segunda equação linear.

Portanto, esse sistema apresenta infinitas soluções.

Assim, dizemos que esse é um **sistema possível e indeterminado** (SPI).

Vimos que um sistema linear 2×2 (e podemos pensar em um sistema de ordem m×n) pode ser

1. **sistema possível e determinado**, quando tem apenas uma solução;
2. **sistema possível e indeterminado**, quando tem infinitas soluções;
3. **sistema impossível**, quando não tem solução.

No entanto, ainda não vimos como determinar a solução de um sistema.

Para isso, veremos dois métodos: método da substituição e método da adição. Vejamos cada um individualmente.

Método da Substituição

O método da substituição consiste em fazer uma das incógnitas depender da outra em uma das equações e, então, substituir essa expressão na equação excedente.

Vejamos um exemplo:

Considere o seguinte sistema linear 2×2: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$.

Na segunda equação podemos fazer com que x dependa de y, da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \quad \rightarrow \quad x = 5 - 3y \end{cases}$$

e então substituímos x por 5-3y na primeira equação:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot (5 - 3y) - y = 3 \\ x + 3y = 5 \quad \rightarrow \quad x = 5 - 3y \end{cases}$$

Note que a última equação escrita anteriormente depende apenas de y, portanto, podemos resolvê-la:

$$2 \cdot (5 - 3y) - y = 3 \Rightarrow 10 - 6y - y = 3$$
$$\Rightarrow -7y = 3 - 10 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = 1.$$

Agora, falta determinar o valor de x. Voltamos, então, no nosso primeiro passo e verificamos que $x = 5 - 3y$, como y=1, temos

$$x = 5 - 3 \cdot 1 = 5 - 3 \Rightarrow x = 2.$$

Portanto, o par ordenado (2, 1) é a única solução do sistema. Logo, a solução do sistema é $S = \{(2, 1)\}$.

Método da Adição

O método da adição consiste em somar os termos correspondentes, membro a membro, das equações de modo a obter uma equação equivalente onde o coeficiente de uma das incógnitas seja igual a zero.

Vejamos um exemplo:

Considere o seguinte sistema linear 2×2: $\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 4 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{cases}.$

Num primeiro momento, nosso objetivo é identificar números específicos para multiplicar cada uma das equações de modo que, ao somar membro a membro, o coeficiente de uma das incógnitas seja zero.

Podemos fazer isso de diversas formas, uma delas é identificando o coeficiente da incógnita que desejamos. Digamos que seja x:

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 4 \\ 1x & + & 2y & = & 3 \end{cases}.$$

Observe que o coeficiente de x na primeira equação é 2 e na segunda, é 1. Então, usamos o coeficiente de uma para multiplicar a outra equação, sendo que um deles terá sinal invertido (escolhemos o coeficiente 1). Desse modo, multiplicamos a primeira equação por -1 e a segunda, por 2.

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 4 & \cdot(-1) \\ 1x & + & 2y & = & 3 & \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x & - & 3y & = & -4 \\ 2x & + & 4y & = & 6 \end{cases}$$

O próximo passo é somar membro a membro, os termos semelhantes das duas equações:

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 4 & \cdot(-1) \\ 1x & + & 2y & = & 3 & \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} -2x & - & 3y & = & -4 \\ 2x & + & 4y & = & 6 \\ \hline & & y & = & 2 \end{array} +$$

Com o valor de y determinado, voltamos em uma das equações e substituímos esse valor. Vamos utilizar a segunda equação do sistema linear e substituir o y por 2:

$$x + 2y = 3 \Rightarrow x + 2 \cdot 2 = 3 \Rightarrow x = 3 - 4 \Rightarrow x = -1.$$

Assim, a solução do sistema é $S = \{(-1, 2)\}$.

Agora que vimos como resolver um sistema linear 2×2, vamos analisar uma situação problema:

Um professor de Educação Física foi a uma loja esportiva para comprar bolas para diferentes tipos de esportes que os estudantes praticam durante o recreio. A tabela abaixo mostra o valor e o peso de cada uma delas:

Tipo de bola	Peso unitário (g)	Valor unitário (R$)
Tênis de mesa	25	19,90
Vôlei	200	129,18

Ao todo, o professor comprou 40 unidades, que pesaram 1,7 kg. Quantas bolas de tênis de mesa e quantas bolas de vôlei esse professor comprou?

