SEDU 2026

Rotinas Pedagógicas Escolares

2ª Série

Primeiro Trimestre

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Gerência de Currículo
da Educação Básica

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Governador
JOSÉ RENATO CASAGRANDE

Secretário de Estado da Educação
VITOR AMORIM DE ANGELO

Subsecretária da Educação Básica e Profissional
ANDRÉA GUZZO PEREIRA

Gerente de Currículo da Educação Básica
ALEIDE CRISTINA DE CAMARGO

Subgerente de Desenvolvimento Curricular da Educação Básica
MARCOS VALÉRIO GUIMARÃES

Subgerente de Educação Ambiental
ALDETE MARIA XAVIER

2026

Coordenador-geral das Rotinas Pedagógicas Escolares
MARCOS VALÉRIO GUIMARÃES

Coordenadores do componente curricular
GABRIEL LUIZ SANTOS KACHEL
LAIANA MENEGUELLI
RAYANE SALVIANO DE OLIVEIRA SILVA
WELLINGTON ROSA DE AZEVEDO
WILLIAM MANTOVANI

Validadores das Rotinas Pedagógicas Escolares
JÉSSICA MONTEIRO FALQUETTO
THIAGO CÉZAR DE PÁDUA ROSA
ORGANDI MONGIN ROVETTA
CARLOS EDUARDO MORAES PIRES

Professores bolsistas responsáveis pela elaboração das Rotinas Pedagógicas Escolares

5º ano EF
FRANCIELY GOMES FAVERO FERREIRA
PAULA AVAREZ CABANÊZ
SILVANA COCCO DALVI

6º ano EF
KARLA SOUTO DE AMORIM
MAYARA DOS SANTOS ZANARDI

7º ano EF
DAVI MARCIO BERMUDES LINO
HELIONARDO THOMAZ ALVES LOURENÇO

8º ano EF
NAFTALY CRISTAL FÉLIX
FABIANA BUENO

9º ano EF
AMECKSON DE SOUZA FERREIRA
LILIAN CRISTINA RODRIGUES SARMENTO

1ª série EM
ANATIELLI LEILIANE PEREIRA SANTANA
FABRÍCIO OLIVEIRA SOUZA

2ª série EM
HAROLDO CABRAL MAYA
SEBASTIÃO ALMEIDA MOTA

3ª série EM
HIGOR SOARES MAJONI
MAURÍCIO DE OLIVEIRA CELERI

Sumário

CAPÍTULO 1 - Potenciação, Função Exponencial e Progressão Geométrica

CAPÍTULO 2 - Logaritmo e Função Logaritmica

Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

SEDU 2026

Gerência de Currículo
da Educação Básica

Capítulo 1: Potenciação, Função Exponencial e Progressão Geométrica

Apresentação

Prezado(a) estudante,

Você já parou para pensar sobre como o número de seguidores em uma rede social pode crescer tão rápido? Ou por que certos fenômenos da natureza, como o crescimento de bactérias ou a desintegração de substâncias radioativas, parecem ocorrer em ritmo acelerado?

Essas situações têm algo em comum: todas envolvem crescimento ou decrescimento exponenciais — temas que estão diretamente ligados à potenciação, às funções exponenciais e às progressões geométricas. Neste capítulo, você vai explorar essas ideias, entendendo como elas se conectam e como ajudam a descrever e interpretar diferentes fenômenos do mundo real.

O que você vai estudar neste capítulo

Você começará revisando e ampliando seus conhecimentos sobre potenciação, aprendendo a trabalhar com expoentes inteiros e racionais e reconhecendo o papel da base e do expoente no resultado de uma potência.

Em seguida, estudará a função exponencial, compreendendo como ela é definida, como se comporta e como é representada graficamente. Vai perceber como mudanças na base ou em outros parâmetros alteram o formato da curva e como essas funções aparecem em situações como crescimento populacional, juros compostos ou decaimento radioativo.

Por fim, conhecerá as Progressões Geométricas (PGs), que são sequências numéricas em que cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por um número constante. Aprenderemos a identificar regularidades, deduzir o termo geral, calcular a soma dos termos e resolver problemas contextualizados. Você também vai perceber que há uma estreita relação entre a PG e a função exponencial — ambas envolvem um crescimento ou decrescimento multiplicativo.

Apresentação

Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- Efetuar potenciação com expoentes inteiros e racionais;
- Identificar e definir a função exponencial e suas características;
- Construir e interpretar gráficos de funções exponenciais, analisando seus parâmetros;
- Modelar e resolver problemas envolvendo crescimento ou decrescimento exponencial;
- Determinar o termo geral e a soma dos termos de uma PG;
- Relacionar PGs e funções exponenciais, reconhecendo suas semelhanças.

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

POTENCIAÇÃO COM EXPOENTES INTEIROS E RACIONAIS

Definições

Definição 1: Seja n um número natural e a um número real. Chama-se de potência de base a e expoente n o número a^n, que é produto de n fatores iguais a a, ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{\text{n vezes}}$$

Exemplos:

- $1^8 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
- $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
- $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$
- $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{27}{64}$
- $(-0{,}5)^2 = (-0{,}5) \cdot (-0{,}5) = 0{,}25$

Definição 2: Caso $a \neq 0$, então $a^0 = 1$

Exemplos:

- $1^0 = 1$
- $(-3)^0 = 1$
- $10000000^0 = 1$
- $(0{,}000000018)^0 = 1$
- $(\pi)^0 = 1$

Definição 3: Caso o expoente seja negativo, temos que

Exemplos:

- $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$
- $(-3)^{-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$
- $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \left(\frac{7}{4}\right) \cdot \left(\frac{7}{4}\right) \cdot \left(\frac{7}{4}\right) = \frac{343}{64}$
- $(0{,}5)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- $\frac{1}{5^{-2}} = 5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
- $(a+b)^{-1} = \left(\frac{1}{a+b}\right)^1 = \frac{1}{a+b}$ (Contanto que $a + b \neq 0$)

VOCÊ SABIA?

O corpo humano abriga trilhões de bactérias. Estima-se que o número de bactérias no intestino humano seja em torno de $1{,}3 \times 10^{13}$, um número extremamente grande, que fica mais acessível e gerenciável usando notação científica.

Definição 4: *Sejam m e n números inteiros positivos, temos que*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{(contanto que } a \geq 0\text{, caso } n \text{ seja par)}$$

Exemplos:

- $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16^1} = \sqrt[2]{16} = 4 \qquad (\text{pois } 4 \times 4 = 16)$
- $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{64} = 8 \qquad (\text{pois } 8 \times 8 = 64)$
- $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9 \qquad (\text{pois } 9 \times 9 \times 9 = 729)$
- $0,008^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0,008^1} = \sqrt[3]{0,008} = 0,2 \qquad (\text{pois } 0,2 \times 0,2 \times 0,2 = 0,002)$
- $5^{\frac{0}{7}} = \sqrt[7]{5^0} = \sqrt[7]{1} = 1 \qquad (\text{pois } 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1)$
- $\left(\frac{36}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{36}{49}\right)^1} = \frac{\sqrt[2]{36}}{\sqrt[2]{49}} = \frac{6}{7}$
- $169^{0,5} = 169^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{169^1} = 13$

VOCÊ SABIA?

Ao dobrar uma folha de papel ao meio, a espessura aumenta exponencialmente. Depois de 10 dobras, a espessura seria $2^{10} = 1024$ vezes maior que a original. Para uma folha de papel com 1 milímetro de espessura, isso resultaria em 1 mm $\times$ 1024 = 1024 mm, ou seja, mais de 1 metro de altura.

Propriedades

Sejam *a*, *b*, *m* e *n* números reais. Temos as seguintes propriedades:

Propriedade 1:

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}}$$

Exemplos:

- $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296$
- $(2x)^{\,5} = 2^5x^5 = 32x^5$

Propriedade 2:

$$\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}}{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}}} \qquad \textbf{(Contanto que } \boldsymbol{b \neq 0}\textbf{)}$$

Exemplos:

- $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$
- $\left(\frac{2x}{5}\right)^3 = \frac{(2x)^3}{5^3} = \frac{2^3x^3}{5^3} = \frac{8x^3}{125}$

Propriedade 3:

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m+n}}$$

Exemplos:

- $2^3 \cdot 2^4 = 2^{(3)+(4)} = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
- $9^5 \cdot 9^{-4} = 9^{(5)+(-4)} = 9^{5-4} = 9^1 = 9$

Propriedade 4:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Exemplos:

- $(3^2)^0 = 3^{(2)\cdot(0)} = 3^0 = 1$
- $(4^2)^{-2} = 4^{(2)\cdot(-2)} = 4^{-4} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1^4}{4^4} = \frac{1}{256}$

Propriedade 5:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \textbf{(Contanto que } a \neq 0\textbf{)}$$

Exemplos:

- $\frac{2^4}{2^3} = 2^{(4)-(3)} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$
- $\frac{3^{-2}}{3^4} = 3^{(-2)-(4)} = 3^{-2-4} = 3^{-6} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1^6}{3^6} = \frac{1}{729}$

Exercicios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Pedro começou guardando R$2,00 em seu pote de dinheiro para emergências e decidiu dobrar o valor acumulado no pote todos os dias nos próximos 7 dias. Quantos reais Pedro terá juntado após esse período?

SOLUÇÃO. Perceba que, no primeiro dia, Pedro dobra o valor inicial de R$2,00, o que pode ser representado como:

$$2 \times 2 = 2^2$$

No segundo dia, o valor acumulado no pote será novamente dobrado, resultando em:

$$2^2 \times 2 = 2^{2+1} = 2^3$$

Seguindo esse padrão, a cada dia o valor acumulado é multiplicado por 2, ou seja, a potência do 2 aumenta em 1. No sétimo dia, após dobrar o valor acumulado no sexto dia, teremos:

$$2^8 = 256$$

Portanto, Pedro terá R$256,00 no pote ao final de 7 dias.

EXERCÍCIO 2. Um grupo de 100 pessoas se reuniu para formar um bolão da Mega-Sena e ganhou um prêmio total de R$10.000.000,00 (dez milhões de reais). O valor será dividido igualmente entre os participantes. Utilize as propriedades da potenciação para calcular quanto cada pessoa receberá.

SOLUÇÃO. O prêmio total é 10.000.000, que pode ser escrito como

$$10000000 = 10^7$$

O número de participantes no bolão é 100, que pode ser escrito como

$$100 = 10^2$$

Para saber quanto cada um ganhou, basta dividirmos o prêmio pelo número de participantes do bolão, ou seja

$$\frac{10^7}{10^2} = 10^{7-2} = 10^5 = 100000$$

Portanto, cada participante receberá R$100.000,00.

Atividades

ATIVIDADE 1

Numa garagem há 4 automóveis, em cada automóvel há 4 rodas, e em cada roda há 4 parafusos.

a) Determine a quantidade total de parafusos de todas as rodas desses automóveis.

b) Represente a quantidade total de parafusos de todas as rodas desses automóveis como sendo o produto de ***n*** fatores iguais de ***a***, utilizando a definição de potenciação.

ATIVIDADE 2

Calcule o valor numérico de:

a) $9^2 =$

b) $5^3 =$

c) $4^4 =$

d) $2^5 =$

e) $(-7)^2 =$

f) $(-4)^3 =$

g) $(-2)^4 =$

h) $(-3)^5 =$

i) $6^4 =$

j) $8^3 =$

k) $-2^6 =$

l) $13^2 =$

ATIVIDADE 3

Calcule o valor numérico de:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

b) $\left(\frac{5}{6}\right)^4 =$

c) $(0,3)^3 =$

d) $(3,5)^2 =$

e) $\left(\frac{7}{10}\right)^0 =$

f) $\left(\frac{3}{7}\right)^4 =$

g) $(2,4)^2 =$

h) $(1,2)^4 =$

i) $\left(\frac{9}{8}\right)^2 =$

j) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 =$

k) $(17,1)^2 =$

l) $(0,4)^3 =$

ATIVIDADE 4

Calcule o valor numérico de:

a) $4^{-3} =$

b) $10^{-2} =$

c) $5^{-4} =$

d) $3^{-5} =$

e) $(-4)^{-2} =$

f) $(-2)^{-3} =$

g) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} =$

h) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2} =$

i) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3} =$

j) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-3} =$

k) $(0,3)^{-2} =$

l) $(1,5)^{-6} =$

ATIVIDADE 5

Calcule o valor numérico de:

a) $81^{\frac{1}{2}} =$

b) $9^{\frac{3}{2}} =$

c) $8^{\frac{2}{3}} =$

d) $16^{\frac{1}{4}} =$

e) $121^{0,5} =$

f) $\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{1}{2}} =$

g) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} =$

h) $(0,36)^{\frac{1}{2}} =$

i) $(1,44)^{\frac{1}{2}} =$

j) $1^{0,75} =$

k) $(0,027)^{\frac{1}{3}} =$

l) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} =$

ATIVIDADE 6

Calcule o valor numérico das potências de 10 a seguir:

a) $10^2 =$

b) $10^3 =$

c) $10^5 =$

d) $10^4 =$

e) $10^6 =$

f) $10^1 =$

g) $10^{-1} =$

h) $10^{-3} =$

i) $10^{-2} =$

j) $10^{-4} =$

k) $10^{-5} =$

l) $10^{-6} =$

ATIVIDADE 7

a) Observe o expoente e o resultado da potência de 10 nos itens ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e*** e ***f*** do exercício anterior. Você percebe algum padrão? Caso afirmativo, qual?

b) Observe o expoente e o resultado da potência de 10 nos itens ***g***, ***h***, ***i***, ***j***, ***k*** e ***l*** do exercício anterior. Você percebe algum padrão? Caso afirmativo, qual?

ATIVIDADE 8

Escreva cada valor a seguir na forma de uma única potência de base 10.

a) $100 =$

b) $10\ 000 =$

c) $0,001 =$

d) $0,000001 =$

e) $1\ 000\ 000 =$

f) $0,00001 =$

g) $\dfrac{100\,000}{100} =$

h) $\dfrac{0,0001}{1\,000} =$

i) $(100)^{-6} =$

j) $(0{,}1)^{8} =$

ATIVIDADE 9

Análise as sentenças abaixo e indique (V) para verdadeira e (F) para falsa:

a) ( ) $2^7 \cdot 2^2 = 2^9$

b) ( ) $(7^3)^2 = 7^5$

c) ( ) $2^{3^2} = (2^3)^2$

d) ( ) $(2+5)^2 = 2^2 + 5^2$

e) ( ) $\dfrac{10^3}{10^5} = 10^{-2}$

ATIVIDADE 10

Calcule o valor do número representado por y, usando as propriedades da potenciação:

$$y = \frac{2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}}{30^9}$$

Observe que seria trabalhoso calcular a potência de 30^9. Por isso, podemos decompor o número 30 em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

2 x 3 x 5

Em seguida podemos representar o número 30, como o produto 2 x 3 x 5, e se elevarmos ao expoente 9, teremos:

$$30^9 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^9$$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição

Seja a um número real positivo e diferente de 1 ($a > 0$ e $a \neq 1$), a função $f : R \to R_+^*$ dada por $f(x) = a^x$ é denominada função exponencial de base a .

Exemplos:

- $f(x) = 2^x$ A função f é uma função exponencial de base 2.
- $g(x) = 5^x$ A função g é uma função exponencial de base 5.
- $h(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ A função h é uma função exponencial de base $\frac{2}{3}$.
- $m(x) = \pi^x$ A função m é uma função exponencial de base π.
- $n(x) = (0,2)^x$ A função n é uma função exponencial de base 0,2.

Gráficos da Função Exponencial

A função exponencial pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor de sua base. É importante lembrar que a base deve ser sempre um número positivo e diferente de 1. Assim, considerando uma função exponencial qualquer de base a, o gráfico pode apresentar dois comportamentos distintos:

- *Crescente*: ocorre quando a base é maior que 1, ou seja, $a > 1$.
- *Decrescente*: ocorre quando a base está entre 0 e 1, isto é, $0 < a < 1$.

Portanto, a base da função exponencial define diretamente o crescimento ou decrescimento da função, e consequentemente, de sua representação gráfica.

Vamos analisar o comportamento gráfico das funções exponenciais crescentes e decrescentes. Para isso, considere as funções exponenciais crescentes com base 2 e 3. Observe na tabela abaixo que, à medida que x aumenta, o valor da função também cresce, evidenciando que essas são **funções exponenciais crescentes**.

	$f(x) = 2^x$	$f(x) = 3^x$
$x = -2$	$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$	$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$
$x = -1$	$2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1^1}{2^1} = \frac{1}{2}$	$3^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1^1}{3^1} = \frac{1}{3}$
$x = 0$	$2^0 = 1$	$3^0 = 1$
$x = 1$	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$
$x = 2$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$

A seguir, apresentamos o gráfico de cada uma dessas funções, onde é possível observar que ambas exibem um crescimento acelerado à medida que os valores de x aumentam.

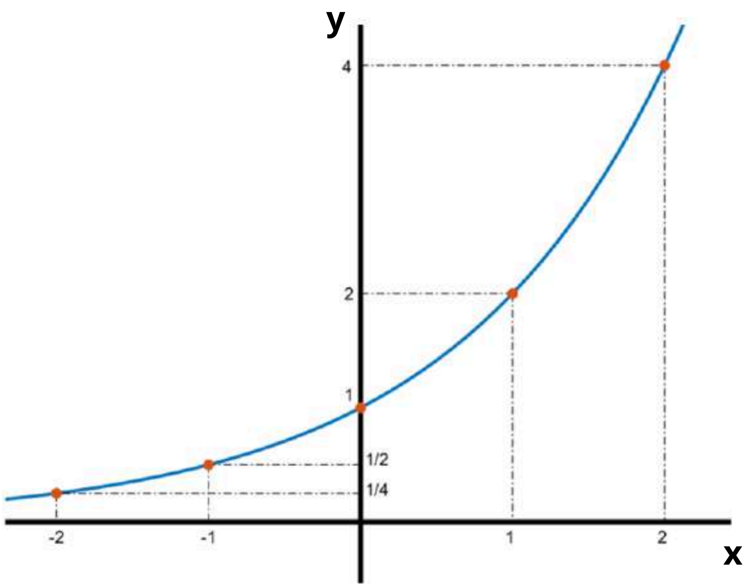


Gráfico 1: $f(x) = 2^x$

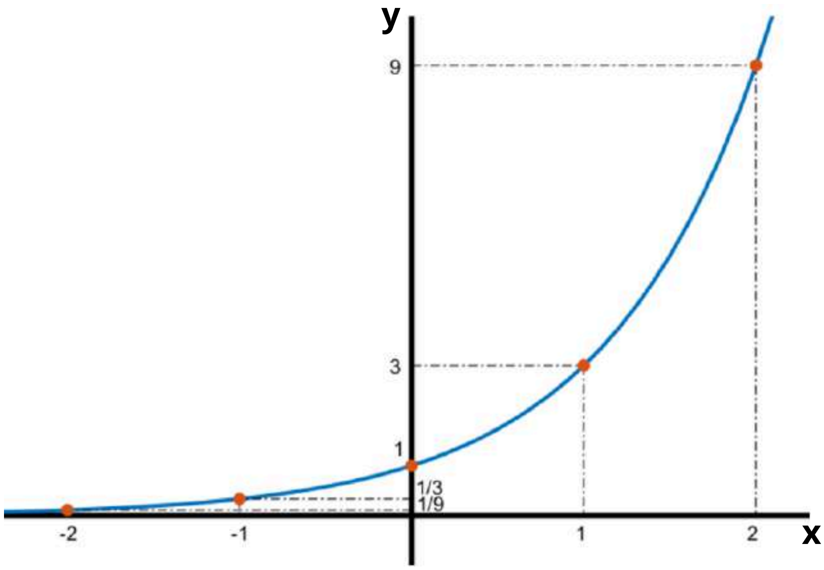


Gráfico 2: $f\left(x\right)=3^x$

Agora, vejamos o comportamento das **funções exponenciais decrescentes**.

Considere as funções $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$
$x=-2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3^2=9$
$x=-1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2^1=2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3^1=3$
$x=0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0}=1$
$x=1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1^1}{2^1}=\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1}=\frac{1^1}{3^1}=\frac{1}{3}$
$x=2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1^2}{2^2}=\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{1^2}{3^2}=\frac{1}{9}$

A seguir, o gráfico dessas funções é apresentado. Note que ambas possuem comportamento decrescente, aproximando-se do eixo x sem nunca tocá-lo.