Inicialmente, precisamos montar equações que representem esse problema, para isso vamos definir nossas incógnitas: chamaremos de t o número de bolas de tênis de mesa e de v o número de bolas de vôlei. Observe abaixo:

1 $t + v = 40$

Ao todo, o professor comprou **40 unidades**, que **pesaram 1,7 kg**. Quantas bolas de tênis de mesa e quantas bolas de vôlei esse professor comprou?

$1,7\ kg = 1700\ g$

2 $25t + 200v = 1700$

As equações 1 e 2 formam nosso sistema linear:

$$\begin{cases} t + v = 40 \\ 25t + 200v = 1700 \end{cases}.$$

Vamos resolvê-lo pelo método da adição:

$$\begin{cases} 1t + v = 40 & \cdot(-25) \\ 25t + 200v = 1700 & \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -25t - 25v = -1000 \\ 25t + 200v = 1700 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 175v &= 700 \quad + \\ v &= \frac{700}{175} \\ v &= 4 \end{aligned}$$

Sabemos, então, que o número de bolas de vôlei é 4. Usando a primeira equação obtemos:

$$t + v = 40 \Rightarrow t + 4 = 40 \Rightarrow t = 40 - 4 \Rightarrow t = 36.$$

Portanto, o professor comprou 36 bolas de tênis de mesa e 4 bolas de vôlei.

Passaremos agora ao estudo da solução de um sistema linear 3×3.

SISTEMA LINEAR 3×3

Chamamos de sistema linear 3×3 o conjunto de 3 equações em 3 incógnitas. Esse tipo de sistema pode ser representado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Por exemplo,

$$\begin{cases} x + 3y - z = 16 \\ 2x + y + z = 21 \\ \quad - y + z = 1 \end{cases}$$

é um sistema linear 3×3 nas incógnitas x, y e z.

Solução de um sistema 3×3

Para resolvermos um sistema 3×3, uma estratégia interessante é transformá-lo em um 2×2, através de uma substituição, e então utilizar os métodos que vimos anteriormente para resolver esse novo sistema.

Vamos resolver o sistema 3×3 apresentado acima:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 16 \\ 2x + y + z = 21 \\ \quad - y + z = 1 \end{cases}$$

Na última equação deste sistema podemos determinar z em função de y, a partir daí, substituímos z nas demais equações e obteremos um sistema nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 16 \\ 2x + y + z = 21 \\ \quad - y + z = 1 \quad \rightarrow \quad z = 1 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - (1+y) = 16 \\ 2x + y + (1+y) = 21 \end{cases}$$

Vamos desenvolver as duas equações do novo sistema:

$$\begin{cases} x + 3y - (1+y) = 16 \\ 2x + y + (1+y) = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 1 - y = 16 \\ 2x + y + 1 + y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 17 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$$

Assim, temos um sistema linear 2×2 e podemos resolvê-lo pelo método da adição:

$$\begin{cases} 1x + 2y = 17 & \cdot 2 \\ 2x + 2y = 20 & \cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 34 \\ -2x - 2y = -20 \end{cases} +$$

$$2y = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{2} = 7$$

Com o valor de y, podemos usar a primeira equação para determinar x e usar z=1+y para determinar z:

$$x + 2y = 17 \Rightarrow x + 2 \cdot 7 = 17 \Rightarrow x = 17 - 14 = 3$$
$$z = 1 + y \Rightarrow z = 1 + 7 = 8$$

Assim, a solução do sistema é $S = \{(3, 7, 8)\}$.

Vejamos uma situação problema:

(Adaptada de UFC - 2009) Uma fábrica de confecções produziu, sob encomenda, 70 peças de roupas entre blusas, jaquetas e calças, sendo a quantidade de blusas é igual ao dobro da quantidade de jaquetas. Se o número de bolsos em cada blusa, jaqueta e calça é dois, três e quatro, respectivamente, e o número total de bolsos nas peças é 200, então qual a quantidade de jaquetas fabricadas?

Primeiramente, precisamos montar equações que descrevem esse problema e, para isso, vamos definir nossas incógnitas: chamaremos de b o número de blusas, de j o número de jaquetas e de c o número de calças. Daí obtemos:

Uma fábrica de confecções produziu, sob encomenda, **70 peças de roupas** entre blusas, jaquetas e calças, sendo **a quantidade de blusas é igual ao dobro da quantidade de jaquetas**. Se o número de bolsos em cada blusa, jaqueta e calça é dois, três e quatro, respectivamente, e o número **total de bolsos nas peças é 200**, então qual a quantidade de jaquetas fabricadas?