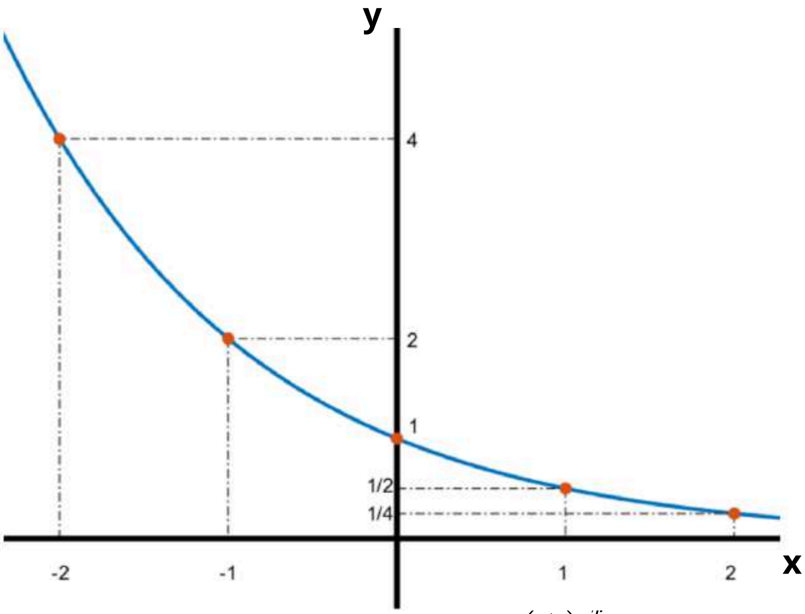


Gráfico 3: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

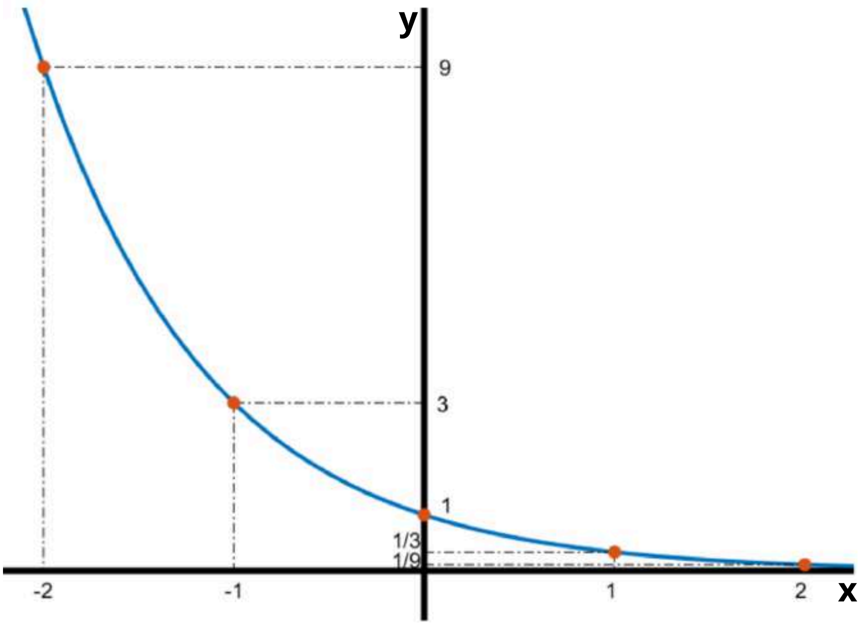


Gráfico 4: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

VOCÊ SABIA?

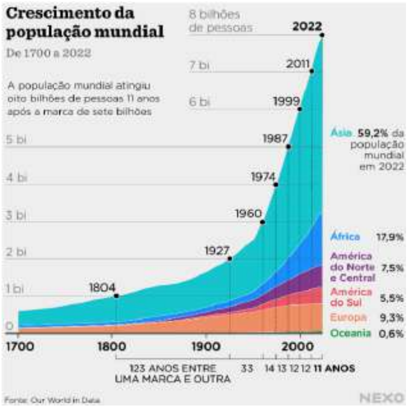
Muitos processos naturais seguem leis exponenciais. Por exemplo, o crescimento de bactérias ou a decomposição de substâncias radioativas são modelados por funções exponenciais. No caso das bactérias, por exemplo, elas podem duplicar de número em um intervalo de tempo fixo, o que é um exemplo de crescimento exponencial.

Reconhecendo situações do cotidiano modeladas por funções exponenciais

Funções exponenciais estão presentes em diversos contextos do nosso dia a dia, seja em fenômenos de crescimento acelerado ou de decrescimento. Abaixo, destacamos alguns exemplos práticos:

Crescimento populacional

Quando uma população cresce a uma taxa constante em porcentagem, o número de habitantes aumenta de forma exponencial. Por exemplo, se a população de uma cidade cresce a 5% ao ano, o número de habitantes pode ser modelado por uma função exponencial crescente.



Investimentos financeiros

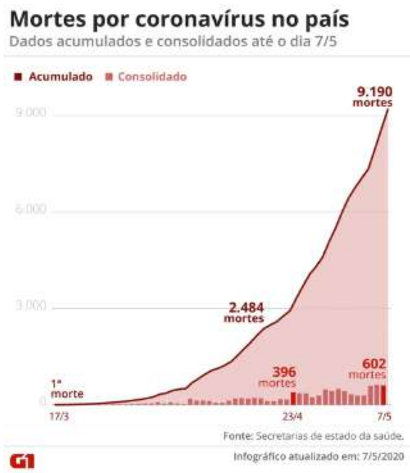
O rendimento de aplicações que possuem juros compostos pode ser modelado por funções exponenciais crescentes. Nesse caso, o valor acumulado cresce mais rapidamente ao longo do tempo devido aos juros incidirem sobre o capital acumulado.

Decaimento radioativo

A desintegração de materiais radioativos segue um modelo de decrescimento exponencial, onde a quantidade remanescente do material diminui com o tempo de forma previsível.

Propagação de doenças

Durante surtos ou epidemias, o número de pessoas infectadas pode crescer exponencialmente no início, dependendo da taxa de transmissão e do contato entre os indivíduos.



EXERCÍCIO 1. Analise as funções abaixo e determine se elas são crescentes ou decrescentes. Justifique sua resposta.

a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $h(x) = 5^x$

d) $k(x) = 0,8^x$

SOLUÇÃO.

Lembremos que a classificação de uma função exponencial como crescente ou decrescente depende do valor da sua base:

- A função é crescente se base > 1.
- A função é decrescente se 0 < base < 1.

Portanto:

a) Crescente, pois 3 é maior que 1.

b) Decrescente, pois $\frac{1}{2}$ está entre 0 e 1.

c) Crescente, pois 5 é maior que 1.

d) Decrescente, pois 0,8 está entre 0 e 1.

EXERCÍCIO 2. Considere a função $f(x) = 7^x$. Calcule os valores de $f(x)$ para $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$.

SOLUÇÃO.

$$x = -2 \rightarrow f(-2) = 7^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1^2}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = 7^{-1} = \left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{1}{7}$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 7^0 = 1$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = 7^1 = 7$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = 7^2 = 49$$

EXERCÍCIO 3.

(ENEM - 2015) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $\boldsymbol{s(t) = 1\,800 \cdot (1{,}03)^t}$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais:

a) 7 414,00
b) 3 819,24
c) 3 709,62
d) 3 708,00
e) 1 909,62

SOLUÇÃO

A expressão que corresponde à proposta salarial é uma função exponencial e, para resolver o problema, devemos considerar que t = 2. Assim, temos o seguinte desenvolvimento:

$$s(t) = 1\,800 \cdot (1{,}03)^t$$

$$s(2) = 1\,800 \cdot (1{,}03)^2$$

$$s(2) = 1\,800 \cdot 1{,}0609$$

$$s(2) = 1\,909{,}62$$

A alternativa correta é, portanto, a **LETRA E.**

Atividades

ATIVIDADE 1

Identifique, entre as funções a seguir, qual delas representa uma função exponencial. Com base na definição de função exponencial, justifique sua resposta.

$a)\ f(x) = (0,3)^{2x}$

$b)\ f(x) = 2x^8$

$c)\ f(x) = x^2$

$d)\ f(x) = \dfrac{1^x}{5}$

ATIVIDADE 2

Classifique as funções exponenciais em crescente ou decrescente.

$a)\ f(x) = \left(\dfrac{9}{5}\right)^x$

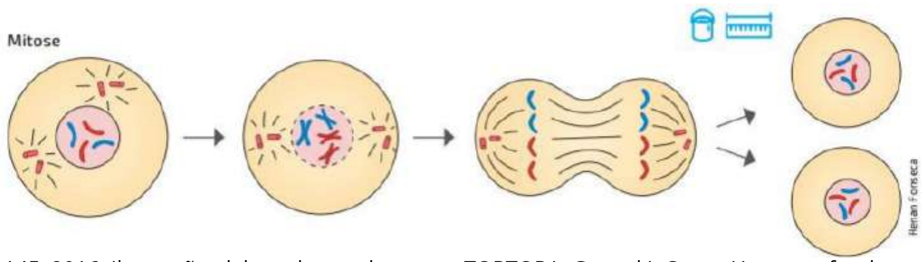
$b)\ f(x) = 6^{-x}$

$c)\ f(x) = 4^{\frac{x}{2}}$

$d)\ f(x) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x}$

ATIVIDADE 3

A mitose é um processo de divisão celular no qual uma célula duplica seu conteúdo e se divide em duas células-filhas geneticamente idênticas à célula-mãe, ambas com o mesmo número de cromossomos. Cada célula filha, por sua vez, repete esse processo, totalizando, após a 2ª divisão, quatro células-filhas.



Fonte: SOUZA, p.145, 2016. Ilustração elaborada com base em: TORTORA, Gerard J. Corpo Humano: fundamentos de anatomia e fisiologia. Tradução Clãudia L. Zimmer. 4ª ed. Porto Alegra: Arrmed, 2000.

a) Determine o número total de células-filhas obtidas a partir de uma única célula após:

- 3 divisões celular
- 4 divisões celular
- 10 divisões celular

b) Escreva uma função que associe a quantidade total de células-filhas y, obtida a partir de uma única célula, após uma quantidade x de divisões (Considere x > 0).

ATIVIDADE 4

Considere as funções exponenciais de domínio real $f(x) = 8^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Assim, calcule o valor de:

a) $f(2) =$

d) $f\left(\frac{1}{3}\right) =$

b) $g(3) =$

e) $g(-3) =$

c) $f(-2) =$

f) $g(-1) + f(1) =$

ATIVIDADE 5

Chamamos de tempo de meia-vida de uma substância radioativa ao tempo que se passa para que a quantidade da substância se reduza a metade. O iodo-131, um isótopo radioativo com meia-vida de aproximadamente 8 dias, é utilizado no tratamento de câncer de tireoide.

Considere um experimento que avalia a variação da massa de uma amostra contendo 20 mg de iodo-131 ao longo do tempo.

A função $m(t) = 20 \cdot (0,5)^{\frac{t}{8}}$, descreve a massa ***m*** de iodo-131, em gramas, após t dias do início do experimento. A representação gráfica ao lado ilustra o decaimento exponencial da massa de iodo-131 ao longo de 24 dias.

Quantos miligramas de iodo-131 restaram no sangue do paciente no 24º dia após a ingestão de 20 mg de medicação com iodo-131? E no 32º dia?

Variação do iodo-131 numa amostra

Fonte: SOUZA, 2020, p.79.

ATIVIDADE 6

O gráfico da função exponencial dada por $f(x) = a^x$, com *a* real, *a* > 0 e *a* ≠ 1, passa pelo ponto:

a) (0, 0)
b) (1, 0)
c) (0, -1)
d) (0, 1)
e) (1, 1)

ATIVIDADE 7

Uma pessoa publicou uma notícia falsa em uma rede social que alcançou inicialmente 200 pessoas. Devido a vários compartilhamentos da informação, a quantidade de pessoas alcançadas pela notícia aumenta cinco vezes a cada hora desde a publicação inicial. Qual será a função que relaciona a quantidade **N** de pessoas alcançadas pela notícia, **t** horas após a publicação inicial?

$a) N(t) = 200 + 5^t$

$b) N(t) = 200 + t^5$

$c) N(t) = 200^{5t}$

$d) N(t) = 200 \cdot 5^t$

$e) N(t) = 1000 \cdot t$

ATIVIDADE 8

Empreendedoras reconhecem que as mídias digitais desempenham um papel fundamental no crescimento de suas marcas. Com isso, uma delas adquiriu um pacote de divulgação para promover um anúncio em uma rede social, com o objetivo de aumentar a visibilidade de sua loja de artigos esportivos recém-inaugurada.

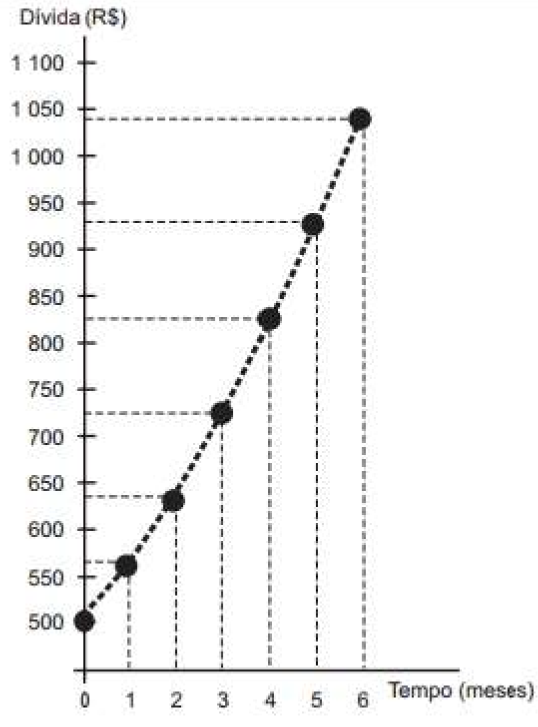
O anúncio foi inicialmente exibido para 100 pessoas diferentes. Cada uma dessas pessoas, ao visualizar o anúncio, o compartilhou com seus próprios seguidores, o que fez com que o alcance de visualização triplicasse a cada 2 horas. O número total de pessoas que visualizam o anúncio ao longo do tempo é modelado pela função exponencial $N(t) = 100 \cdot 3^{0,5.t}$, onde t representa o tempo em horas após a publicação, e N(t) é o número de pessoas que visualizaram o anúncio. Qual será o número de pessoas que visualizarão o anúncio após 10 horas de sua publicação?

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 1

(ENEM - 2013) Um trabalhador possui um cartão de crédito que, em determinado mês, apresenta o saldo devedor a pagar no vencimento do cartão, mas não contém parcelamentos a acrescentar em futuras faturas. Nesse mesmo mês, o trabalhador é demitido. Durante o período de desemprego, o trabalhador deixa de utilizar o cartão de crédito e também não tem como pagar as faturas, nem a atual nem as próximas, mesmo sabendo que, a cada mês, incidirão taxas de juros e encargos por conta do não pagamento da dívida.

Ao conseguir um novo emprego, já completados 6 meses de não pagamento das faturas, o trabalhador procura renegociar sua dívida. O gráfico mostra a evolução do saldo devedor.



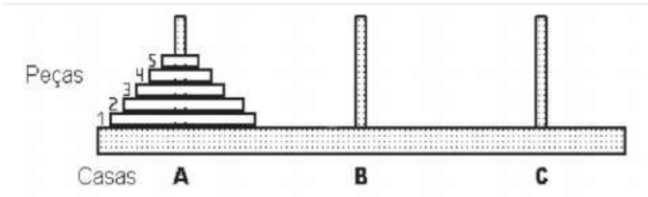
Com base no gráfico, podemos constatar que o saldo devedor inicial, a parcela mensal de juros e a taxa de juros são:

a) R$ 500,00; constante e inferior a 10% ao mês.
b) R$ 560,00; variável e inferior a 10% ao mês.
c) R$ 500,00; variável e superior a 10% ao mês.
d) R$ 560,00; constante e superior a 10% ao mês.
e) R$ 500,00; variável e inferior a 10% ao mês.

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 2

(ENEM - 2011) A torre de Hanói é um jogo que tem o objetivo de mover todos os discos de uma haste para outra, utilizando o menor número possível de movimento, respeitando-se as regras.



As regras são:
1- um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor;
2 - pode-se mover um único disco por vez;
3 - um disco deve estar sempre em uma das três hastes ou em movimento.

Disponível em: http://www.realidadevirtual.com.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).
Disponível em: http://www.imeusp.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Usando a torre de Hanói e baseando-se nas regras do jogo, podemos montar uma tabela entre o número de peças (x) e o número mínimo de movimentos (y):

Número de peças	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15

A relação entre (x) e (y) é:

$a)\ y = 2^x - 1$

$b)\ y = 2^{x-1}$

$c)\ y = 2^x$

$d)\ y = 2x - 1$

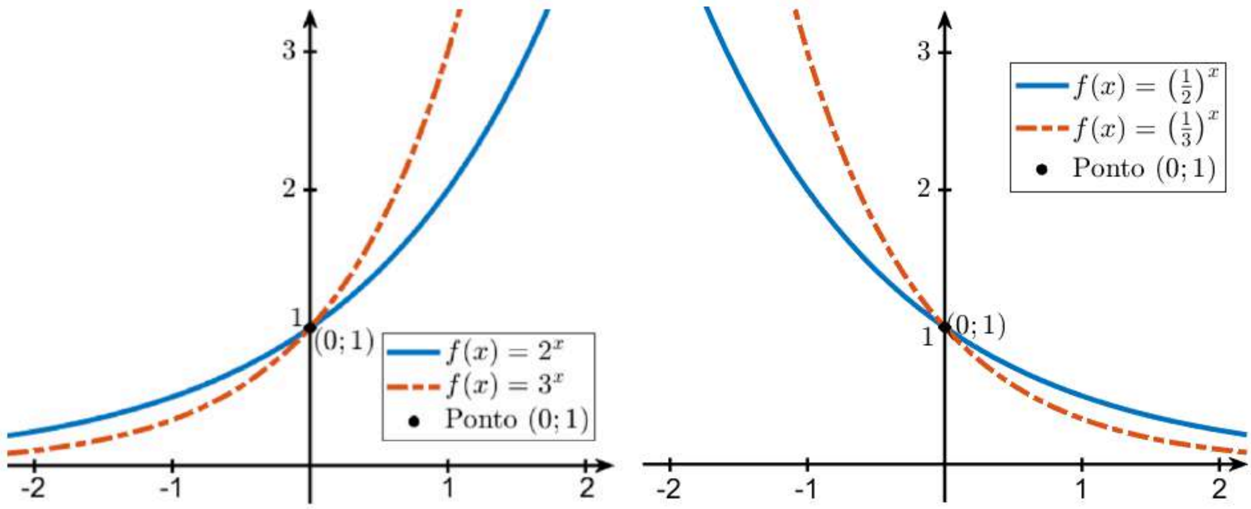
$e)\ y = 2x - 4$

ANÁLISE GRÁFICA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Introdução

Nesta segunda parte do estuda de funções exponenciais, exploraremos a construção e a análise de seus gráficos. Vamos observar as características importantes se manifestam em qualquer função exponencial e como os parâmetros influenciam seu comportamento. **Nosso objetivo neste material é entender essas funções de maneira prática e visual**.

Vejamos na figura 1 alguns exemplos de gráficos de funções crescentes e decrescentes.



(a) Funções crescentes (b) Funções decrescentes

Figura 1: Gráficos de funções exponenciais com diferentes bases.

Sempre que sentir necessidade, recorra à figura 1 para constatar as características elencadas nos próximos tópicos.

CARACTERÍSTICAS COMUNS A TODA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Vejamos algumas características válidas para qualquer função exponencial.

Domínio e imagem

- **Domínio:** As funções exponenciais estão definidas para qualquer número real ($x \in \mathbb{R}$).
- **Imagem:** O valor de $f(x)$ é sempre positivo. Isto quer dizer que o **gráfico nunca toca ou cruza o eixo x**.

Curvatura do gráfico

O gráfico de uma função exponencial, se destaca por crescer ou decrescer de forma acelerada, indicando uma curva que nunca muda de direção.

Valor da função em $x = 0$

Toda função na forma $f(x) = a^x$ possui o **ponto em comum** (0,1), pois

$$f(0) = a^0 = 1$$

Isso significa que em toda função $f(x) = a^x$ ou seja, em que **a** é um número real positivo e diferente de 1, o gráfico da função exponencial sempre passa pelo ponto (0,1). Esse ponto é essencial para esboçar esse tipo de gráfico.

VOCÊ SABIA?

Um exemplo de função exponencial decrescente é o decaimento de substâncias radioativas, onde a quantidade da substância diminui a uma taxa constante ao longo do tempo. Esse comportamento é visualizado graficamente por uma curva que começa com um valor alto e diminui progressivamente até se aproximar de zero, mas **nunca** chega a ele.

DIFERENÇAS ENTRE FUNÇÕES EXPONENCIAIS CRESCENTES E DECRESCENTES

Além das características em comum de toda função exponencial, temos as particularidades para os casos das funções exponenciais crescentes ou decrescentes. Vejamos agora as principais diferenças entre elas.

Análise assintótica

A análise do comportamento assintótico nos ajuda a entender como a função se comporta quando x assume valores muito grandes ($x \to +\infty$) ou muito pequenos ($x \to -\infty$).

- **Função crescente**:
  - Conforme x decresce, $f(x)$ se aproxima de 0, mas nunca o alcança.
  - Conforme x cresce, $f(x)$ cresce cada vez mais acentuadamente.
- **Função decrescente**:
  - Conforme x decresce, $f(x)$ cresce cada vez mais acentuadamente.
  - Conforme x cresce, $f(x)$ se aproxima de 0, mas nunca o alcança.

Estritamente crescente ou decrescente

A função exponencial é injetora, ou seja, para quaisquer dois valores diferentes de x_1 e x_2, os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ também serão diferentes. Dessa forma, temos as seguintes diferenciações.

- **Função crescente**:
  - Se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.
  - Conforme x aumenta, $f(x)$ também aumenta continuamente.
- **Função decrescente**:
  - Se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.
  - Conforme x aumenta, $f(x)$ diminui continuamente.

Velocidade de crescimento ou decaimento

A velocidade com que a função cresce ou decai depende do valor da base a, diferenciando-se da seguinte maneira.

- **Função crescente:** quanto maior a base, mais rápido o crescimento da função. Por exemplo, $f(x) = 3^x$ cresce mais rapidamente que $f(x) = 2^x$.
- **Função decrescente:** quanto menor a base, mais rápido o decaimento. Por exemplo, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ decresce mais rapidamente que $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Ou seja, base a controla a velocidade de crescimento ou decaimento.