$$b + j + c = 70$$

$$b = 2j$$

$$2b + 3j + 4c = 200$$

Então, o sistema linear que descreve o problema é

$$\begin{cases} b + j + c = 70 \\ b = 2j \\ 2b + 3j + 4c = 200 \end{cases}.$$

A segunda equação, $b = 2j$, determina b em função de j, então, substituindo essa expressão nas demais equações, obtemos um sistema 2×2 nas incógnitas j e c:

$$\begin{cases} 2j + j + c = 70 \\ 2 \cdot 2j + 3j + 4c = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2j + j + c = 70 \\ 4j + 3j + 4c = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3j + c = 70 \\ 7j + 4c = 200 \end{cases}.$$

Vamos resolver esse sistema pelo método da substituição e, para isso, vamos utilizar a primeira equação e escrever c em função de j:

$$\begin{cases} 3j + c = 70 \\ 7j + 4c = 200 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \quad c = 70 - 3j \\ \rightarrow \quad 7j + 4 \cdot (70 - 3j) = 200 \end{array}$$

$$7j + 280 - 12j = 200$$

$$-5j = 200 - 280$$

$$-5j = -80$$

$$j = \frac{-80}{-5} = 16$$

Desejamos apenas o número de jaquetas fabricadas, que foi 16.
No entanto, vamos determinar o número de blusas e calças. Para isso, usaremos as expressões $b = 2j$ e $c = 70 - 3j$:

$$b = 2j \quad \text{e} \quad c = 70 - 3j$$

$$b = 2 \cdot 16 \quad \text{e} \quad c = 70 - 3 \cdot 16$$

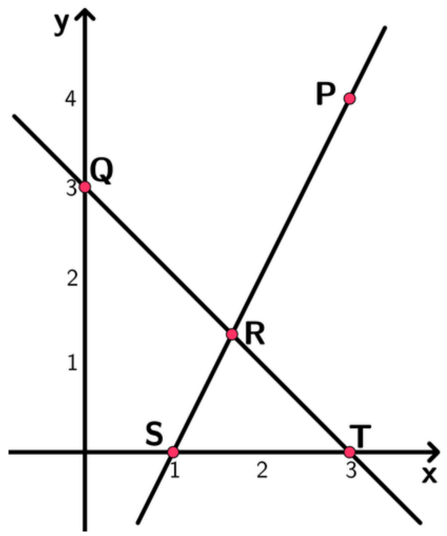
$$b = 32 \quad \text{e} \quad c = 70 - 48 \Rightarrow c = 22$$

Portanto, foram fabricadas 16 jaquetas, 32 blusas e 22 calças.

Exercícios Resolvidos

Exercício 1. Ao lado, você pode observar a representação gráfica do sistema linear

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}.$$



Dentre os pontos destacados, qual deles representa a solução do sistema linear apresentado?

a) P
b) Q
c) R
d) S
e) T

Solução: Devemos nos recordar que a solução de um sistema linear 2×2 é um par ordenado que é solução das duas equações, portanto, a interseção das duas retas. Logo, a solução do sistema está representada pelo ponto R, alternativa **c)**.

Exercício 2. Alice, Bruno e Carla foram a uma papelaria. Alice comprou 2 borrachas, 3 canetas e 1 lápis, gastando R$ 35,00. Bruno comprou 4 borrachas e 1 caneta, totalizando R$ 22,00. Carla comprou 2 lápis, pagando R$ 10,00. Determine o preço unitário de cada item comprado.

Solução: Inicialmente, chame de b o preço da borracha, c o preço da caneta e l o preço do lápis. Agora, vamos determinar as equações que representam essa situação:

Alice, Bruno e Carla foram a uma papelaria. Alice comprou **2 borrachas, 3 canetas e 1 lápis, gastando R$35,00.** Bruno comprou **4 borrachas e 1 caneta, totalizando R$22,00**. Carla comprou **2 lápis, pagando R$10,00**. Determine o preço unitário de cada item comprado.

$2b + 3c + l = 35$

$4b + c = 22$

$2l = 10$

Dessa forma, o sistema linear que representa o problema é

$$\begin{cases} 2b + 3c + l = 35 \\ 4b + c = 22 \\ 2l = 10 \end{cases}.$$

Da última equação obtemos que $l = 5$, substituindo nas demais equações, temos:

$$\begin{cases} 2b + 3c + 5 = 35 \\ 4b + c = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + 3c = 30 \\ 4b + c = 22 \end{cases}.$$

Usando o método da adição, temos:

$$\begin{cases} 2b + 3c = 30 & \cdot 4 \\ 4b + c = 22 & \cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8b + 12c = 120 \\ -8b - 2c = -44 \end{cases} +$$

$$\begin{aligned} 10c &= 76 \\ c &= \frac{76}{10} \\ c &= 7,6 \end{aligned}$$

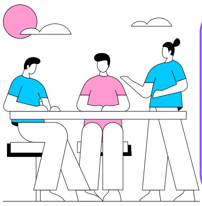
Com a segunda equação, determinamos o valor da borracha:

$$4b + c = 22 \Rightarrow 4b + 7,6 = 22 \Rightarrow 4b = 22 - 7,6 \Rightarrow 4b = 14,4$$

$$\Rightarrow b = \frac{14,4}{4} = 3,6.$$

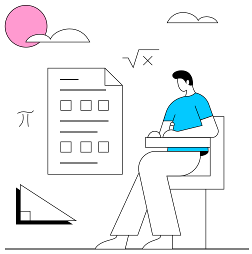
Portanto, a borracha custa R$ 3,60, a caneta custa R$ 7,60 e o lápis custa R$ 5,00.

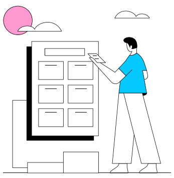
Exercício 3. Para o exercício resolvido 3, propomos uma atividade em grupo que tem por objetivo incentivar os estudantes a elaborarem problemas que envolvam equações lineares.
O professor pode adaptar essa proposta conforme, considerar mais produtivo à sua turma, ou substituí-la por outra com o mesmo objetivo.



Organizados em grupos de 3-4 estudantes, cada grupo deverá elaborar um problema contextualizado e sua devida solução, entregando-os de forma separada ao professor que irá verificar a viabilidade e razoabilidade do enunciado e solução.

Após a entrega, o professor sorteará os problemas elaborados entre os grupos. Cada grupo deve entregar a solução do problema elaborado pelo outro grupo ao professor.
Se for de interesse, e viável, cada grupo pode apresentar a solução do problema que elaborou em um terceiro momento.





A avaliação acontecerá de acordo com uma rubrica: cada grupo será avaliado quanto a três critérios, recebendo um score entre 0 e 2 em cada um deles.

Critério	Score 0	Score 1	Score 2
Contextualização, originalidade e solução inicial	Sem contexto ou copiado ou solução incorreta.	Contexto simples ou genérico e com solução correta.	Bem contextualizado, criativo e com solução correta
Cooperação	Participação desigual.	Cooperação parcial.	Participação ativa e igualitária.
Resolução da atividade do outro grupo	Incompleta ou incorreta.	Correta, porém com justificativa insuficiente.	Correta e com boa argumentação matemática.

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Prezado(a) professor(a), os conceitos apresentados neste material estruturado podem ser trabalhados usando os seguintes livros didáticos:

1. **Volume 4 (Sistemas, Matemática Financeira e Grandezas) - Coleção Prisma Matemática (Editora FTD):**
   - p. 34-44.
2. **Volume 4 (Trigonometria e Sistemas Lineares) – Coleção Matemática em Contextos (Editora Ática):**
   - p. 115-126.

PORTAL DA OBMEP

A sessão “Sistemas Lineares” apresenta vídeos, material teórico e exercícios que podem ser utilizados para incrementar o material proposto.

KHAN ACADEMY

A unidade “Sistemas de Equações Lineares” da plataforma Khan Academy podem ser utilizadas para auxiliar os estudantes no estudo dos conceitos deste material.

Atividades

ATIVIDADE 1

Para cada equação linear abaixo, identifique a(s) incógnita(s), os coeficientes e o termo independente.

a) $3x + 7 = 19$

b) $5y - 2x = 10$

c) $8 - 4a = 0$

d) $\frac{m}{2} + 3n - 1 = 5$

e) $-x + 2y - 4 = 0$

ATIVIDADE 2

Analise as equações a seguir e classifique-as como **Equação Linear** ou **Não é Equação Linear**. Justifique sua resposta para as que não forem equações lineares.

a) $2x + 5 = 12$

b) $x^2 - 3x + 1 = 0$

c) $4a - 7b + c = 20$

d) $\sqrt{y} + 9 = 4$

e) $\frac{3}{z} + 6 = 1$

ATIVIDADE 3

Para cada item, crie uma equação linear que atenda às características propostas.

a) Duas incógnitas, coeficientes 2 e – 4, e termo independente 7.

b) Três incógnitas, todos os coeficientes iguais a 1, e termo independente 0.

c) Duas incógnitas, uma com coeficiente – 0,75 e outra com coeficiente 1, e termo independente – 5.

d) Uma incógnita, coeficiente 5 e termo independente – 3.