FUNÇÃO DO TIPO EXPONENCIAL

O crescimento ou decrescimento exponencial é característico de certos fenômenos naturais e de algumas situações do cotidiano. No entanto, de modo geral, não se apresenta na forma $f(x) = a^x$ (com $a > 1$ e $a \neq 0$), mas sim modificado por constantes características do fenômeno, como em $f(x) = b \cdot a^{k \cdot x}$ com $b, k \in R^*$. Dizemos que essa função é **do tipo exponencial**, e o gráfico dela em um plano cartesiano também é uma curva exponencial.

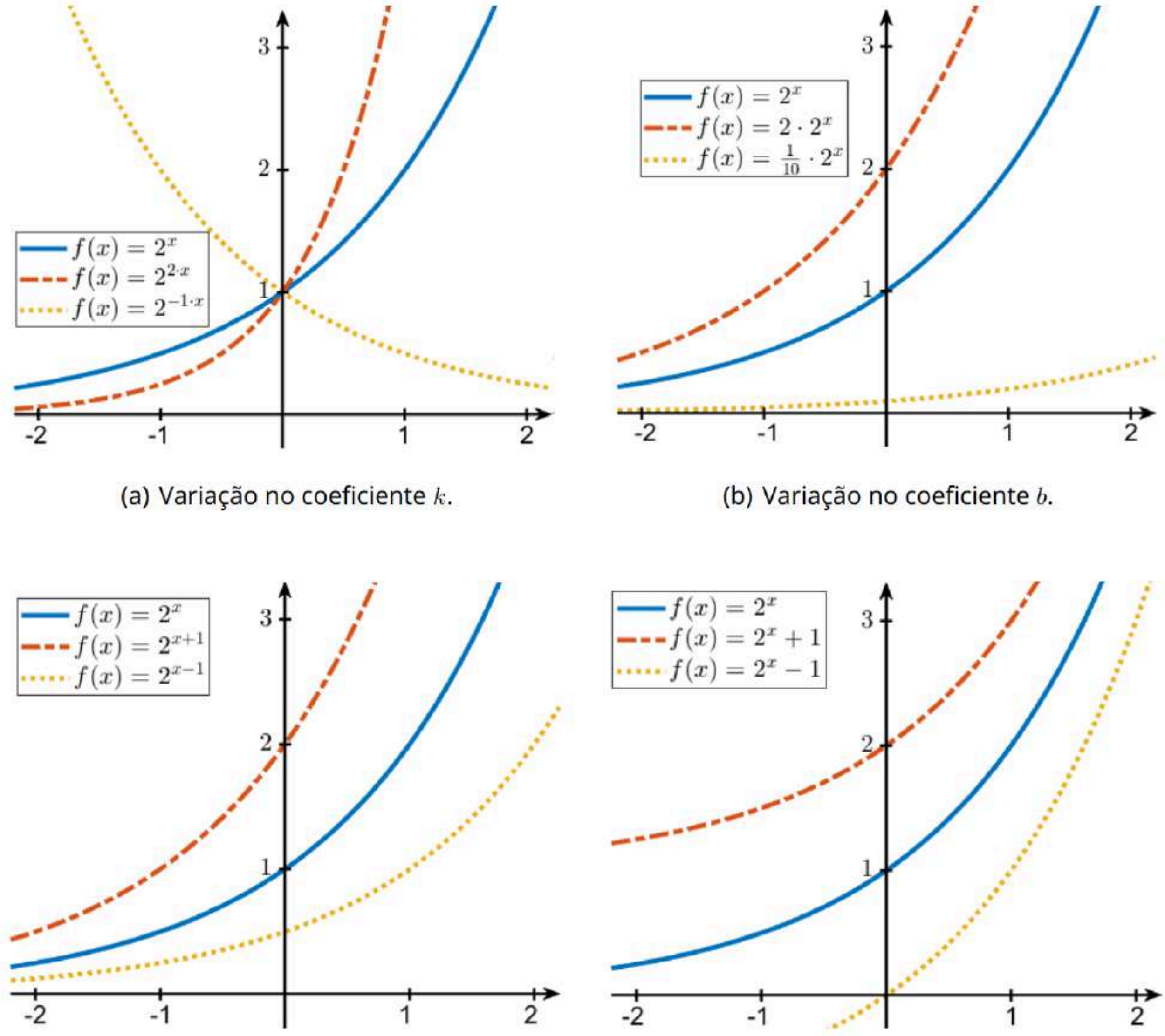
Podemos definir a forma geral de uma função do tipo exponencial do seguinte modo:

$$f(x) = b \cdot a^{k \cdot x + c} + d$$

Em que cada um dos coeficientes a, b, c, d e k influenciam no gráfico da função do tipo exponencial como descrito a seguir.

- $\boldsymbol{a}$: Base da potência; determina o comportamento crescente ($a > 1$) ou decrescente ($0 < a < 1$).
- $\boldsymbol{b}$: Controla o alongamento ou compressão vertical.
- $\boldsymbol{c}$: Desloca o gráfico horizontalmente ($c > 0$ para a esquerda, $c < 0$ para a direita).
- $\boldsymbol{d}$: Desloca o gráfico verticalmente ($d > 0$ para cima, $d < 0$ para baixo).
- $\boldsymbol{k}$: Altera a inclinação, mudando a taxa de crescimento ou decaimento.

Podemos observar na figura 2 exemplos ilustrativos das transformações aplicadas ao gráfico da função $f(x) = 2^x$. Essas alterações, que destacam a influência de diferentes parâmetros na forma do gráfico, podem ser exploradas de maneira interativa utilizando ferramentas como o GeoGebra.



(a) Variação no coeficiente k.

(b) Variação no coeficiente b.

(c) Variação no coeficiente c.

(d) Variação no coeficiente d.

Figura 2: Influência dos coeficientes nas funções do tipo exponencial.

VOCÊ SABIA?

O número e (aproximadamente 2,718) é uma base muito importante em funções exponenciais, especialmente em fenômenos naturais. Funções do tipo $f(x) = e^x$ aparecem em diversos contextos, como no **crescimento populacional** ou em **modelos de juros compostos contínuos**. O gráfico da função $f(x) = e^x$ é a curva mais suave e natural de crescimento exponencial, sendo amplamente usada para modelar fenômenos em que o crescimento é proporcional ao valor atual, como no caso da biologia celular ou até da economia.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Esboce os gráficos de $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$ e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Quais diferenças você observa?

SOLUÇÃO.

Inicialmente, vamos calcular os valores das funções para alguns valores de x. Sabemos que para $x = 0$, todas as funções exponenciais têm como resultado $f(0) = 1$, já que $a^0 = 1$ para qualquer base $a > 0$.

Os cálculos para $x = -2, -1, 1$ e 2 estão apresentados na tabela 1.

x	$f(x) = 2^x$	$f(x) = 3^x$	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
1	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
2	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Tabela 1: Valores das funções exponenciais para diferentes valores de x.

Com esses valores, podemos esboçar os gráficos, como mostrado na figura 3.

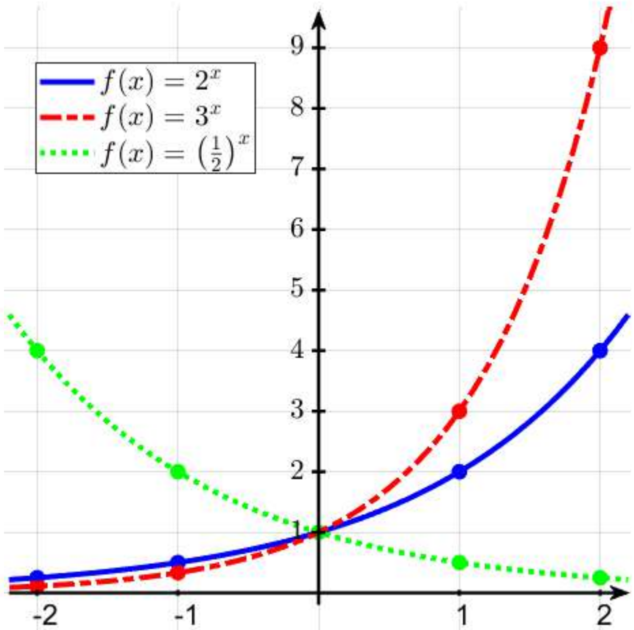


Figura 3: Gráficos de funções exponenciais do exercício resolvido 1.

Análise dos gráficos:

- As funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = 3^x$ são **crescentes**, porque as bases 2 e 3 são maiores que 1. Percebemos que a função com a base maior (3^x) cresce mais rápido.
- A função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é **decrescente**, porque a base $\left(\frac{1}{2}\right)$ está entre 0 e 1.

Além disso, todas as funções passam pelo ponto $(0, 1)$, que é característico de funções exponenciais.

Para valores muito grandes e pequenos de x, temos que:

- Quando $x \to -\infty$, as funções $f(x) = 2^x$ e $f(x) = 3^x$ se aproximam de 0.
- Para $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, conforme $x \to -\infty$, os valores crescem rapidamente.

Atividades

ATIVIDADE 1

Seja f uma função exponencial definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, cuja lei de formação é $f(x) = 5^x$. Para cada item faça o que se pede:

a) Calcule o valor de $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$ e $f(1)$.

b) Com base nos valores de x e y obtidos nos itens anteriores, organize os pares ordenados (x, y) e construa o gráfico da função $f(x)$ em seu caderno.

c) Com base no gráfico do item b, que representa uma função exponencial, analise o comportamento dos valores de $f(x)$ à medida que x aumenta.

ATIVIDADE 2

Seja f uma função exponencial definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, cuja lei de formação é $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Para cada item faça o que se pede:

a) Calcule o valor de $f(-1)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $f(1)$.

b) Com base nos valores de x e y obtidos nos itens anteriores, organize os pares ordenados (x, y) e construa o gráfico da função $f(x)$ em seu caderno.

c) Com base no gráfico do item b, que representa uma função exponencial, analise o comportamento dos valores de $f(x)$ à medida que x aumenta.

ATIVIDADE 3

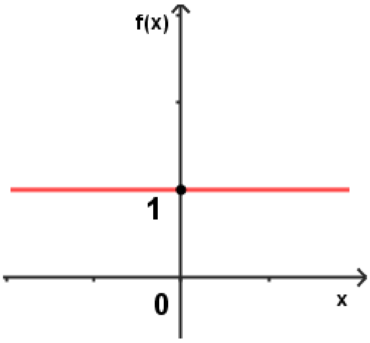
Seja uma função exponencial, cuja lei de formação é $f(x) = a^x$, e cujo gráfico é uma curva crescente. Um possível valor para a é:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

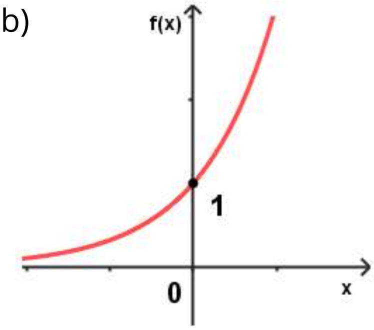
ATIVIDADE 4

A função *f*, tal que $f(x) = \pi^x$, pode ser representada pelo gráfico:

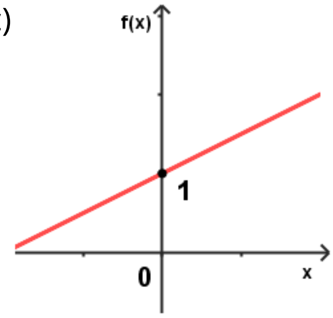
a)



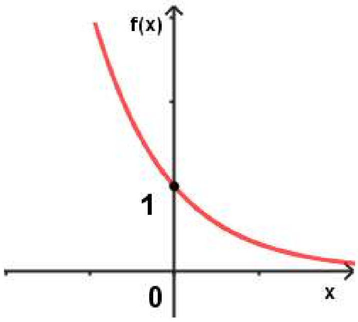
b)



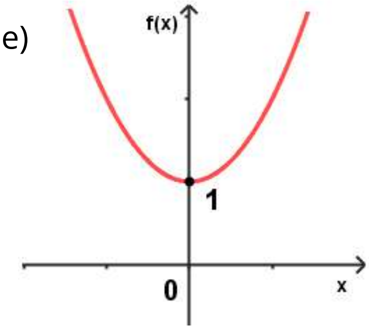
c)



d)

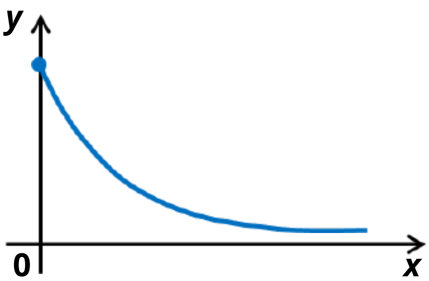


e)



ATIVIDADE 5

A radioatividade é a propriedade que algumas substâncias tem de emitir radiações. Observe o gráfico da função *f*, sendo $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, que representa a radioatividade *y* de determinado minério em função do tempo *x*.



Agora, responda as questões:

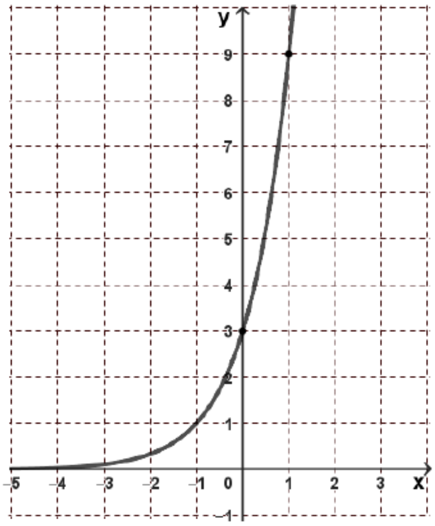
a) A radioatividade está aumentando ou diminuindo? Por quê?

b) Esse minério deixará de ser radioativo em algum momento? Por quê?

c) Quais são os possíveis valores de a?

ATIVIDADE 6

Considere uma função exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$, cujo gráfico é dado a seguir.



A lei que define essa função é dada por:

$a)\ f(x) = 3^x$

$b) f(x) = 9^x$

$c) f(x) = 3^{x+1}$

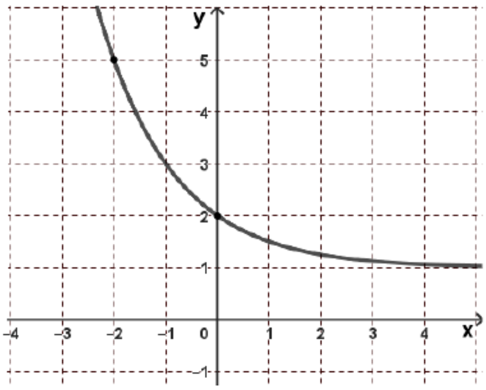
$d) f(x) = 3^x + 2$

$e) f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

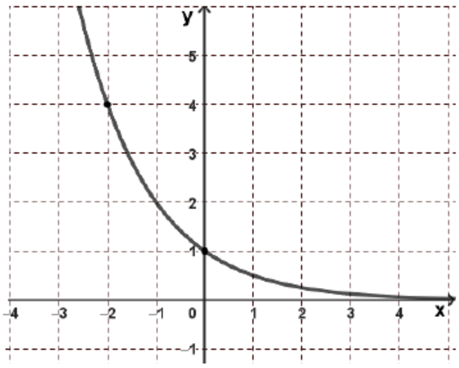
ATIVIDADE 7

O gráfico que representa a função exponencial definida por $f(x) = 2^x + 1$, com $x \in \mathbb{R}$, é:

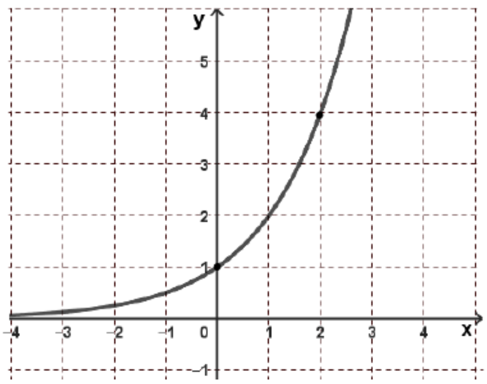
a)



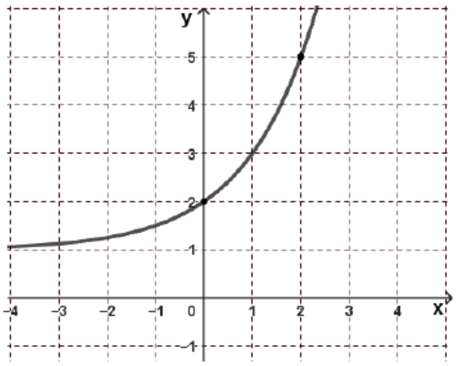
d)



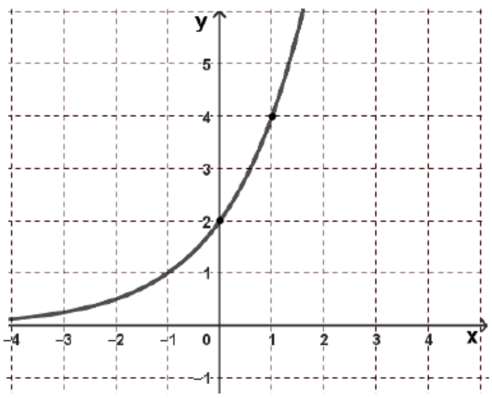
b)



e)



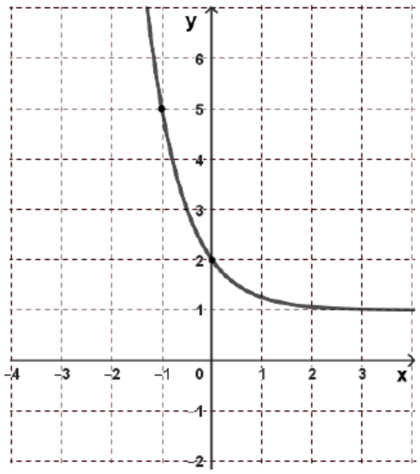
c)



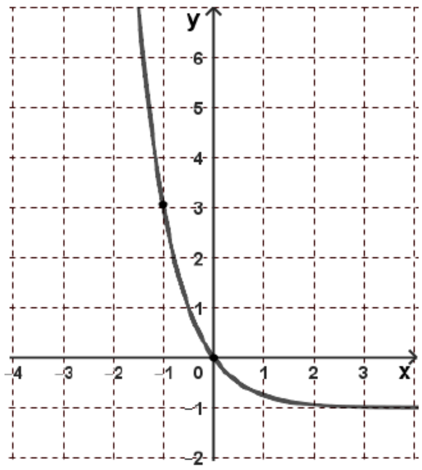
ATIVIDADE 8

Considere a função de domínio real dada por $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$. O gráfico que representa essa função é:

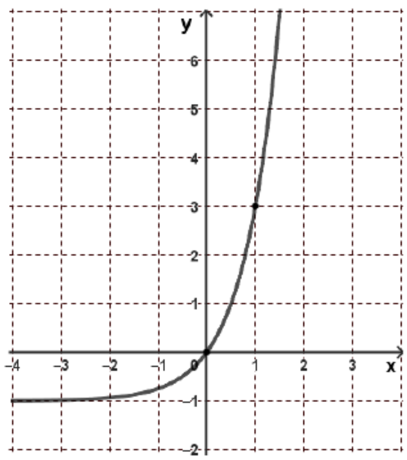
a)



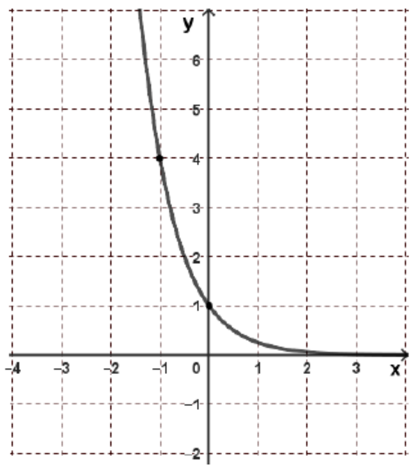
d)



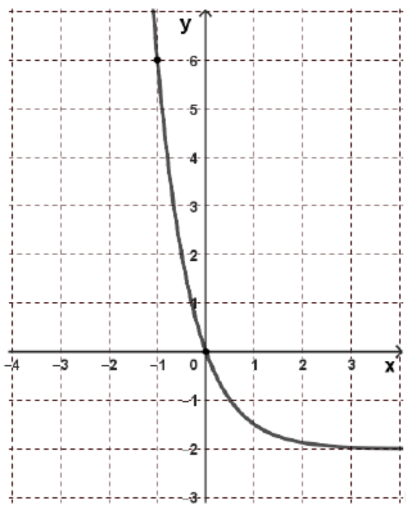
b)



e)

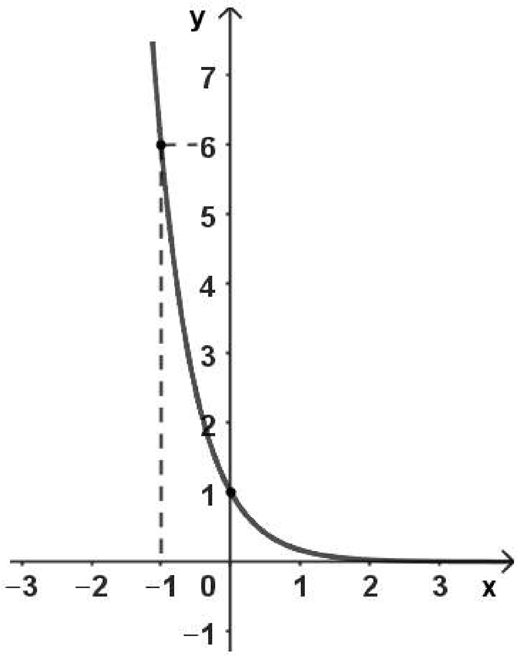


c)



ATIVIDADE 9

(SAEPE - PE) Observe o gráfico de uma função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$



A lei de formação dessa função é dada por:

$a) f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

$b) f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+1}$

$c) f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 1$

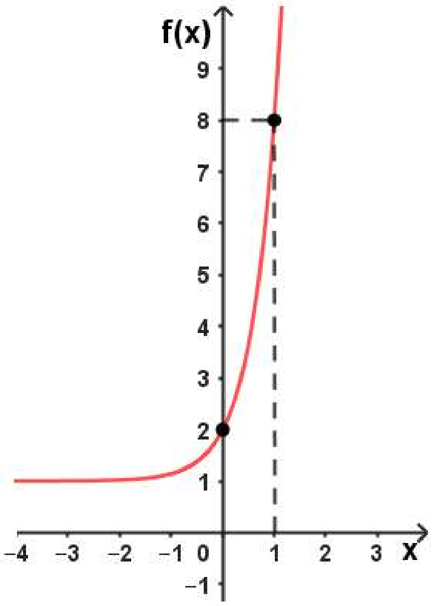
$d) f(x) = 6^x$

$e) f(x) = 6^{x+1}$

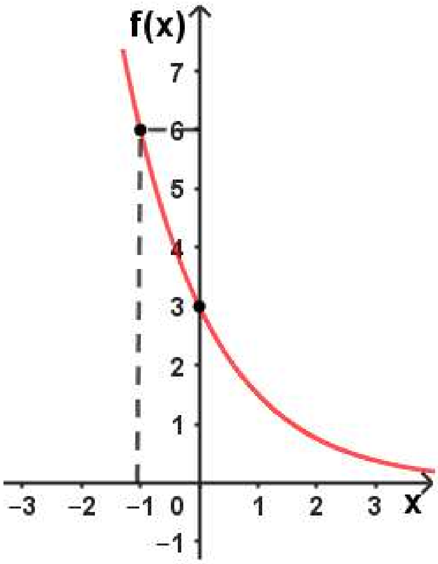
ATIVIDADE 10

Em cada um dos casos a seguir, o gráfico exibe uma curva exponencial. Determine a lei de formação de cada uma destas funções.

a)



b)



Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 1: Função exponencial.
- A função exponencial. (p. 34 - 65)

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 2: função exponencial.
- Função exponencial. (p. 64 - 65)

EXPLORANDO O GEOGEBRA

GeoGebra

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 2: função exponencial.
- A base da potenciação e gráfico da função exponencial. (p. 70 - 71)

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Juros compostos

Os **juros compostos** são calculados sobre o capital inicial e sobre os juros acumulados ao longo dos períodos. Diferentemente dos juros simples, onde os juros são constantes, nos juros compostos os valores crescem de forma **exponencial**.

Uma das maneiras de calcular juros compostos é utilizando a seguinte fórmula:

$$M(t) = C \cdot (1+i)^t$$

Onde:

- $M(t)$: montante acumulado (capital inicial mais os juros) após t períodos;
- C: capital inicial (ou principal);
- i: taxa de juros por período (em decimal); e
- t: número de períodos.

Exemplo 1: retorno de investimento

Você investiu R$ 1 000,00 em uma aplicação com taxa de juros de 5% ao mês por 3 meses. Qual será o montante acumulado?

Para facilitar a compreensão desse processo algébrico, sugerimos a adoção de algumas etapas que auxiliem na resolução do problema.

1. Identifique os valores;
2. Substitua na fórmula de aplicação financeira a juros compostos;
3. Desenvolva o cálculo e determine o montante.

Etapa 1

$C = 1\,000$

$i = 5\% = 0{,}05$

$t = 3$

Etapas 2 e 3

$\boldsymbol{M\,(t) = C.\,(1+i)^t}$

$M(3) = 1\,000.\,(1+0{,}05)^3$

$M(3) = 1\,000.\,(1{,}05)^3$

$M(3) = 1\,000.\,1{,}157625$

$M(3) = 1\,157{,}63$

Após 3 meses, o montante será de aproximadamente R$ 1 157,63.

A expressão $M(t) = C \cdot (1+i)^t$ é uma função do tipo exponencial, pois:

- O valor inicial C é uma constante que controla o alongamento ou a compressão vertical;
- A soma $(1+i)$ é a base da função;
- O expoente t é a variável independente que representa o tempo;
- Comportamento:

  - Quando $i > 0$, a função representa crescimento exponencial (exemplo: aplicações financeiras);

  - Quando $-1 < i < 0$, a função representa decaimento exponencial (exemplo: depreciação de bens).

Podemos, portanto, avaliar um investimento financeiro a juros compostos através de uma análise gráfica de sua função exponencial correspondente. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 2: comparação de cenários

Avalie as duas aplicações financeiras abaixo e discorra sobre qual delas é mais rentável (gera maior montante) no período de 12 meses.

- Aplicação A: Capital inicial de R$ 600,00 com taxa de 6% ao mês por 12 meses.
- Aplicação B: Capital inicial de R$ 700,00 com taxa de 4% ao mês por 12 meses.

Analisando as condições das aplicações financeiras, podemos escrever as seguintes funções do tipo exponencial:

$$M_A(t) = 600 \cdot (1,06)^{12}$$

$$M_B(t) = 700 \cdot (1,04)^{12}$$

Na figura 1, é possível observar o comportamento exponencial das aplicações financeiras A e B. Essa representação gráfica nos permite comparar os desempenhos e decidir qual delas oferece maior rentabilidade no período analisado.

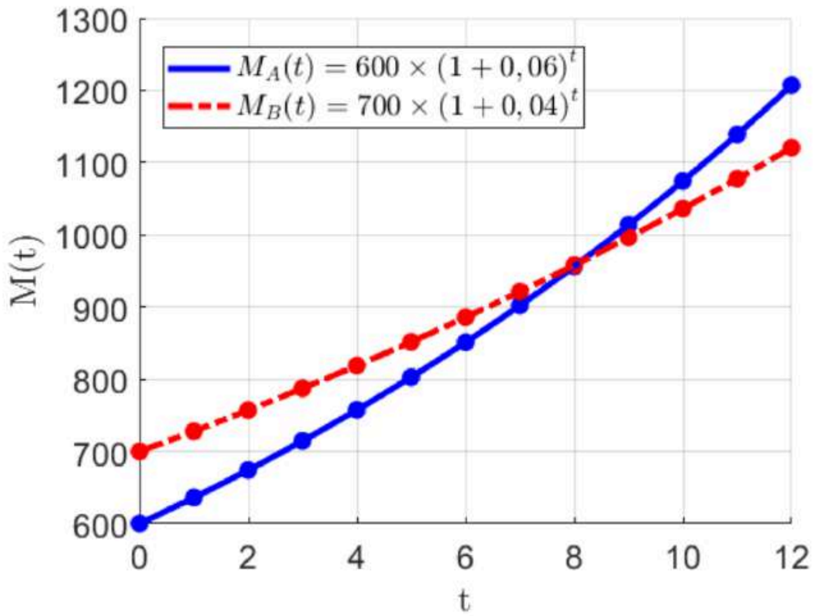


Figura 1: Comparação entre as aplicações financeiras A e B.

Ao analisar os resultados, conclui-se que, embora a aplicação B tenha um capital inicial maior, o crescimento exponencial da aplicação A faz com que ela ultrapasse a B em termos de montante acumulado antes do término de um ano.

Crescimento populacional

Um dos exemplos mais comuns de função exponencial é o crescimento populacional.

Fórmula Geral:

$$P(t) = P_0 \cdot (1 + r)^t$$

- $P(t)$: população no tempo t.
- P_0: população inicial.
- r: taxa de crescimento (decimal).
- t: tempo.

Exemplo 3: crescimento populacional de javaporcos

Uma população inicial de 50 javaporcos está crescendo a uma taxa de 15% ao ano devido à ausência de predadores naturais. Qual será a população após 8 anos?

Canva

1. Identifique os valores:

$$P = 50$$

$$i = 15\% = 0{,}15$$

$$t = 8$$

2. Substitua na fórmula:

$$P(t) = P_0 \cdot (1+r)^t \quad \longrightarrow \quad P(8) = 50 \cdot (1+0{,}15)^8$$

3. Calcule:

$$P(t) = 50 \cdot (1{,}15)^8$$
$$P(t) = 50 \cdot 3{,}059022$$
$$P(t) = 152{,}95$$

Resposta: Após 8 anos, a população será de aproximadamente 153 javaporcos.

Modelo de decaimento exponencial com meia-vida

O **tempo de meia-vida**, denotado por $T_{1/2}$, é definido como o intervalo de tempo necessário para que a quantidade de uma substância decaia para metade de seu valor inicial. Em sistemas regidos por funções exponenciais, esse decaimento é descrito por:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}},$$

onde:

- $Q(t)$: quantidade restante da substância no tempo t;
- Q_0: quantidade inicial da substância;
- t: tempo transcorrido;
- $T_{1/2}$: tempo de meia-vida da substância.

Alguns exemplos de fenômenos que modelamos através desse tipo de função:

- **Decaimento radioativo:** Na Física, o tempo de meia-vida é fundamental para descrever o decaimento de elementos radioativos. Por exemplo: o carbono-14, usado na datação de fósseis, possui um tempo de meia-vida de aproximadamente 5 730 anos. Isso significa que após 5 730 anos, metade do carbono-14 inicial em um fóssil terá decaído.

- **Metabolização de medicamentos:** Na medicina, o tempo de meia-vida é usado para determinar a frequência com que os medicamentos devem ser administrados. Por exemplo: o paracetamol tem um tempo de meia-vida de cerca de 2 a 3 horas no corpo humano. Isso implica que a cada 2 a 3 horas, a quantidade de medicamento no organismo reduz pela metade.

Exemplo 4: ingestão de medicamento

Uma pessoa toma uma dose de 500 mg de um medicamento cujo tempo de meia-vida no corpo humano é de 4 horas. Qual será a quantidade de medicamento no organismo após 12 horas?

1. Identifique os valores:

$$Q_0 = 500 \text{ mg},$$
$$T_{1/2} = 4 \text{ horas},$$
$$t = 12 \text{ horas}.$$

2. Substitua na fórmula:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \quad \longrightarrow \quad Q(12) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{4}}$$

3. Simplifique o expoente:

$$Q(12) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

4. Calcule:

$$Q(12) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 500 \cdot \frac{1}{8} = \frac{500}{8} = 62{,}5$$

Resposta: Após 12 horas, restarão 62,5 mg do medicamento no organismo.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Calcule o montante mensal dos 6 primeiros meses de uma aplicação de R$ 1000,00 a uma taxa de 2% ao mês. Apresente os dados obtidos em uma tabela.

SOLUÇÃO.

Inicialmente, ajustar a fórmula de aplicação financeira a juros compostos para o contexto, ou seja

$$M(t) = P \cdot (1+i)^t \quad \longrightarrow \quad M(t) = 1000 \cdot (1 + 0{,}02)^t = 1000 \cdot (1{,}02)^t$$

Agora vamos calcular o montante para cada mês:

$$M(0) = 1000 \cdot (1{,}02)^0 = 1000 \cdot 1 = 1000$$
$$M(1) = 1000 \cdot (1{,}02)^1 = 1000 \cdot 1{,}02 = 1020{,}00$$

$$M(2) = 1000 \cdot (1{,}02)^2 = 1000 \cdot 1{,}0404 = 1040{,}40$$
$$M(3) = 1000 \cdot (1{,}02)^3 \approx 1000 \cdot 1{,}06121 = 1061{,}21$$
$$M(4) = 1000 \cdot (1{,}02)^4 \approx 1000 \cdot 1{,}08243 = 1082{,}43$$
$$M(5) = 1000 \cdot (1{,}02)^5 \approx 1000 \cdot 1{,}10408 = 1104{,}08$$
$$M(6) = 1000 \cdot (1{,}02)^6 \approx 1000 \cdot 1{,}12616 = 1126{,}16$$

Podemos ver na tabela 1 os dados obtidos.

Tempo (meses)	Montante (R$)
0	1 000,00
1	1 020,00
2	1 040,40
3	1 061,21
4	1 082,43
5	1 104,08
6	1 126,16

Tabela 1: Crescimento do montante ao longo dos meses.

EXERCÍCIO 2. Um carro comprado por R$ 80 000,00 deprecia 15% ao ano. Qual será o valor do carro após 4 anos?

SOLUÇÃO.

Neste caso, a taxa de juros é negativa, indicando que o capital inicial sofre depreciação ao longo do tempo, em vez de se valorizar. Identificamos os valores da equação como:

$$P = 80000$$
$$i = -15\% = -0{,}15$$
$$t = 4$$

Substituímos esses valores na fórmula dos juros compostos:

$$M(t) = P \cdot (1+i)^t \quad \longrightarrow \quad M(4) = 80000 \cdot (1-0{,}15)^4 = 80000 \cdot (0{,}85)^4$$

Agora, desenvolvemos os cálculos passo a passo:

$$M(4) = 80000 \cdot (0{,}85)^4$$
$$M(4) = 80000 \cdot 0{,}52200625$$
$$M(4) = 41760{,}50$$

Portanto, o valor do capital após 4 anos será de R$ 41 760,50.

EXERCÍCIO 3. (Adaptado de Dante e Viana, 2020) O uso indiscriminado de agrotóxicos, as mudanças climáticas, os grandes desmatamentos e o aparecimento de alguns tipos de parasita podem levar à extinção das abelhas em poucas décadas. Conforme a quantidade de insetos dessa população vai diminuindo, a polinização das plantas vai ficando cada vez mais comprometida, o que pode gerar um colapso na produção de alimentos, bem como causar a morte de animais herbívoros, por falta de alimentos, e de animais carnívoros que se alimentam dos herbívoros. Diante desse quadro preocupante, especialistas estudam maneiras de evitar a redução da quantidade de abelhas. Suponha uma situação preocupante em que a população de uma colmeia de abelhas, inicialmente com 20.000 indivíduos, esteja se reduzindo à taxa de aproximadamente 10% ao mês, por causa do uso de agrotóxicos. Essa situação pode ser modelada pela função exponencial $N(t) = 20000 \cdot 0,9^t$, em que N é o número de abelhas e t é o tempo em meses.

Qual o tempo necessário para que a quantidade de abelhas seja igual a 13.122 ?

SOLUÇÃO. Note que, nesse caso, temos a população de abelhas (13.122) e precisamos determinar o tempo necessário para que a população de abelhas atinja esse número, então é necessário resolver a seguinte equação:

$$13\ 122 = 20\ 000 \cdot 0,9^t$$

Vamos resolvê-la:

$$13\ 122 = 20\ 000 \cdot 0,9^t$$

$$\frac{13\ 122}{20\ 000} = 0,9^t$$

$$\frac{13\ 122^{\div 2}}{20\ 000_{\div 2}} = 0,9^t$$

$$\frac{6\ 561}{10\ 000} = 0,9^t$$

$$\frac{9^4}{10^4} = 0,9^t$$

$$(0,9)^4 = 0,9^t$$

$$4 = t$$

Logo, a população de abelhas será igual a 13.122 após 4 meses.

Nesse problema, resolvemos uma equação exponencial. Trata-se de uma equação na qual a incógnita está localizada no expoente de uma potência. É possível resolver algumas equações exponenciais obtendo uma igualdade entre duas potências de mesma base: isso implica que os expoentes sejam iguais. Veja mais exemplos de resolução de equações exponenciais a seguir.

Exemplos de equações exponenciais

a) $2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$

$(3^{-1})^x = 81$

$3^{-x} = 81$

$3^{-x} = 3^4$

$-x = 4$

$x = -4$

c) $5^{2x-1} = 125$

$5^{2x-1} = 5^3$

$2x - 1 = 3$

$2x = 3 + 1$

$2x = 4$

$x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

d) $7^x = \sqrt[3]{49}$

$7^x = \sqrt[3]{7^2}$

$7^x = 7^{\frac{2}{3}}$

$x = \frac{2}{3}$

atenção

TAREFA COMPLEMENTAR

Que tal estudar um pouco mais sobre equações exponenciais?

Trouxemos esta tarefa complementar para que você possa aprender um pouco mais sobre essas equações que, algumas vezes, são úteis para resolver problemas abordando funções exponenciais.

Determine o valor de x em cada uma das equações exponenciais a seguir:

$a)\ 2^x = 32$

$b)\ 10^x = 1000$

$c)\ 9^x = 243$

$d)\ 5^x = \frac{1}{125}$

$e)\ \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16}$

$f)\ 2^{3x} = 64$

$g)\ 3^x = \sqrt{3}$

$h)\ 10^x = 0,01$

$i)\ 5 \cdot 2^x = 80$

Vídeo Aula: EQUAÇÕES EXPONENCIAIS #1
Prof Robson Liers - Mathematicamente

https://www.youtube.com/watch?v=y5Yk1QuiWdI

Atividades

ATIVIDADE 1

Considere a função exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ de lei $f(x)=4^{x+1}$. Determine:

a) $f(1)=$

b) $f(-4)=$

c) x quando $f(x)=256$

ATIVIDADE 2

Considere a função exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ de lei $f(x)=5^{x}-2$. Determine:

a) $f(3)=$

b) $f(-1)=$

c) x quando $f(x)=23$

ATIVIDADE 3

O ibuprofeno é um medicamento frequentemente prescrito para aliviar dor e febre, com uma meia-vida de aproximadamente 2 horas. Isso significa que, após a ingestão de uma dose inicial N_0 de ibuprofeno, apenas 50% da medicação permanecerá na corrente sanguínea do paciente após um período de 2 horas.

A expressão matemática $Q(t)=N_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$, descreve corretamente o decaimento exponencial da quantidade $Q(t)$ de medicamento na corrente sanguínea do paciente, em função do tempo *t* em horas, após a ingestão de um comprimido de ibuprofeno.

Carlos tomou um comprimido de ibuprofeno de 800 mg às 15 horas. Qual será a quantidade $Q(t)$ em mg, do medicamento ibuprofeno na corrente sanguínea de Carlos às 21 horas?

a) 0,6 mg
b) 12,5 mg
c) 64 mg
d) 50 mg
e) 100 mg

ATIVIDADE 4

As aplicações financeiras realizadas em instituições bancárias podem gerar rendimentos diários, mensais ou anuais, geralmente utilizando o sistema de juros compostos. Nesse sistema, os juros são somados ao saldo acumulado ao final de cada período, fazendo com que o valor investido cresça de forma exponencial ao longo do tempo. Por exemplo, ao investir R$ 1.000,00 em uma aplicação com uma taxa de juros de 2% ao mês, o montante *M(t)* acumulado após *t* meses pode ser descrito por uma função exponencial, seguindo as regras da capitalização composta. Assim, a função que relaciona o Montante *M(t)* com o número de meses *t* após o início da aplicação é dada por:

$a)\ M(t) = 1\,000 + (1,02) \cdot t$

$b)\ M(t) = 1\,000 + (1,02)^t$

$c)\ M(t) = 1\,000 \cdot (1,02)^t$

$d)\ M(t) = 1\,000 \cdot (2)^t$

$e)\ M(t) = 1\,000^{2t}$

ATIVIDADE 5

A população de peixes em um lago está diminuindo devido à contaminação de água por resíduos industriais. A lei $N(t) = 300 - 10 \cdot 2^{t-1}$ fornece uma estimativa do número de espécies vivas *N(t)* em função do número de anos (*t*) transcorridos após a instalação do parque industrial na região. Estime a quantidade de peixes que viviam no lago 5 anos após o ano da instalação do parque industrial.

ATIVIDADE 6

A LCI (Letra de Crédito Imobiliário) é uma modalidade de investimento em renda fixa, isenta de Imposto de Renda, que, em geral, oferece retornos superiores aos da caderneta de poupança, pois seu rendimento está atrelado à taxa do CDI.

Uma pessoa investiu R$ 400,00 em uma LCI com rendimento correspondente a uma taxa de 11% ao ano. A rentabilidade desse investimento pode ser modelada pela expressão exponencial $M(t) = 400 \cdot (1,11)^t$, onde *t* representa o número de anos de aplicação e $M(t)$ é o montante acumulado ao final do período.

Considerando as regras de capitalização e a expressão fornecida, qual é o montante gerado no investimento realizado por essa pessoa após 3 anos?

a) R$ 444,00
b) R$ 544,00
c) R$ 547,05
d) R$ 560,00
e) R$ 1 332,00

ATIVIDADE 7

As redes sociais possuem um grande poder de disseminação de informações. No entanto, as *fake news* (notícias falsas) têm se destacado recentemente, pois, ao serem publicadas em aplicativos de redes sociais, podem ser rapidamente compartilhadas e, ao se tornarem virais, alcançar um número expressivo de pessoas. Supondo que o alcance de uma notícia falsa seja modelado pela função $N(t) = 20 \cdot 3^{t-1}$, onde *N(t)* representa o número de pessoas alcançadas após *t* minutos desde a divulgação da notícia. Calcule quantos minutos seriam necessários para que a notícia atingisse 1 620 pessoas.

ATIVIDADE 8

Um exemplo de população que cresce exponencialmente é a população humana. O crescimento exponencial começa de maneira lenta, mas acelera rapidamente à medida que o tamanho da população aumenta, uma vez que a base populacional também cresce ao longo do tempo.

Considerando uma cidade com uma população inicial de 30 000 habitantes e uma taxa de crescimento de 5% ao ano, calcule o número de habitantes nessa cidade após 2 anos a partir do início da observação.