ATIVIDADE 4

Leia as descrições a seguir, escreva o sistema de equações lineares que representa cada situação e, em seguida, resolva-o.

a) A soma de dois números é 15 e a diferença entre eles é 3.

b) O dobro de um número somado com o triplo de outro número é igual a 16. A soma desse primeiro número com o quíntuplo do segundo é igual a 1.

ATIVIDADE 5

Verifique se o par ordenado dado é a solução do sistema de equações lineares correspondente.

a) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \longrightarrow x = 2; y = 3$

b) $\begin{cases} 4a - b = 10 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \longrightarrow a = 3; b = 2$

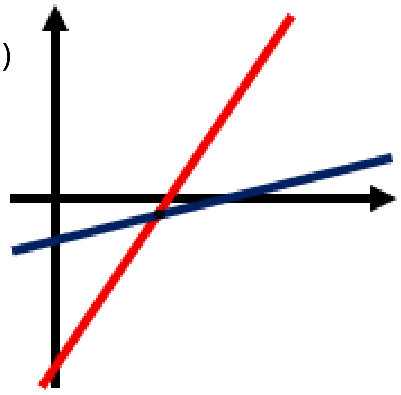
ATIVIDADE 6

(Enem 2023 - adaptada) O metrô de um município oferece dois tipos de tíquetes com colorações diferentes, azul e vermelha, sendo vendidos em cartelas, cada qual com nove tíquetes da mesma cor e mesmo valor unitário. Duas cartelas de tíquetes azuis e uma cartela de tíquetes vermelhos são vendidas por R$ 32,40. Sabe-se que o preço de um tíquete azul menos o preço de um tíquete vermelho é igual ao preço de um tíquete vermelho mais cinco centavos. Qual o preço, em real, de uma cartela de tíquetes vermelhos?

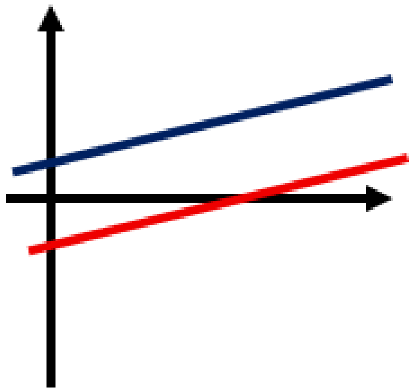
ATIVIDADE 7

Dois sistemas lineares foram representados pelas imagens abaixo. A partir dessas imagens, classifique cada sistema em em **Sistema Possível e Determinado (SPD), Sistema Possível e Indeterminado (SPI)** ou **Sistema Impossível (SI)** e justifique sua resposta.

a)



b)



ATIVIDADE 8

Represente graficamente o sistema linear $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ -6x - 2y = 4 \end{cases}$ e explique por que ele é um **Sistema Possível e Indeterminado (SPI).**

ATIVIDADE 9

Qual dos seguintes sistemas lineares abaixo é um Sistema Impossível?

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -3x + 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ x - y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 12 \end{cases}$

ATIVIDADE 10

Em uma feira de produtores, João, Maria e Pedro fizeram compras. João comprou 2 sacos de milho, 1 de feijão e 3 de arroz, gastando R$ 80,00. Maria comprou 1 saco de milho, 2 de feijão e 1 de arroz, gastando R$ 65,00. Pedro comprou 5 sacos de arroz, pagando R$ 50,00. Qual o preço unitário de cada item, respectivamente?

a) Milho: R$ 10,00; Feijão: R$ 15,00; Arroz: R$ 20,00
b) Milho: R$ 20,00; Feijão: R$ 15,00; Arroz: R$ 10,00
c) Milho: R$ 10,00; Feijão: R$ 20,00; Arroz: R$ 15,00
d) Milho: R$ 25,00; Feijão: R$ 10,00; Arroz: R$ 10,00
e) Milho: R$ 15,00; Feijão: R$ 20,00; Arroz: R$ 10,00

Referências

MATERIAL ESTRUTURADO

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, R. G. J.; SOUZA, P. R. C. **Prisma matemática: Sistemas, Matemática Financeira e Grandezas**. Ensino médio. Área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos: Trigonometria e Sistemas Lineares**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

ATIVIDADES

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2021 - Exame Nacional do Ensino Médio 2021:** 2º dia. Brasília: INEP, 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/enem/provas_e_gabaritos/2021_PV_impresso_D2_CD5.pdf. Acesso em: 26 jul. 2025.