ATIVIDADE 9

Considere uma cultura bacteriana que, em experimentos laboratoriais, apresentou crescimento exponencial, modelado pela equação $Q(t) = 3000 \cdot 2^t$, em que *Q(t)* representa a quantidade de bactérias na cultura em função do intervalo de tempo *t*, expresso em horas. Em quantas horas após o início das observações a cultura atingiu 192 000 bactérias?

a) 5 horas
b) 6 horas
c) 7 horas
d) 10 horas
e) 32 horas

ATIVIDADE 10

A depreciação de veículos é uma das principais preocupações de quem investe na compra de um carro, e isso não é por acaso! Assim que um veículo zero quilômetro é adquirido, seu valor começa a cair devido ao uso e ao desgaste ao longo do tempo. Suponha que um veículo, comprado por R$ 120.000,00, sofra uma depreciação anual de 10%, o que faz seu valor seguir a expressão exponencial $V(t) = 120\,000 \cdot (0,9)^t$, onde *V(t)* representa o valor de venda do veículo após *t* anos de uso. Considerando essa equação, em quanto tempo o carro poderá ser vendido por R$ 87.480,00?

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 1: Função exponencial.

- Ampliando a ideia de função exponencial. (p. 48 - 52)

Matemática em Contexto: estatística e matemática financeira. (DANTE).

Capítulo 2: Matemática financeira.

- Juros compostos. (p. 109 - 115);
- Conexão entre juros e funções (p. 123 - 125).

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 2: função exponencial.

- Equações exponenciais. (p. 64 - 65);
- Conexões - Radioatividade (p. 74).

Prisma Matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas. (BONJORNO)

Capítulo 2: porcentagem e juros.

- Juros. (p. 73 - 77);
- Juros e funções (p. 78 - 81).

SEQUÊNCIAS

No nosso cotidiano, frequentemente lidamos com situações envolvendo **sequências**. Alguns exemplos incluem:

- Os nomes dos alunos de uma turma em ordem da chamada;
- Os meses do ano (janeiro, fevereiro, março, ...);
- Os dias da semana (domingo, segunda-feira, terça-feira, ...).

Além dessas, algumas sequências têm **natureza numérica**, como:

- Os dígitos do número de CPF;
- Os dígitos do número do telefone celular;
- Os anos de ocorrência dos Jogos Olímpicos.

Cada elemento de uma sequência é chamado de **termo**. Geralmente, utilizamos uma letra acompanhada de um índice (como a_n) para denotar os termos de uma sequência, onde n indica a **posição** (ou ordem) do termo.

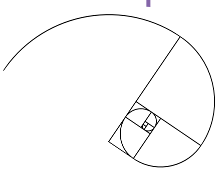
Por exemplo, a sequência numérica $(8, \quad 40, \quad 27, \quad 12)$ é uma sequência na qual

$$a_1 = 8;$$
$$a_2 = 40;$$
$$a_3 = 27; \text{e}$$
$$a_4 = 12.$$

Temos dois tipos de sequências: as **sequências finitas** e as **sequências infinitas**. Iremos conversar sobre elas a seguir.

VOCÊ SABIA?

A Sequência de Fibonacci e a proporção áurea: a razão entre números consecutivos da sequência de Fibonacci (1,1,2,3,5,8,...) tende à razão ϕ, a proporção áurea (≈1,618), uma constante de infinitas casas decimais que aparece na arte, na natureza e na arquitetura. Um exemplo é o formato de conchas, como as do nautilus, que segue uma espiral de Fibonacci.



Tipos de sequências numéricas

Sequência finita

Uma **sequência finita** é formada por um número limitado de n termos, em que $n \in \mathbb{N}^*$. Podemos representá-la assim:

$$(a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \cdots, \quad a_{n-2}, \quad a_{n-1}, \quad a_n)$$

Em que:

- a_1 é o primeiro termo;
- a_2 é o segundo termo, e assim por diante;
- a_n é o último termo; e
- a_{n-1} é o penúltimo termo, e assim por diante.

Sequência infinita

Uma **sequência infinita** é formada por um número ilimitado de termos e pode ser representada da seguinte maneira:

$$(a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \cdots)$$

Alguns exemplos de sequências infinitas são:

- O conjunto dos números naturais: (0, 1, 2, 3, 4, ...)
- O conjunto de números primos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...)

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Definição

Uma **Progressão Geométrica (PG)** é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por um número real constante chamado de **razão** (denotado por q).

Exemplo 1

A sequência $(5, \quad 10, \quad 20, \quad 40, \quad 80, \quad \cdots)$ é uma PG de **razão 2.** Podemos constatar isso verificando que a multiplicação de cada termo pela razão é igual ao termo subsequente:

$$a_1 \cdot q = 5 \cdot 2 = 10 = a_2$$

$$a_2 \cdot q = 10 \cdot 2 = 20 = a_3$$

$a_3 \cdot q = 20 \cdot 2 = 40 = a_4$, e assim por diante.

Exemplo 2

A sequência $\left(9, \quad -3, \quad 1, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{9}, \quad \cdots\right)$ é uma PG de **razão** $-\frac{1}{3}$, pois:

$$a_1 \cdot q = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{9}{3} = -3 = a_2$$

$$a_2 \cdot q = -3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1 = a_3$$

$a_3 \cdot q = 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} = a_4$, e assim por diante.

Exemplo 3

A sequência $(7, \quad 7, \quad 7, \quad 7, \quad 7, \quad \cdots)$ é uma PG de **razão** 1, pois:

$$a_1 \cdot q = 7 \cdot 1 = 7 = a_2$$

$a_2 \cdot q = 7 \cdot 1 = 7 = a_3$, e assim por diante.

Fórmulas da Progressão Geométrica

Razão da PG

Vejamos a progressão geométrica do exemplo 1, dado na seção anterior:

$$(5, \quad 10, \quad 20, \quad 40, \quad 80, \quad \cdots)$$

Podemos obter a razão da PG por meio da divisão de a_2 por a_1:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{5} = 2$$

Ou obter a razão da PG por meio da divisão de a_3 por a_2:

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{20}{10} = 2$$

Mas também podemos obter o valor da razão pela divisão de a_4 por a_3, e assim obter o mesmo resultado, como demonstrado abaixo:

$$q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{40}{20} = 2$$

De forma geral, podemos calcular a razão de qualquer PG ao dividirmos um termo qualquer por outro **imediatamente anterior**, ou seja:

$$\boxed{q = \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

Termo Geral da PG

Seja uma PG com razão q e primeiro termo a_1. Como se trata de uma PG, por definição, o valor de a_2 é obtido multiplicando a_1 por q, ou seja:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

O valor de a_3 pode ser obtido de forma análoga:

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

Vamos substituir o valor de a_2 por $a_1 \cdot q$ para desenvolvermos um raciocínio:

$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

Seguindo a mesma lógica, temos para a_4.

$$a_4 = a_3 \cdot q = \left(a_1 \cdot q^2\right) \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

Continuando apenas associando o termo ao seu resultado final, temos:

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5$$

$$\vdots$$

$$a_{20} = a_1 \cdot q^{19}$$

Ou seja, de forma geral, temos a seguinte fórmula para cálculo do **Termo Geral da PG** (considerando $n \geq 1$):

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Na PG há uma relação entre o índice e o valor correspondente na posição indicada por esse índice. Essa correspondência pode ser expressa da seguinte maneira:

Índice $\longrightarrow$ $1 \to a_1$ $\longleftarrow$ Posição indicada pelo respectivo índice

$$2 \to a_2$$

$$\vdots$$

$$x \to a_x$$

Essa relação pode ser descrita por uma função $f: N^* \to R^*$, que associa a posição x ao valor correspondente a_x na PG. A fórmula que define essa função é dada pelo termo geral da PG.

$$\boxed{f(x) = a_1 \cdot q^{x-1}}$$

Dessa forma, algumas PG podem ser representadas por uma função do tipo exponencial de base q sendo $q > 0$ e $q \neq 1$

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Calcule a razão de cada PG:

a) $-3, -9, -81, \ldots$

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

c) $10, -10, 10, -10, \ldots$

d) $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$

SOLUÇÃO.

Para calcular a razão da PG basta dividirmos um de seus termos (e você pode selecionar o que achar mais fácil de calcular) pelo seu antecessor. É importante salientar que não podemos selecionar o primeiro termo já que este é o único que não tem antecessor.

a) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-9}{-3} = 3$

b) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

c) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-10}{10} = -1$

d) $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

EXERCÍCIO 2. Calcule o 6º termo de cada PG do exercício anterior.

SOLUÇÃO.

Para calcularmos o 6º termo da PG, basta recorrermos à Fórmula do Termo Geral com n=6, ou seja

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = a_1 \cdot q^5$$

a) $a_6 = a_1 \cdot q^5 = (-3) \cdot (3)^5 = -3 \cdot 243 = -729$

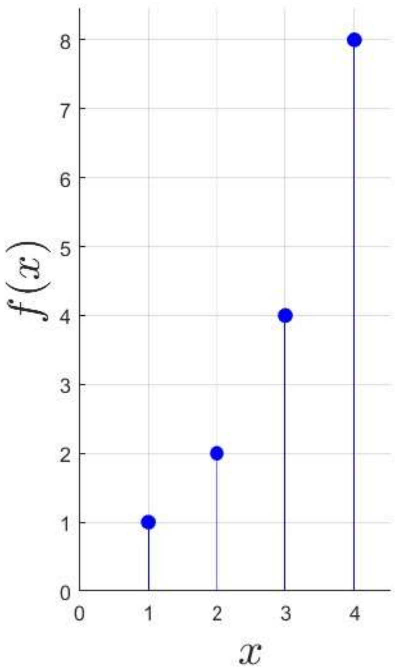
b) $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$

c) $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 10 \cdot (-1)^5 = 10 \cdot (-1) = -10$

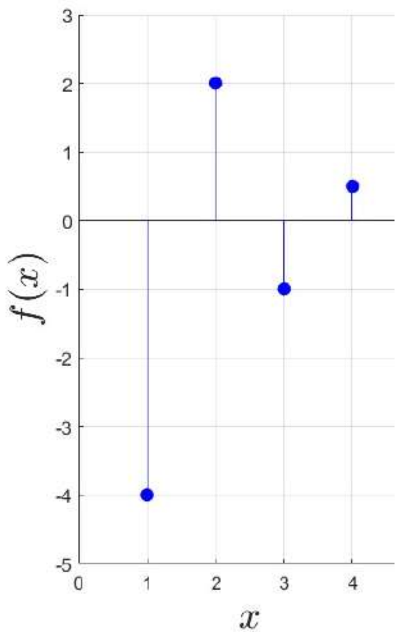
d) $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = 9 \cdot \left(-\frac{1}{243}\right) = -\frac{1}{27}$

EXERCÍCIO 3. Nos gráficos abaixo, os pontos representam os termos de uma PG, em que x é a posição do termo e $f(x)$ é o seu valor correspondente. Determine a fórmula do Termo Geral da PG de cada gráfico abaixo:

a)



b)



SOLUÇÃO.

Sabemos que:

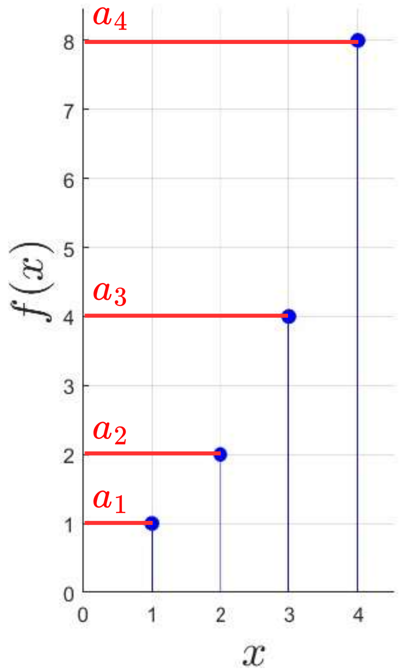
$$f(x) = a_1 \cdot q^{x-1} \qquad x \in \mathbb{N}^*$$

$$a_1 = f(1)$$

$$q = \frac{f(x)}{f(x-1)} \qquad x \in \mathbb{N}^*$$

Vamos aplicar aos itens da questão (veja a página a seguir).

a)



$a_1 = 1$	$a_3 = 4$
$a_2 = 2$	$a_4 = 8$

Temos que

$$a_1 = f(1) = 1 \quad \text{e}$$

$$q = \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{2}{1} = 2$$

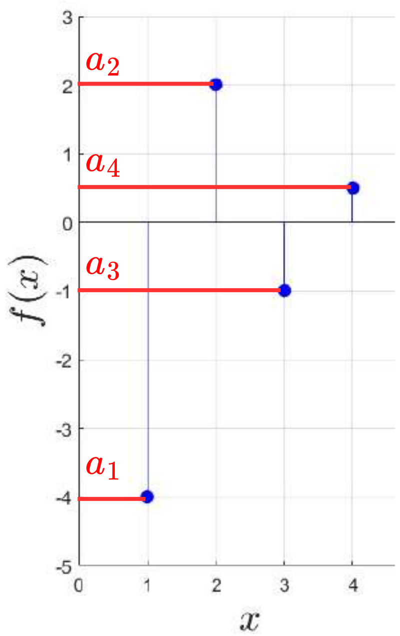
Então,

$$f(x) = a_1 \cdot q^{x-1} = 1 \cdot (2)^{x-1} = 2^{x-1}$$

$$f(x) = 2^{x-1}$$

Assim, temos os pares ordenados (1,1), (2,2), (3, 4) e (4,8) e a PG constituída é (1, 2, 4, 8).

b)



$a_1 = -4$	$a_3 = -1$
$a_2 = 2$	$a_4 = \frac{1}{2}$

Sabemos que

$$a_1 = f(1) = -4 \quad \text{e}$$

$$q = \frac{f(3)}{f(2)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Então,

$$f(x) = a_1 \cdot q^{x-1} = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

$$f(x) = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{x-1}$$

Assim, temos os pares ordenados (1,-4), (2,2), (3, -1) e (4, $\frac{1}{2}$) e a PG constituída é (-4, 2, -1, $\frac{1}{2}$).

Atividades

ATIVIDADE 1

Para cada PG a seguir, calcule a razão.

$a)(10, 50, 250)$

$b)(10, 5, ...)$

$c)\left(-30, -10, -\frac{10}{3}, ...\right)$

$d)\left(\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9}, ...\right)$

$e)(-1, -4, -16, ...)$

$f)(-3, 18, -108, ...)$

$g)(2, 2^5, 2^9, ...)$

$h)(2^{-2}, 2^{-4}, 2^{-6}, ...)$

ATIVIDADE 2

Observe a sequência numérica a seguir:

$$\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, ...$$

Mantida a lei de formação, pode-se concluir que:

a) É uma PG, porque se considerarmos um termo qualquer e adicionarmos um valor chamado constante da PG, obtém-se o número seguinte.

b) É uma PG, pois existe uma constante multiplicativa, chamada de razão da PG, que é igual a $\frac{1}{3}$.

c) Não é uma PG, pois ela não é composta por números naturais.

d) Não é uma PG, pois ela possui duas razões para uma mesma sequência, ou seja, o racional $\frac{1}{3}$ e o natural 3.

e) É uma PG, pois existe uma constante multiplicativa, chamada de razão da PG, que é igual a 3.

ATIVIDADE 3

O investimento em imóveis é uma das formas mais tradicionais de investimento no Brasil, especialmente devido à valorização constante das propriedades nos últimos anos. Aqueles que adquiriram imóveis nas cidades de Vitória, Vila Velha, Goiânia, Curitiba e Florianópolis obtiveram ganhos superiores à inflação nos últimos cinco anos.

Uma pessoa comprou um imóvel novo por R$ 100 000,00 em 2019, e o valor do imóvel aumentou 20% ao ano desde a sua compra. A seguir, veja a tabela com os dados da evolução do valor do imóvel nos 5 anos seguintes à aquisição.

Ano	Valor do Imóvel (R$)
2019	R$ 100 000,00
2020	R$ 120 000,00
2021	R$ 144 000,00
2022	R$ 172 800,00
2023	R$ 207 360,00
2024	R$ 248 832,00

a) O crescimento do valor do imóvel, ano a ano, segue uma Progressão Geométrica (PG). A razão da PG corresponde à base da função exponencial, representando a constante de multiplicação que, aplicada a cada termo anterior da PG, gera o próximo termo da sequência.

Determine o valor da razão dessa sequência.

b) Considerando os dados da tabela, indique qual seria o valor de (a_1) da PG e explique a importância do primeiro termo (a_1) na formulação de uma função do tipo exponencial que represente essa progressão.

c) Para prever o valor futuro de um imóvel, foram contratados profissionais para transformar os dados coletados em funções matemáticas. Assinale qual das funções abaixo representa corretamente o crescimento do valor *V(x)* dos imóveis, **considerando x a posição do valor na sequência** e (x ∈ ℕ*).

☐ $V(x) = 100\,000^x$

☐ $V(x) = 100\,000 + (1,2)^x$

☐ $V(x) = 100\,000 + (1,2)^{x-1}$

☐ $V(x) = 100\,000 \cdot (1,2)^x$

☐ $V(x) = 100\,000 \cdot (1,2)^{x-1}$

d) Se o expoente da função encontrada fosse apenas "x", em vez de "x - 1", os valores registrados na tabela de valor do imóvel estariam corretos? Explique sua resposta.

ATIVIDADE 4

Uma empresa de marketing digital investe em anúncios online para aumentar sua base de clientes. No primeiro mês, a empresa conquista 10 novos clientes. A partir do segundo mês, o número de novos clientes conquistados é o triplo do mês anterior. Ou seja, no segundo mês, a empresa conquista 30 clientes; no terceiro mês, 90 clientes, e assim por diante.
A sequência que representa o número de clientes conquistados a cada mês é:

(10, 30, 90, 270, 810, ...)

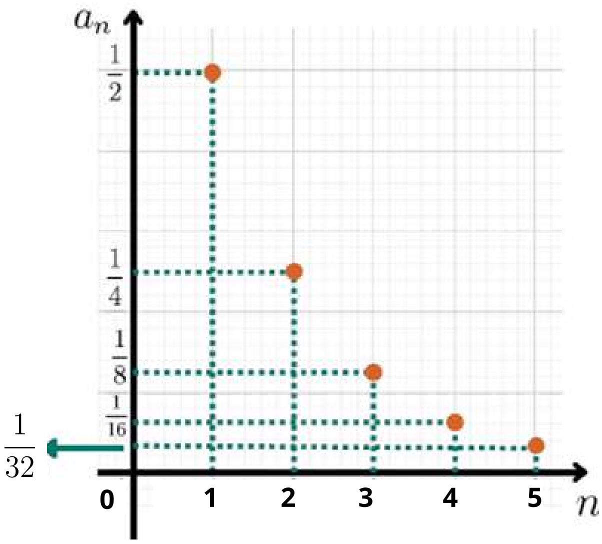
a) Identifique a razão da sequência.

b) Escreva a fórmula do termo geral a_n dessa sequência.

c) Utilizando a fórmula, calcule o número de clientes conquistados no 9º mês.

ATIVIDADE 5

O gráfico a seguir representa uma progressão geométrica (PG) com *n* sendo um número natural não nulo, onde no eixo horizontal representamos a posição do termo e no eixo vertical o respectivo termo.



a) Escreva os termos dessa progressão geométrica apresentados no gráfico.

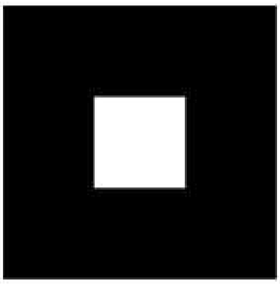
b) Determine a razão *q* dessa progressão geométrica.

c) Determine o valor do sexto termo dessa PG.

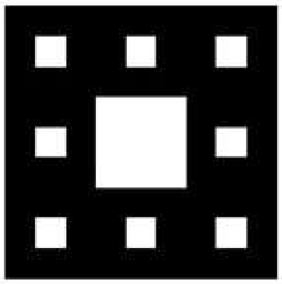
ATIVIDADE 6

Considere um quadrado dividido em nove quadrados congruentes, em que se retira o quadrado central. Nos oito quadrados restantes esse mesmo processo é realizado, e assim sucessivamente.
O resultado obtido é conhecido como Tapete de Sierpinski.

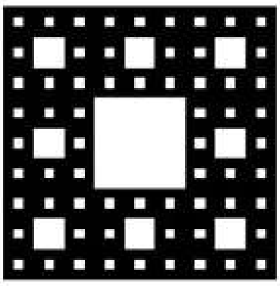
1 iteração



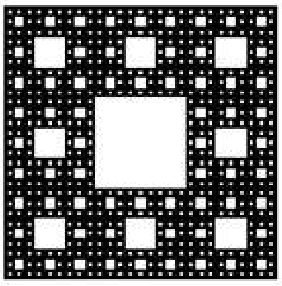
2 iterações



3 iterações



4 iterações



Com base nas informações fornecidas, é possível identificar a quantidade de quadrados retirados nas quatro primeiras iterações, que seguem a sequência: (1, 8, 64, 512, ...).

a) Escreva o Termo Geral da Progressão Geométrica (PG) relacionada à sequência formada pela quantidade de quadrados retirados em cada iteração.

b) Determine quantos quadrados foram retirados na 9ª iteração. Para isso, expresse o resultado como uma única potência (não é necessário calcular o valor dessa potência).

ATIVIDADE 7

No começo do desenvolvimento embrionário, todos os tipos de células que irão constituir os diferentes tecidos originam-se de uma única célula chamada de “zigoto” ou “ célula-ovo”. Por meio de um processo chamado de mitose, cada célula se divide em duas, ou seja, a célula–ovo origina duas novas células que, por sua vez, irão originar quatro outras e assim sucessivamente. Após observar 9 ciclos, um cientista registrou 8 192 células. Assinale a alternativa que mostra o número de células que existiam quando o cientista iniciou a observação.

a) 28
b) 30
c) 32
d) 34
e) 36

ATIVIDADE 8

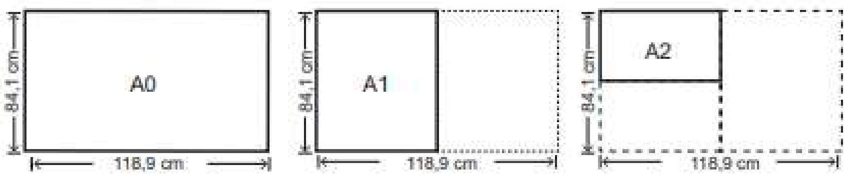
Determine a razão de uma progressão geométrica, em que o $a_1 = 3$ e $a_6 = 9\,375$.

ATIVIDADE 9

Em uma progressão geométrica de razão 2, $a_1 = 7$ e $a_n = 3\,584$. Determine o número *n* de termos desta PG.

CONEXÃO ENEM

(ENEM - PPL 2016) O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos EUA e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A0, cujas dimensões são 84,1 cm x 118,9 cm. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, obtendo os demais formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura: A1 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.



Disponível em: http://pt.wikipedia.org. Acesso em: 4 abr. 2012 (adaptado).

Quantas folhas de tamanho A8 são obtidas a partir de uma folha A0?

a) 8
b) 16
c) 64
d) 128
e) 256

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG

A progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante chamada de razão (q). Vamos explorar como calcular a soma dos termos de uma PG finita e infinita, com exemplos e aplicações.

Soma dos Termos de uma PG Finita

A soma dos **n primeiros termos** de uma PG finita é dada pela expressão:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Utilizando a fórmula do termo geral de uma PG, temos:

$$\boxed{S_n = a_1 + a_1 \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}} \quad \textbf{Eq. 1}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por q:

$$q \cdot S_n = q \cdot \left(a_1 + a_1 \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}\right)$$

$$\boxed{q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n} \quad \textbf{Eq. 2}$$

Fazendo Eq. 1 - Eq. 2, temos:

$$S_n - q \cdot S_n = \left(a_1 + a_1 \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}\right) - \left(a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^n\right)$$

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 + a_1 \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} - a_1 \cdot q - a_1 \cdot q^2 - \cdots - a_1 \cdot q^n$$

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 + \cancel{a_1 \cdot q} - \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{\cdots} + \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}} - \cancel{a_1 \cdot q^{n-1}} - a_1 \cdot q^n$$

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

Fatorando:

$$S_n \cdot (1-q) = a_1 \cdot (1-q^n)$$

Isolando S_n :

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},} \quad \text{para } q \neq 1.$$

Exemplo prático

Considere uma PG finita com $a_1 = 2$, $q = 3$, com um total de 4 termos. Calcule a soma dos 4 termos dessa PG.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \rightarrow S_4 = 2 \cdot \frac{1-3^4}{1-3}$$

$$= 2 \cdot \frac{1-81}{-2} = 2 \cdot \frac{-80}{-2} = 2 \cdot 40 = 80$$

Portanto, a soma dos 4 primeiros termos é 80.

Como trata-se de poucos termos, podemos verificar se a soma está correta escrevendo a PG e somando cada elemento da sequência.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 6 \\ a_3 &= 18 \\ a_4 &= 54 \end{aligned} \longrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 6 + 18 + 54 = 80$$

Soma dos Termos de uma PG Infinita

Quando $-1 < q < 1$, é possível calcular a soma de uma PG com número infinito de termos, pois q^n tende a zero conforme n cresce. Nesse caso, a fórmula da soma é:

$$S = a_1 \cdot \frac{1 - q^{\infty}}{1 - q}$$

Como -1 < q < 1:

$$S = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q}$$

Logo:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - q},} \quad \textbf{para} - 1 < q < 1.$$

Exemplo prático

Considere uma PG infinita com $a_1 = 5$ e $q = \dfrac{1}{3}$. Calcule a soma dos infinitos termos desta PG.

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{\frac{3-1}{3}} = \frac{5}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

Portanto, a soma dos infinitos termos desta PG é $\dfrac{15}{2}$ ou 7,5 .

Exercícios Resolvidos

Agora que você conhece um processo mais prático para determinar a soma dos termos de uma PG (as fórmulas), vamos resolver alguns problemas. A resolução de problemas sobre PG, geralmente, requer:

1. **Identificar os elementos conhecidos:** verifique quais parâmetros da PG (a_1 , q , n , ou S_n) são fornecidos no problema.
2. **Determinar o objetivo:** descubra qual elemento precisa ser calculado.
3. **Escolher a fórmula adequada (ou outro procedimento):** baseie-se nas condições fornecidas (PG finita ou infinita) e no que é pedido.

Problema 1: crescimento de uma população de bactérias

Em um laboratório, a população de uma colônia de bactérias triplica a cada hora. Verificou-se que ao final da primeira hora havia 2 bactérias na colônia. Quantas bactérias haverá ao final de 5 horas?

SOLUÇÃO.

Primeiro, identificamos os elementos da PG no problema:

- Como, inicialmente, havia 2 bactérias, $a_1 = 2$;
- Como as bactérias triplicam a cada hora, $q = 3$;
- Queremos saber o resultado ao final da quinta hora, então $n = 5$;
- Como há um n definido igual a 5, trata-se de um problema de soma de termos de uma PG finita, portanto queremos obter o valor de S_n .

Assim:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \to S_5 = 2 \cdot \frac{1-3^5}{1-3} = 2 \cdot \frac{1-243}{-2} = 2 \cdot \frac{-242}{-2} = 2 \cdot 121$$

$$\boxed{S_5 = 242}$$

Portanto, teremos **242 bactérias** ao fim de 5 horas.

Problema 2: desempenho de uma bola de basquete

Uma bola de basquete é jogada de uma altura de 4 metros e quica repetidamente. A cada quique, a altura atingida é 60% da altura anterior. Qual a soma das alturas atingidas em todas as subidas, considerando que a bola quica indefinidamente?

SOLUÇÃO.

Primeiro, identificamos os elementos da PG no problema:

- A bola é solta de uma altura de 4 metros, $a_1 = 4$;
- A cada quique a altura é de 60% da altura anterior, $q = 60\% = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$;
- Como não há um n definido, trata-se de um problema de soma de termos de uma PG infinita, portanto queremos obter o valor de S.

Assim:

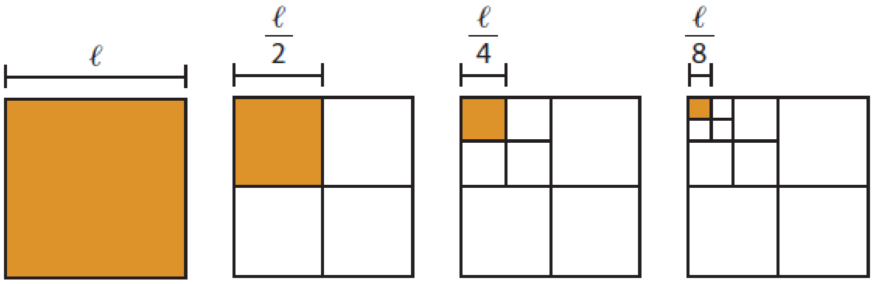
$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{3}{5}} = \frac{4}{\frac{5-3}{5}} = \frac{4}{\frac{2}{5}} = \frac{\cancel{4}^{2}}{1} \cdot \frac{5}{\cancel{2}^{1}} = 2 \cdot 5$$

$$\boxed{S = 10}$$

Assim, a soma das alturas que a bola atingiu é de **10 metros.**

Problema 3: os perímetros dos quadrados

(BONJORNO; GIOVANI; SOUZA, 2020) O lado de um quadrado mede ℓ unidades de comprimento. Unindo-se os pontos médios dos lados opostos, obtêm-se quatro novos quadrados. Se procedermos assim, sucessivamente, obteremos novos quadrados cada vez menores, conforme a figura, que mostra parte de uma sequência infinita. Determine a soma dos perímetros de todos os quadrados coloridos dessa sequência.



SOLUÇÃO.

O perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados. O quadrado, por definição, é um polígono de quatro lados congruentes. Portanto, seu perímetro é obtido multiplicando a medida de um de seus lados por 4.

Assim, na questão proposta:

- O primeiro quadrado tem lado de medida ℓ, resultando em um perímetro de $4 \cdot \ell$;
- O segundo quadrado tem lado de medida $\dfrac{\ell}{2}$, resultando em um perímetro de $\cancel{4}^{2} \cdot \dfrac{\ell}{\cancel{2}^{1}} = 2 \cdot \ell$;
- O terceiro quadrado tem lado de medida $\dfrac{\ell}{4}$, resultando em um perímetro de $\cancel{4}^{1} \cdot \dfrac{\ell}{\cancel{4}^{1}} = \ell$;

E assim por diante, de forma que a sequência formada pelos perímetros desses quadrados subsequentes forma a seguinte PG infinita:

$$\left(4 \cdot \ell, \quad 2 \cdot \ell, \quad \ell, \quad \frac{\ell}{2}, \quad \cdots\right)$$

É solicitado, no enunciado, o cálculo da soma dos perímetros que pode ser obtida através da fórmula

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \qquad \text{para} -1 < q < 1.$$

O primeiro termo é $a_1 = 4 \cdot \ell$ e a razão pode ser obtida dividindo, por exemplo, o segundo pelo primeiro termo:

$$q = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\cancel{2}^{1} \cdot \cancel{\ell}}{\cancel{4}^{2} \cdot \cancel{\ell}} = \frac{1}{2}$$

Como $-1 < q < 1$ o somatório dos termos infinitos desta PG converge para um número real:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4 \cdot \ell}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4 \cdot \ell}{\frac{2-1}{2}} = \frac{4 \cdot \ell}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \ell \cdot 2 = 8 \cdot \ell$$

Portanto, a soma dos perímetros dessa sequência de quadrados é $8 \cdot \ell$.

Problema 4: progressões geométricas e fractais

(BONJORNO;GIOVANI; SOUZA, 2020 - Adaptado) A sequência de figuras abaixo ilustra os cinco primeiros passos da construção do Triângulo de Sierpinski. Em cada etapa, novos triângulos brancos são removidos da figura anterior, sendo seus vértices os pontos médios dos lados dos triângulos pretos remanescentes.

Denotamos por a_n o número de triângulos pretos na n-ésima figura da sequência. Observando os primeiros termos, correspondente aos triângulos acima, temos:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 27, \quad a_5 = 81.$$

Mantendo esse padrão de crescimento, determine o valor de n correspondente à figura que contém exatamente 2 187 triângulos pretos.

SOLUÇÃO.

Observamos que a quantidade de triângulos pretos segue a sequência de PG em que cada termo é obtido multiplicando o anterior por 3:

$$a_n = 3 \cdot a_{n-1} \quad \therefore \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = 3 = q$$

Portanto, temos uma PG com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = 3$.

Adaptando a fórmula do termo geral da PG para os valores que conhecidos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_n = 1 \cdot 3^{n-1} \rightarrow a_n = 3^{n-1}$$

Queremos encontrar n tal que $a_n = 2187$, portanto:

$$a_n = 3^{n-1} \rightarrow 2187 = 3^{n-1} \rightarrow \cancel{3}^7 = \cancel{3}^{n-1} \rightarrow$$
$$7 = n - 1 \rightarrow n = 7 + 1 = 8$$

Rascunho

$$\begin{array}{r|l} 2187 & 3 \\ 729 & 3 \\ 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 2187 = 3^7$$

Concluímos que a figura com 2 187 triângulos pretos corresponde à oitava posição da sequência.

Material Extra

LIVRO DIDÁTICO

Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE)

Capítulo 3: Sequências.

- Sequências. (p. 110 - 113)
- Progressão geométrica. (p. 133 - 141)

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 4: progressões.

- Introdução. (p. 118 - 119);
- Sequências. (p. 119 - 122).
- Progressão geométrica (p. 132 - 134)

VÍDEOS

Portal da OBMEP
Progressões Geométricas

HISTÓRIA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Texto:
Paradoxo da dicotomia de Zenão
Página 147

Atividades

ATIVIDADE 1

A comporta de uma hidrelétrica está sendo aberta de forma que, a cada segundo, a quantidade de água despejada dobra. No primeiro segundo, o volume de água despejado foi de 3 000 litros. Qual é a quantidade total de água despejada por essa hidrelétrica após 7 segundos, em litros?

a) 21 000
b) 63 000
c) 189 000
d) 192 000
e) 381 000

ATIVIDADE 2

Marcos, administrador de um site informativo, analisou o número de visualizações de uma postagem de marketing nos primeiros 8 minutos após sua publicação. No primeiro minuto, 6 pessoas visualizaram a postagem, e a cada minuto seguinte, o número de novos visualizadores triplicava. Assim, 2 minutos após a publicação, 18 novas pessoas haviam visualizado a postagem; no terceiro minuto, foram 54, e assim por diante. O total de pessoas que visualizaram a publicação ao final dos 8 minutos foi:

a) 13 120
b) 13 122
c) 19 680
d) 19 683
e) 46 656

ATIVIDADE 3

Determine a soma dos seis primeiros termos da PG (2, -8, 32, ...).

ATIVIDADE 4

Ésio (esomeprazol magnésico) é indicado para o tratamento de doenças ácido-pépticas e para o alívio dos sintomas de azia, regurgitação ácida e dor epigástrica. Sua meia-vida de eliminação plasmática é de aproximadamente 1 hora, quando administrado em doses repetidas, uma vez ao dia.

Disponível em: <https://consultaremedios.com.br/esio-comprimido/bula>. Acessado em: 16/12/2024. (Adaptado)

Considerando que um paciente ingeriu um comprimido de Ésio pela manhã, a quantidade do medicamento na corrente sanguínea segue uma progressão geométrica: na primeira hora, havia 20 mg; na segunda hora, restavam 10 mg; na terceira hora, 5 mg permaneciam no sangue, e assim por diante. Portanto, a quantidade de medicação presente na corrente sanguínea do paciente na sexta hora após a ingestão será:

a) 5 mg
b) 2,5 mg
c) 1,25 mg
d) 0,625 mg
e) 0,3125 mg

ATIVIDADE 5

(SADEAM-2013) Um fazendeiro fabricava queijos utilizando 512 litros de leite diariamente. Para diminuir a intensidade do trabalho decidiu, de forma gradativa, parar de fabricar queijos e revender o leite. Na primeira semana, após essa decisão, ele vendeu 8 litros de leite por dia; na segunda semana, 16 litros por dia; na terceira semana 32 litros por dia; e assim por diante, até que todos os 512 litros fossem totalmente vendidos por dia.

Mantendo o mesmo padrão nas vendas de leite, em quantas semanas o fazendeiro conseguiu substituir totalmente a produção de queijos pela venda do leite?

a) 3
b) 6
c) 7
d) 33
e) 64

ATIVIDADE 6

Em um parque de diversões, um brinquedo distribui fichas de prêmios para os visitantes por meio de um mecanismo especial. No primeiro giro, o visitante recebe 20 fichas. A cada giro subsequente, o número de fichas distribuídas é reduzido pela metade em relação ao giro anterior, seguindo uma progressão geométrica. Considerando essa dinâmica, podemos calcular a quantidade total de fichas que um visitante receberá após um número infinito de giros. Qual é esse valor?

a) 10
b) 20
c) 30
d) 40
e) 50

ATIVIDADE 7

A soma dos 10 primeiros termos de uma progressão geométrica é 4 092. Sabendo que a razão dessa progressão é igual a 2, o primeiro termo da sequência é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

ATIVIDADE 8

Qual é a quantidade de elementos da PG, finita (1, 2, 4, ...), sabendo que a soma dos termos dessa PG, é 1 023?

ATIVIDADE 9

A dengue é uma doença viral que afeta milhares de brasileiros a cada ano, representando um dos maiores desafios para a saúde pública no país. Até a Semana Epidemiológica (SE) 52 de 2024, o Brasil registrou 6,6 milhões de casos prováveis da doença. O número de óbitos confirmados já chega a 5 915, enquanto 1 088 mortes ainda estão em investigação. Devido à gravidade da epidemia, diversos estados e municípios declararam situação de emergência nesse ano. A seguir, apresentamos a distribuição dos casos prováveis de dengue, conforme os dados do Sistema de Vigilância de Arboviroses, por raça/cor, em porcentagem.

Disponível em: <https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/a/aedes-aegypti/monitoramento-das-arboviroses>. Acessado em: 12/12/2024.

Suponha que uma fêmea do mosquito Aedes aegypti (1ª geração), infectada com o vírus da dengue, coloque 200 ovos em um reservatório com água parada no quintal de uma casa. Considerando as gerações futuras, temos as seguintes condições:

- Metade das crias serão fêmeas.
- 30% das fêmeas nascerão infectadas com o vírus da dengue.
- As crias se reproduzirão no mesmo local e com a mesma proporção de infecção de sua mãe.

a) Qual será o número de fêmeas infectadas do Aedes aegypti nesse reservatório na 2ª geração?

b) Considerando que o número de mosquitos Aedes aegypti nas gerações subsequentes segue uma progressão geométrica, escreva a sequência das quantidades de fêmeas infectadas nas 5 primeiras gerações, partindo da 1ª geração com 1 única fêmea.

c) Qual será o total de fêmeas infectadas no final da 5ª geração?

CONEXÃO ENEM

(ENEM - 2018) Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com *2n* competidores, então na 2ª fase restarão *n* competidores, e assim sucessivamente até a partida final.
Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por:
a) 2 x 128
b) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2
c) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1
d) 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2
e) 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo sobre **Potenciação**, **Funções Exponenciais** e **Progressões Geométricas**. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?

Reflita sobre sua aprendizagem

- Sei efetuar potenciações com expoentes inteiros e racionais, aplicando as propriedades corretamente?
- Consigo identificar e representar uma função exponencial, reconhecendo se ela descreve crescimento ou decrescimento?
- Sei construir e interpretar o gráfico de uma função exponencial, compreendendo o papel da base e de outros parâmetros?
- Consigo identificar uma Progressão Geométrica (PG) e determinar seu termo geral e a soma de seus termos?
- Entendo a relação entre PG e função exponencial, percebendo que ambas envolvem crescimento ou decrescimento multiplicativo?
- Sou capaz de resolver problemas que envolvem funções exponenciais ou progressões geométricas em contextos reais, como finanças, ciências ou tecnologia?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Potenciação com expoentes inteiros e racionais	◯	◯	◯
Identificação e representações de funções exponenciais	◯	◯	◯
Regularidades, termo geral e soma dos termos em PG	◯	◯	◯
Resolução de problemas com crescimento ou decrescimento exponencial	◯	◯	◯

Dica: Revise os tópicos que você marcou como "**preciso revisar**" e converse com seu(sua) professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências

ANDRADE, Thais Marcelle de. **Matemática interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.** Matemática e suas tecnologias - ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2020.

BONJORNO, José Roberto et al. **Prisma matemática : funções e progressões.** 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

CHAVANTE, Eduardo. Quadrante matemática, 1º ano: ensino médio. 1. ed. São Paulo : Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio.** 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequências.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

GOV.BR. Ministério da Educação - INEP. Provas e Gabaritos. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 29/11/2024.

GOV.BR. **Ministério da Saúde - Dengue**. Atualização de Casos de Arboviroses. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 13/12/2024.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmo.** 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson, [et al.]. Matemática: Volume único. 4 ed. - São Paulo: Atual, 2007

LEONARDO, Fabio Martins. Conexões com a matemática. Ensino Médio. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LIERS, Robson Liers. Mathematicamente. EQUAÇÕES EXPONENCIAIS #1. Disponivel em: <https://www.youtube.com/watch?v=y5Yk1QuiWdI<. Acessado em: 07/12/2024.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva**/ Manoel Paiva - 2 ed. - São Paulo: Moderna, 2013.

SADEAM. SISTEMA DE AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO EDUCACIONAL DO AMAZONAS. REVISTA PEDAGOGICA. Ensino Médio: Matemática. 2013. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/am/colecoes/2013/SADEAM%20RP%20MT%20EM%20WEB.pdf>. Acessado em: 01/12/2024.

Referências

SLEIMAM, Karime Halmenschlager. Bula do Ésio Comprimido. Atualizado em: 7 de Dezembro de 2024 Disponível em: <https://consultaremedios.com.br/esio-comprimido/bula>. Acessado em: 16/12/2024.

SAEPE - CAEd, UFJF. Coleção 2016. Revista do Professor: Matemática. Disponível em: <https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/#!/biblioteca>. Acessado em: 01/12/2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. Multiverso Matemática: Funções e suas aplicações. Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. Contato Matemática. Ensino Médio. 1ª ano. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2016.

SPIEGEL, Murray R.; MOYER, Robert E. **Álgebra.** 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.

Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

SEDU 2026

Gerência de Currículo
da Educação Básica

Capítulo 2: Logaritmo e Função Logarítmica

Apresentação

Prezado(a) estudante,

Você já se perguntou como cientistas medem a intensidade de um terremoto, o nível de acidez de um alimento ou a potência de um som? Em todas essas situações, há algo em comum: o uso dos logaritmos.

Os logaritmos surgiram como uma poderosa ferramenta matemática para simplificar cálculos e compreender fenômenos de crescimento e decaimento que variam de forma muito rápida. Eles estão diretamente ligados à potenciação, pois o logaritmo nada mais é do que o expoente que precisamos aplicar a uma base para obter determinado número.

O que você vai estudar neste capítulo

Neste capítulo, você vai compreender como a potenciação e o logaritmo se relacionam e como essa ideia apoia o estudo das funções logarítmicas. O percurso começa com a definição e o cálculo de logaritmos, passando pelo uso de suas propriedades na resolução de problemas. Em seguida, você estudará as funções logarítmicas, aprendendo a identificar suas características principais, como a base, o domínio e o comportamento de crescimento.

Você também será convidado(a) a construir e interpretar gráficos, observando como as alterações nos parâmetros influenciam a forma da curva. Por fim, vai comparar as funções logarítmicas com as funções exponenciais, percebendo que uma é a inversa da outra, e aplicará esses conhecimentos para analisar situações reais, como escalas de pH, Richter, decibéis e problemas de Matemática Financeira.

Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- Definir logaritmo e relacioná-lo à potenciação;
- Resolver problemas que envolvem logaritmos e suas propriedades;

Conceitos & Conteúdos

- Identificar, representar e interpretar funções logarítmicas e seus gráficos;
- Comparar funções exponenciais e logarítmicas, compreendendo sua relação de inversão;
- Aplicar o conhecimento sobre logaritmos em contextos científicos, tecnológicos e financeiros.

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

Sejam $a, b \in R_+^*$, em que $a \neq 1$. Se $a^x = b$, o expoente x é chamado de **logaritmo de b na base a**.

Representamos essa relação como:

$$\log_a b = x \qquad \text{se, e somente se,} \qquad a^x = b$$

em que:

- x é o **logaritmo**;
- b é a **logaritmando**; e
- a é a **base**.

Observação: Logaritmos de base 10 podem ser representados sem a numeração da base, ou seja,

$$\log_{10} b = \log b$$

Exemplos

- Em $2^5 = 32$, 5 é o logaritmo de 32 na base 2, ou seja, $\log_2 32 = 5.$
- Em $3^4 = 81$, 4 é o logaritmo de 81 na base 3, ou seja, $\log_3 81 = 4.$
- Em $10^3 = 1000$, 3 é o logaritmo de 1000 na base 10, ou seja, $\log 1000 = 3.$
- Em $\pi^0 = 1$, 0 é o logaritmo de 1 na base π, ou seja, $\log_\pi 1 = 0.$
- Em $7^{-1} = \frac{1}{7}$, -1 é o logaritmo de $\frac{1}{7}$ na base 7, ou seja, $\log_7 \frac{1}{7} = -1.$

PROPRIEDADES DECORRENTES DA DEFINIÇÃO

1ª propriedade: *o logaritmo de 1 em qualquer base é igual a zero.*

$$\log_a 1 = 0$$

Justificativa da 1ª propriedade

$\log_a 1 = x \Leftrightarrow a^x = 1 \Leftrightarrow a^x = a^0 \Leftrightarrow x = 0$

Exemplos

- $\log_4 1 = 0$
- $\log_{\sqrt{2}} 1 = 0$

2ª Propriedade: *quando o logaritmando é igual à base, o logaritmo é 1.*

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Justificativa da 2ª propriedade

$\log_a a = x \Leftrightarrow a^x = a \Leftrightarrow x = 1$

Exemplos

- $\log_{25} 25 = 1$
- $\log_\pi \pi = 1$

3ª propriedade: *a potência de base* a *e exponente* $\log_a b$ *é igual a* b.

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Justificativa da 3ª propriedade

Por definição, $\log_a b$ é igual ao expoente que quando aplicado a base a resulta em b. Portanto, $a^{\log_a b} = b$.

Exemplos

- $2^{\log_2 7} = 7$
- $\pi^{\log_\pi \sqrt{2}} = \sqrt{2}$

4ª Propriedade: *logaritmos de mesma base são iguais se, e somente se, seus logaritmandos forem iguais.*

$$\boxed{\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c}$$

Justificativa da 4ª propriedade

$$\log_a b = \log_a c = x \begin{cases} a^x = b \\ a^x = c \end{cases} \Leftrightarrow b = c$$

Exemplos

- $\log_a b = \log_a 0,2 \Leftrightarrow b = 0,2$
- $\log x = \log \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DO LOGARITMO

Logaritmo do produto

$$\boxed{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$$

Exemplos

- $\log_2 (3 \cdot 5) = \log_2 3 + \log_2 5$
- $\log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3$

Logaritmo do quociente

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$$

Exemplos

- $\log \dfrac{11}{2} = \log 11 - \log 2$
- $\log_7 0,3 = \log_7 \dfrac{3}{10} = \log_7 3 - \log_7 10$

Logaritmo da potência

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

Exemplos

- $\log_\pi 5^3 = 3 \cdot \log_\pi 5$
- $\log \sqrt{3} = \log (3)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \log 3$

Logaritmo com potência na base

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

Exemplos

- $\log_{5^3} \pi = \dfrac{1}{3} \cdot \log_5 \pi$
- $\log_{\sqrt{2}} 10 = \log_{(2)^{\frac{1}{2}}} 10 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 10 = 1 \cdot 2 \cdot \log_2 10 = 2 \cdot \log_2 10$

Mudança de base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

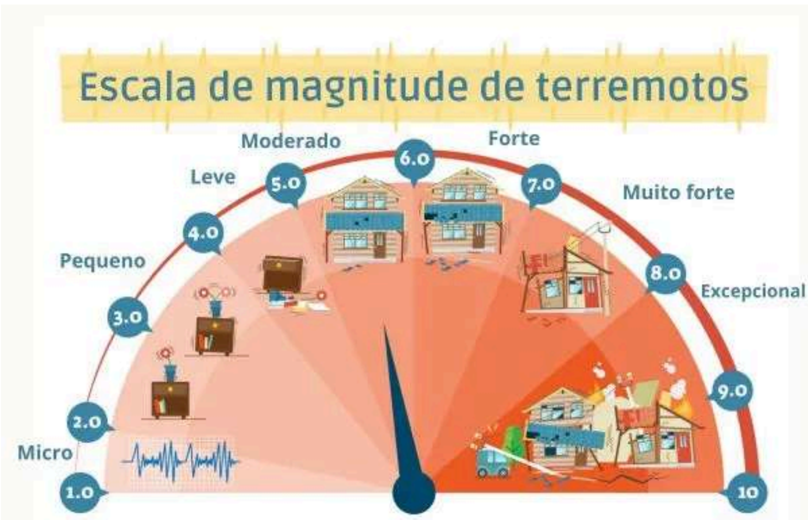
Exemplos

- $\log_2 3 = \dfrac{\log_4 3}{\log_4 2}$
- $\log 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 10}$

ESCALA RICHTER E LOGARITMO

A escala Richter é amplamente utilizada por sismólogos para medir e comunicar a magnitude de terremotos. Essa magnitude é calculada com base na razão entre a intensidade do terremoto, representada por I, e uma intensidade de referência, I_0, correspondente ao menor movimento sísmico detectável por um sismógrafo. Como os valores podem variar de milhares a até bilhões de vezes o valor de referência, utiliza-se o logaritmo da razão para simplificar a leitura e a interpretação dos dados. Os valores da escala Richter são frequentemente arredondados ao décimo ou centésimo mais próximo, garantindo uma apresentação mais prática e precisa. A fórmula que define a escala Richter é:

$$\boxed{M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$



Fonte: Brasil Escola

Exemplo

Um terremoto 9 na escala richter equivale a um tremor 1 000 000 000 (um bilhão) de vezes maior que a escala de referência, pois:

$$\log\left(\frac{1\,000\,000\,000 \cdot \cancel{I_0}}{\cancel{I_0}}\right) = \log 1\,000\,000\,000 = \log 10^9 = 9 \cdot \cancel{\log 10}^{\,1} = 9$$

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Utilizando as propriedades dos logaritmos, resolva:

a) $\log_2 16$

b) $9 \cdot \log_5 \sqrt[3]{5}$

c) $\log_4 8$

d) $\log_{100} 10\,000$

e) $\log_{\frac{1}{\pi}} \pi$

SOLUÇÃO.

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \cancelto{1}{\log_2 2} = 4 \cdot 1 = 4$

b) $9 \cdot \log_5 \sqrt[3]{5} = 9 \cdot \log_5 (5)^{\frac{1}{3}} = 9 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \log_5 5 = 9 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \cancelto{1}{\log_5 5} = 9 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 1 = \dfrac{\cancelto{3}{9}}{\cancelto{1}{3}} = 3$

c) $\log_4 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \dfrac{3 \cdot \cancelto{1}{\log_2 2}}{2 \cdot \cancelto{1}{\log_2 2}} = \dfrac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \dfrac{3}{2}$

d) $\log_{100} 10\,000 = \log_{10^2} 10^4 = \dfrac{4}{2} \cdot \cancelto{1}{\log_{10} 10} = \dfrac{4}{2} = 2$

e) $\log_{\frac{1}{\pi}} \pi = \log_{\pi^{-1}} \pi = \log_{\pi^{-1}} \pi = \dfrac{1}{-1} \cdot \cancelto{1}{\log_{\pi} \pi} = \dfrac{1}{-1} = -1$

EXERCÍCIO 2. Calcule os logaritmos sabendo que $\log 2 \approx 0,301$; $\log 3 \approx 0,477$; $\log 5 \approx 0,699$ e $\log 7 \approx 0,845$.

a) $\log 105$

b) $\log 108$

c) $\log \sqrt[3]{72}$

d) $\log 2,4$

SOLUÇÃO.

a) $\log 105 = \log(3 \cdot 5 \cdot 7) = \log 3 + \log 5 + \log 7$
$= 0,477 + 0,699 + 0,845 = 2,021$

b) $\log 108 = \log\left(2^2 \cdot 3^3\right) = \log 2^2 + \log 3^3 = 2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3$
$= 2 \cdot 0,301 + 3 \cdot 0,477 = 0,602 + 1,431 = 2,033$

c) $\log \sqrt[3]{72} = \log \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2} = \log\left(2 \cdot \sqrt[3]{3^2}\right) = \log 2 + \log \sqrt[3]{3^2} = \log 2 + \log 3^{\frac{2}{3}}$
$= \log 2 + \frac{2}{3} \cdot \log 3 = 0,301 + \frac{2}{3} \cdot 0,477 = 0,301 + 0,318 = 0,619$

d) $\log 2,4 = \log \frac{24}{10} = \log 24 - \cancel{\log 10}^{1} = \log\left(2^3 \cdot 3\right) - 1 = \log 2^3 + \log 3 - 1$
$= 3 \cdot \log 2 + \log 3 - 1 = 3 \cdot 0,301 + 0,477 - 1 = 0,903 + 0,477 - 1 = 0,38$

EXERCÍCIO 3. Se a intensidade de um terremoto foi determinada como sendo 100 000 vezes a intensidade de referência, qual é a leitura na escala Richter?

SOLUÇÃO.

Sabendo que $I = 100\,000 \cdot I_0$, temos:

$$M = log\left(\frac{I}{I_0}\right) \rightarrow \quad M = log\left(\frac{100\,000.I_0}{I_0}\right) \rightarrow M = log\left(\frac{100\,000.\cancel{I_0}}{\cancel{I_0}}\right)$$

$$M = log(10^5)$$

$$10^M = 10^5$$

$$\therefore$$

$$M = 5$$

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 2: Função logaritmica.
- Logaritmo. (p. 70 - 82)

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 3: função logaritmica.
- Introdução. (p. 86 - 98).

ESCALA RICHTER

Ampliando as discussões sobre ESCALA RICHER

Atividades

ATIVIDADE 1

O logaritmo é uma operação matemática inversa à exponenciação. Em termos simples, ele responde à pergunta: "A que potência devemos elevar um número (chamado de base) para obter um determinado valor?"
A expressão de um logaritmo é geralmente escrita da seguinte forma: $log_a b = c$, onde *a* e *b* são números reais, com *a* > 0, *a* ≠ 1, e *b* > 0. Assim, quando dizemos que o logaritmo de *b* na base *a* é igual ao número real *c*, podemos representar da forma:

$a)\ a = b^c$

$b)\ b = a^c$

$c)\ c = b^a$

$d)\ b = c^a$

$e)\ c = a^b$

ATIVIDADE 2

Em cada caso a seguir, calcule o valor da potência e depois escreva o logaritmo correspondente. Por exemplo: $3^4 = 81$, então $log_3 81 = 4$.

$a)\ 2^3$

$b)\ 7^2$

$c)\ 10^3$

$d)\ 3^{-1}$

$e)\ 7^{\frac{1}{2}}$

$f)\ 5^{-2}$

ATIVIDADE 3

Usando a definição, calcule o valor de cada logaritmo.

$a)\ log_2 16 =$

$b)\ log_3 27 =$

$c)\ log_5 125 =$

$d)\ log_{10} 1\,000 = log\,1\,000 =$

$e)\ log\,10\,000 =$

$f)\ log_7 1 =$

$g)\ log_8 8 =$

$h)\ log_2 \left(\frac{1}{8}\right) =$

$i)\ log_{10} 0,01 =$

$j)\ log_{\frac{1}{2}} 32 =$

ATIVIDADE 4

Utilizando as definições de logaritmos, determine em cada caso o valor de A.

$a) A = log_6 36 + log_4 4$

$b)\ A = lo_3 81 - log_2 1 + log\, 100$

ATIVIDADE 5

Utilizando as consequências da definição de logaritmos, determine em cada caso os valores desconhecidos de *x*.

$a)\ log_3\ x = 4$

$b)\ log_x\ 9 = 2$

$c)\ log_8\ x = log_8\ \left(\frac{2}{3}\right)$

$d)\ 3^{\,log_3 2} = x$

ATIVIDADE 6

Calcule os logaritmos a seguir considerando $log\,2 \approx 0,30,\ \ log\,3 \approx 0,48\ \ e\ \ log\,5 \approx 0,70$

$a)\ log\ 15 =$

$d)\ log\ \left(\frac{2}{3}\right) =$

$b)\ log\ 6 =$

$e)\ log\ 1,5 =$

$c)\ log\ 32 =$

$f)\ log\ 30 =$

ATIVIDADE 7

Utilizando as propriedades operatórias dos logaritmos, determine o valor da expressão A, em cada caso.

$a)\ A = log\,5 + log\,200$

$b)\ A = log_2\,100 - log_2\,25$

$c)\ A = log\,30 + log\,7 - log\,21$

$d)\ A = log_2\,(0,5)^6 - log\,100^{-4}$

ATIVIDADE 8

Considere que $log\,2 \approx 0,30,\ log\,3 \approx 0,48\ e\ log\,5 \approx 0,70$, com aproximação de duas casas decimais e usando a propriedade de mudança de base, determine em cada caso o valor do expoente *x*.

$a)\ 2^x = 3$

$b)\ 100^x = 3$

$c)\ 2^x = 5$

$d)\ 5^x = 27$

ATIVIDADE 9

O pH do sangue dos seres humanos, em condições normais, é 7,4 (levemente básico). Algumas alterações, como certas doenças, podem modificar esse valor. Pode-se calcular o pH do sangue pela equação de Henderson-Hasselbalch, dada por:

$$pH = 6,1 + log\left(\frac{B}{C}\right)$$

em que *B* representa a concentração de bicarbonato, a substância básica (ou alcalina), em mmol/l, e *C* representa a concentração de ácido carbônico, a substância ácida, em mmol/l. Calculando o pH do sangue de uma pessoa cuja concentração de bicarbonato é de 25 mmol/l e de ácido carbônico é 2 mmol/l, obtemos:

Dados: $log\,2 \approx 0,30 \; e \; log\,5 \approx 0,70$ (mmol/l significa milimol por litro.)

a) 6,5 mmol/l
b) 7,1 mmol/l
c) 7,2 mmol/l
d) 7,8 mmol/l
e) 18,6 mmol/l

ATIVIDADE 10

Uma instituição financeira cobra juros de 10% ao mês sobre o saldo devedor do cartão de crédito, caso a fatura não seja paga até a data de vencimento. Um cliente que deixou de pagar seu boleto, no valor de R$ 400,00, em um determinado mês, só conseguiu quitar a dívida meses depois, pagando R$ 640,00. Sabendo que a expressão $M = 400 \cdot (1,1)^t$ relaciona o montante *M* (valor total acumulado) com o tempo *t* de atraso, em meses, o tempo necessário para que a dívida atinja R$ 640,00, caso não seja paga, será de: (Considere: $log\,2 \approx 0,30;\; log\,1,6 \approx 0,20 \; e \; log\,1,1 \approx 0,04$).

a) 2 meses
b) 3 meses
c) 4 meses
d) 5 meses
e) 6 meses

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Seja a um número real positivo diferente de 1 ($a > 0$ e $a \neq 1$), a função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \log_a x$$

é denominada **função logarítmica de base a**.

Exemplo:

Seja a função $f(x) = \log_5 x$

- $f(1) = \log_5 1 = 0, \ \text{pois } 5^0 = 1.$
- $f(125) = \log_5 125 = 3, \ \text{pois } 5^3 = 125.$
- $f\left(\frac{1}{25}\right) = \log_5 \frac{1}{25} = -2, \ \text{pois } 5^{-2} = \frac{1}{25}.$

COMPORTAMENTO GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

A função logarítmica pode ser crescente ou decrescente, dependendo do valor de sua base. É importante lembrar que a base deve ser sempre um número positivo e diferente de 1. Assim, considerando uma função logarítmica qualquer de base a, o gráfico pode apresentar dois comportamentos distintos:

- ***Crescente***: A resposta da função aumenta a medida que x aumenta. No caso da função logarítmica, isto ocorre quando a base é maior que 1, ou seja, $a > 1$.
- ***Decrescente***: A resposta da função diminui a medida que x aumenta. Isto ocorre quando a base está entre 0 e 1, isto é, $0 < a < 1$.

Portanto, a base da função logarítmica define diretamente o crescimento ou decrescimento da função, e consequentemente, de sua representação gráfica.

Funções Logarítmicas Crescentes

Vamos, então, iniciar nossa análise pelo comportamento gráfico das **funções logarítmicas crescentes**. Para isso, consideremos a função logarítmica de base 2 aplicada a potências de dois, o que facilita os cálculos e a construção do gráfico. Observe, na tabela abaixo, que à medida que x aumenta, o valor da função também cresce, confirmando seu caráter crescente.

	$f(x) = \log_2 x$
$x = \frac{1}{4}$	$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \cdot \cancel{\log_2 2}^{1} = -2$
$x = \frac{1}{2}$	$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \cdot \cancel{\log_2 2}^{1} = -1$
$x = 1$	$\cancel{\log_2 1}^{0} = 0$
$x = 2$	$\cancel{\log_2 2}^{1} = 1$
$x = 4$	$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \cdot \cancel{\log_2 2}^{1} = 2$

Tabela 1: Desenvolvimento dos cálculos para esboçar o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

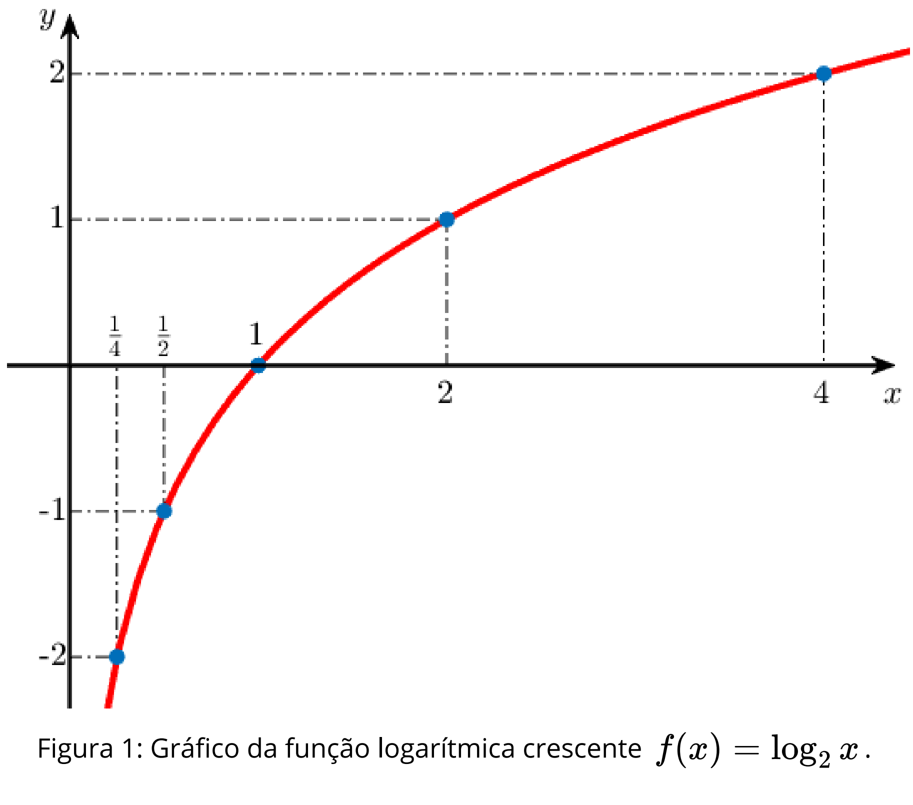


Figura 1: Gráfico da função logarítmica crescente $f(x) = \log_2 x$.

Vale ressaltar que o domínio dessas funções é composto exclusivamente por números positivos. Isso significa que não consideramos valores negativos de x, pois o logaritmo de um número negativo não está definido no conjunto dos números reais.

Na figura 1 podemos ver o gráfico da função estudada, onde é possível observar seu crescimento. Nota-se que, inicialmente, a inclinação é mais acentuada, tornando-se gradativamente menos inclinada à medida que x aumenta.

Funções Logarítmicas Decrescentes

Agora, vamos analisar o comportamento gráfico das **funções logarítmicas decrescentes**. Para isso, tomemos como exemplo a função logarítmica de base $\frac{1}{2}$, aplicada a potências de dois. Assim como no caso crescente, essa escolha simplifica os cálculos e nos permite esboçar o gráfico com mais precisão. Observe, na tabela abaixo, que à medida que x cresce, os valores da função diminuem, confirmando sua natureza decrescente.

	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
$x = \frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{2^{-1}} 2^{-2} = \frac{-2}{-1} \cdot \cancelto{1}{\log_2 2} = 2 \cdot 1 = 2$
$x = \frac{1}{2}$	$\cancelto{1}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}} = 1$
$x = 1$	$\cancelto{0}{\log_{\frac{1}{2}} 1} = 0$
$x = 2$	$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{2^{-1}} 2 = \frac{1}{-1} \cancelto{1}{\log_2 2} = -1 \cdot 1 = -1$
$x = 4$	$\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{2^{-1}} 2^2 = \frac{2}{-1} \cancelto{1}{\log_2 2} = -2 \cdot 1 = -2$

Tabela 2: Desenvolvimento dos cálculos para esboçar o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Assim como na função logarítmica crescente, o domínio continua sendo composto apenas por números positivos. Isso se deve ao fato de que o logaritmo de números negativos não está definido no conjunto dos números reais.

A seguir, apresentamos o gráfico dessa função, no qual é possível observar seu comportamento decrescente. Nota-se que, inicialmente, a inclinação é mais acentuada, tornando-se gradativamente menos inclinada conforme x aumenta, evidenciando a desaceleração da taxa de variação da função.

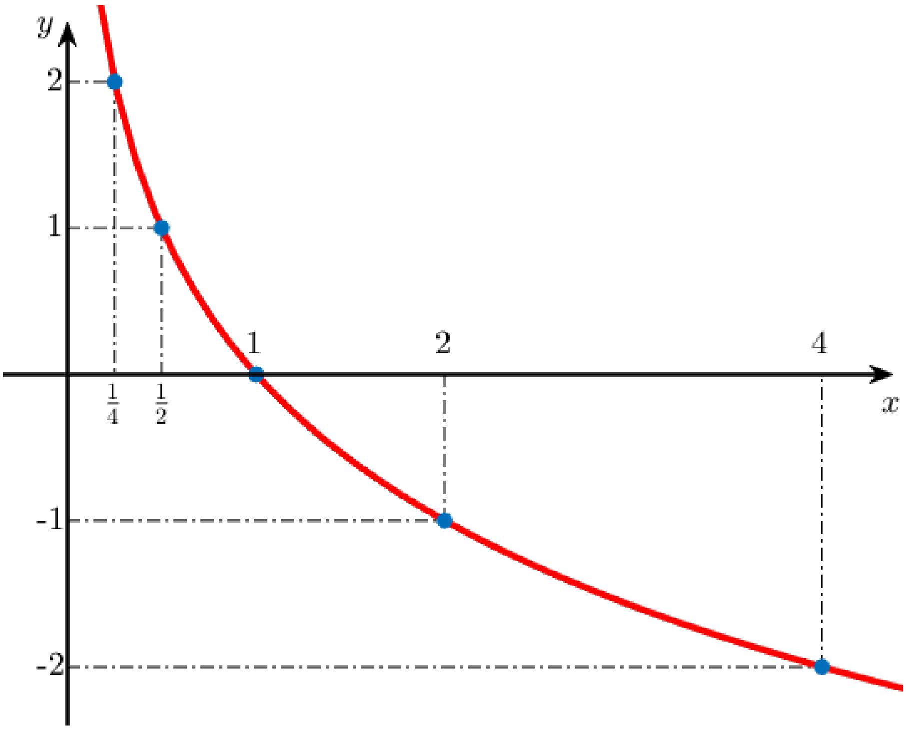


Figura 2: Gráfico da função logarítmica crescente $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

CARACTERÍSTICAS COMUNS A TODA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Vejamos algumas características válidas para qualquer função logarítmica.

Domínio e imagem

- **Domínio:** o valor de x de uma função logarítmica é sempre estritamente positivo $(x > 0)$. Isso ocorre porque o logaritmo de um número negativo ou zero não está definido no conjunto dos números reais.

- **Imagem:** $f(x)$ pode assumir qualquer valor real $(f(x) \in \mathbb{R})$.

Função bijetiva

A função logarítmica é injetiva, pois para quaisquer dois elementos distintos x_1 e x_2 no domínio, os valores correspondentes da função, $f(x_1)$ e $f(x_2)$, também são distintos.

Além disso, a função logarítmica é sobrejetiva, pois, para qualquer número real b , sempre existe um único número real positivo x que satisfaz a equação $\log_a x = b$.

Consequentemente, a função logarítmica é **bijetiva**.

Interseção com o eixo das abscissas em $x = 1$

Toda função logarítmica possui um ponto comum $(1\,,\,0)$, pois

$$\log_a 1 = 0$$

para qualquer base que respeite a condição dada pela definição de logaritmo $(a > 0 \text{ e } a \neq 1)$.

Não interseção com o eixo das ordenadas

O gráfico não intercepta o eixo y e não possui pontos nos quadrantes II e III do plano cartesiano.

Aproximação assintótica do eixo y

À medida que x se aproxima de zero pelo lado positivo, o valor da função logarítmica se aproxima cada vez mais do eixo y, sem jamais tocá-lo.

Intensidade do crescimento/decrescimento

A função logarítmica tem um crescimento/decrescimento cada vez mais atenuado a medida que o valor de x aumenta.

Exercicios Resolvidos

EXERCÍCIO 1

Os químicos utilizam o **potencial hidrogeniônico** (**pH**) para medir a acidez ou alcalinidade de uma solução. A água destilada possui um pH em torno de 7. Soluções com pH maior que 7 são classificadas como **básicas**, enquanto aquelas com pH menor que 7 são consideradas **ácidas**.

O pH de uma solução pode ser calculada através da seguinte função logarítmica:

$$f(x) = -\log x$$

em que x é a concentração de íons de hidrogênio, em mols por litro.

Com base nessa equação, determine o pH de uma solução cuja concentração de íons hidrogênio é $6 \cdot 10^{-5}$ mol/L.

Dados: $\log 2 \approx 0,301$; $\log 3 \approx 0,477$

SOLUÇÃO.

$$\begin{aligned} f(6 \cdot 10^{-5}) &= -\log\left(6 \cdot 10^{-5}\right) = -\left[\log 6 + \log 10^{-5}\right] \\ &= -\left[\log(2 \cdot 3) - 5 \cdot \cancelto{1}{\log 10}\right] = -\left[\log 2 + \log 3 - 5\right] \\ &\approx -(0,301 + 0,477 - 5) = -(-4,222) = 4,222 \end{aligned}$$

O pH da solução é aproximadamente 4,22, o que indica que a **solução é ácida**, pois **seu pH é menor que 7**.

EXERCÍCIO 2

A intensidade sonora percebida pelo ouvido humano, medida em decibéis (dB), é calculada pela seguinte função logarítmica:

$$f(x) = 10 \cdot \log\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Em que:

- x é a intensidade sonora no local da medição; e
- x_0 é a menor intensidade sonora perceptível ao ouvido humano.

No ambiente de trabalho, a NR-15 (Norma Regulamentadora 15) estabelece limites de exposição ao ruído, determinando o tempo máximo diário que um trabalhador pode ser submetido a determinada intensidade sonora sem risco de perda auditiva ocupacional. A tabela abaixo apresenta os níveis de ruído e seus respectivos tempos máximos de exposição permitidos pela norma:

NÍVEL DO RUÍDO (DB)	MÁXIMA EXPOSIÇÃO DIÁRIA
85	8 horas
90	4 horas
95	2 horas
100	1 hora
105	30 min
110	15 min
115	7 min

Agora, considere que um trabalhador opere uma britadeira que gera um ruído de intensidade equivalente a $10^{11} \cdot x_0$. Com base na equação logarítmica apresentada, determine o nível de ruído produzido pela britadeira e, de acordo com a NR 15, o tempo máximo diário que o trabalhador pode operar esse equipamento sem o uso de abafadores sonoros.

SOLUÇÃO.

$$f(10^{11} \cdot x_0) = 10 \cdot \log\left(\frac{10^{11} \cdot \cancel{x_0}}{\cancel{x_0}}\right) = 10 \cdot 11 \cdot \cancelto{1}{\log 10} = 110$$

Para 110 dB, o tempo máximo de exposição diária permitido sem proteção auditiva é 15 minutos.

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 2: Função logarítmica.

- A função logarítmica. (p. 83 - 89)

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 3: função logarítmica.

- Função logarítmica. (p. 99 - 102).

VIDEOAULAS

[Portal da OBMEP
Função Logaritmica]

Atividades

ATIVIDADE 1

As funções *f* e *g* são dadas por $f(x) = 4 + log_3 x$ e $g(x) = log\,(x+6)$. Dessa forma, determine:

a) *f(1)* =

b) *g(4)* =

c) *f(3)* =

d) *f(9)* + *g(-5)* =

e) x tal que *f(x)* = *9*

f) *x* tal que *g(x)* = 2

ATIVIDADE 2

Considere a função logarítmica $f(x) = log_a x$, onde *a* é a base do logaritmo.

Qual das alternativas abaixo descreve corretamente as principais características desta função logarítmica?

a) A função logarítmica possui domínio em $\mathbb{R}$, imagem em $\mathbb{R}$ e, para todas as bases *a* > *1*, é uma função crescente.

b) A função logarítmica possui domínio em *x* < *0,* imagem em $\mathbb{R}$ e, para todas as bases *a* > *1*, é uma função crescente.

c) A função logarítmica possui domínio em *x* > *0* e imagem em $\mathbb{R}$ e, é decrescente quando *a* > *1* e crescente quando *0* < *a* < *1*.

d) A função logarítmica possui domínio em x > 0, imagem em $\mathbb{R}$ e, é crescente quando a > 1 e decrescente quando 0 < a < 1.

e) A função logarítmica possui domínio em *x* > 0 e imagem em $\mathbb{R}$ e, para todas as bases *a* > *0*, é uma função crescente, exceto quando *a* = *1*.

ATIVIDADE 3

Classifique, cada função logarítmica a seguir em crescente ou decrescente.

$a)\ f(x) = log_9\, x$

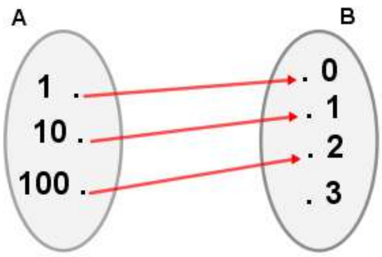
$b)\ f(x) = log_{\frac{1}{5}}\, x$

$c)\ y = log_{0,2}\, x$

$d)\ y = log\, x$

ATIVIDADE 4

Dados os conjuntos A = {1, 10, 100} e B = {0, 1, 2, 3}, considere uma função $g : A \to B$ definida por $g(x) = log\, x$, conforme apresentado no diagrama, determine:



a) Domínio D(g) e o conjunto imagem Im(g) da função.

b) o valor de *g(10)*.

c) O valor *x* para o qual *g(x) = 2*

ATIVIDADE 5

Determine os valores reais de *x* para os quais os logaritmos indicados em cada item podem ser definidos, ou seja, identifique o domínio da função.

$a) f(x) = log_5\, x$

$b) f(x) = log\, (x-3)$

$c) f(x) = 5 + log_4\, 2x$

$d)\ f(x) = log_{\frac{1}{2}}\, (5x - 52)$

$e) f(x) = log_3\, (x^2 - 9)$

ATIVIDADE 6

Em um financiamento de imóvel em uma instituição bancária, Carlos observou que, ao financiar o valor de R$ 200 000,00 com uma taxa de juros compostos de 8% ao ano, o valor final a ser pago seria de R$ 440 000,00. Esse valor pode ser modelado pela equação $V(t) = 200\,000 \cdot (1,08)^t$, onde *t* representa o tempo em anos e *V(t)* o valor total a ser pago ao final do financiamento. Mantendo essas condições e pagando as parcelas anualmente, sem antecipações, podemos determinar que o tempo, em anos, necessário para quitar o financiamento é um número que mais se aproxima de:

(**Dados**: $log\,1,08 \approx 0,033;\ log\,2,2 \approx 0,342$)

a) 2 anos
b) 5 anos
c) 7 anos
d) 9 anos
e) 10 anos

ATIVIDADE 7

O pH é uma medida que indica o nível de acidez ou basicidade de uma solução, de acordo com a concentração de íons hidrogênio (H^+) presentes. Ele varia em uma escala de 0 a 14, onde valores abaixo de 7 representam soluções ácidas, como o suco de limão, e valores acima de 7 indicam soluções básicas, como a água sanitária. O valor 7 é considerado neutro, como na água pura.

Disponível em: <https://www.manualdaquimica.com/fisico-quimica/conceito-ph.htm#:~:text=A%20escala%20de%20pH%20vai,neutra%2C%20como%20a%20%C3%A1gua%20pura>. Acessado em: 20/12/2024.

Para o cálculo do pH se usa a expressão pH = −log [H^+], em que [H^+] é a concentração de íons de hidrogênio em mol/litro. Ao analisar uma solução de café, um químico verificou que a concentração de íons de hidrogênio na solução era de $10^{-5}\ mol/l$.

a) Qual é o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução de café?

b) O cafézinho analisado pelo químico é uma solução neutra, básica ou ácida?

ATIVIDADE 8

O valor do imposto pago por uma empresa, denotado por *V* (em milhares de reais), em função do tempo *t* (em meses), é dado pela função:

$$V(t) = log_2\,(t+4)$$

a) Determine o valor do imposto que será pago pela empresa daqui a 4 meses.

b) Determine o tempo *t* no qual a empresa pagará R$ 6 000,00 de imposto.

ATIVIDADE 9

A velocidade máxima, em bits por segundo com a qual os sinais podem passar por canais de comunicação pode ser obtida por meio da fórmula $V_{max} = 3\,400 \cdot lo_2\,(x+1)$, em que 3 400 hertz é a frequência limite da voz humana e *x* está relacionado a potencia do sinal, medida em Decibéis-miliwatt (dBm). Calcule a potência do sinal correspondente a uma velocidade máxima de 27 200 bits por segundo.

(ENEM-2019) Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) (μm · Hz)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3,9$
Ligeiro	$4,0 \leq M_s \leq 4,9$
Moderado	$5,0 \leq M_s \leq 5,9$
Grande	$6,0 \leq M_s \leq 9,9$
Extremo	$M_s \geq 10,0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_s = 3,3 + log(A \cdot f)$, em que *A* representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e *f* representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2 000 μm e frequência de 0,2 Hz.

Disponível em: http://cejarj.cecierj.edu.br. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado).

Utilize 0,30 como aproximação para log 2.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

a) Pequeno.
b) Ligeiro.
c) Moderado.
d) Grande.
e) Extremo.

INTRODUÇÃO

Embora já tenhamos introduzido a relação entre funções exponenciais e logarítmicas, ainda exploraremos esse vínculo com mais detalhes. Por ora, vamos nos concentrar na estrutura das funções logarítmicas e como elas se comportam graficamente.

ANÁLISE GRÁFICA DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA CRESCENTE

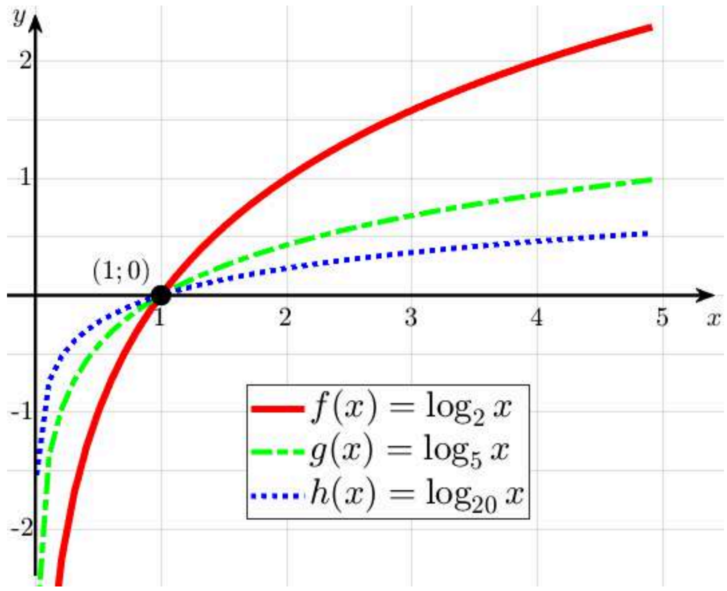


Figura 1: Gráfico de funções logarítmicas crescentes com diferentes bases.

Quando a base a é maior que 1, a função logarítmica $\log_a x$ é crescente, ou seja, conforme x aumenta, $f(x)$ também cresce.

Na figura 1, temos os gráficos de algumas funções logarítmicas crescentes. Observe que $f(x) = \log_2 x$ cresce mais rapidamente do que as demais funções. Isso ocorre porque, para atingir um mesmo valor de x, é necessário um expoente maior em bases menores do que em bases maiores. Como consequência, a curva da função se eleva mais rapidamente. Por outro lado, à medida que a base aumenta, o gráfico se torna mais achatado e o crescimento ocorre de forma mais lenta.

ANÁLISE GRÁFICA DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA DECRESCENTE

Na figura 2, são apresentados os gráficos de algumas funções logarítmicas decrescentes. Diferente das funções logarítmicas crescentes, aqui a base está no intervalo $0 < a < 1$, o que inverte o sentido do crescimento. Isso significa que, à medida que x aumenta, $f(x)$ diminui.

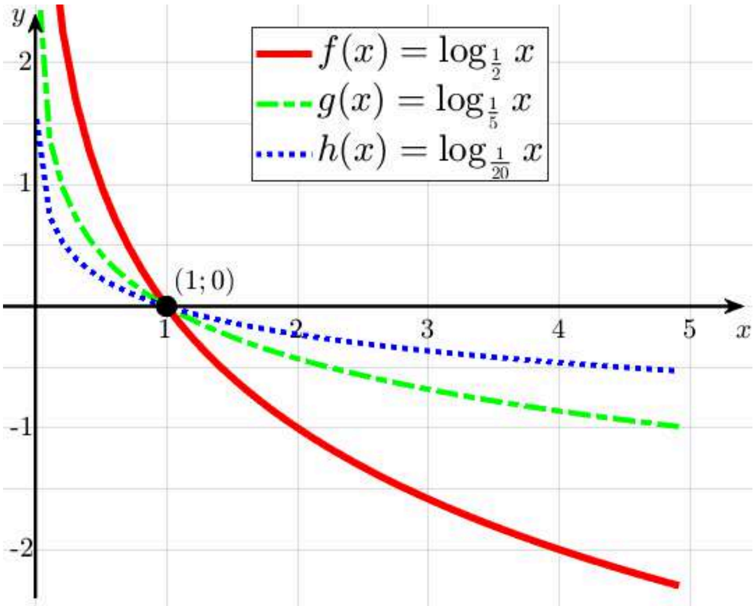


Figura 2: Gráfico de funções logarítmicas decrescentes com diferentes bases.

Observe que, quanto maior a base, mais acentuada é a queda da função. Isso ocorre porque, para atingir um mesmo valor de x, é necessário um expoente menor em bases menores do que em bases maiores. Como consequência, funções com bases próximas de zero decaem mais suavemente, enquanto aquelas com bases próximas de 1 apresentam uma queda mais rápida e um gráfico **menos achatado**.

FUNÇÃO DO TIPO LOGARÍTMICA

Até então nos debruçamos sobre a função logarítmica básica. No entanto, em diversas aplicações, essa função pode ser modificada por meio de transformações lineares, resultando em expressões mais gerais, que são denominadas de **função do tipo logarítmica**, como, por exemplo, a seguinte função:

$$f(x) = b \cdot \log_a (k \cdot x + c) + d, \qquad \text{em que } (k \cdot x + c) > 0$$

$$f(x) = b \cdot log_a\,(k \cdot x + c) + d$$

Além da base a, cada coeficiente b, c, d e k influenciam na função do tipo logarítmica como descrito a seguir:

- b: o seu valor absoluto controla o achatamento/estiramento vertical da função e, se negativo, ocorre uma reflexão em relação ao eixo x;
- c: desloca o gráfico horizontalmente, lembrando que $(k \cdot x + c) > 0$, portanto, o valor de c influenciará diretamente no domínio da função do tipo logarítmica, podendo, em decorrência disso, x assumir valores negativos;
- d: desloca o gráfico verticalmente; e
- k: multiplica ou divide o valor de x, e, consequentemente, acelera ou retarda a progressão da função para um determinado valor de entrada.

A seguir, analisamos essas transformações com o auxílio de gráficos que ilustram o impacto de cada parâmetro.

1ª Análise

Observe os gráficos representados nas figuras 3 e 4.

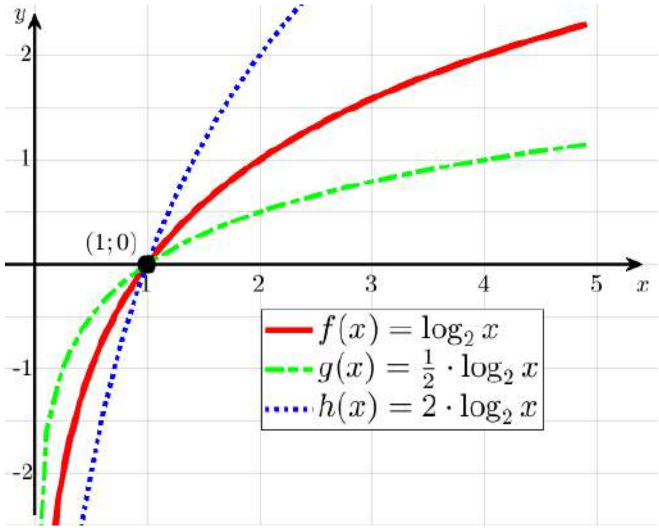


Figura 3: Compressão vertical por influência do valor absoluto do coeficiente b.

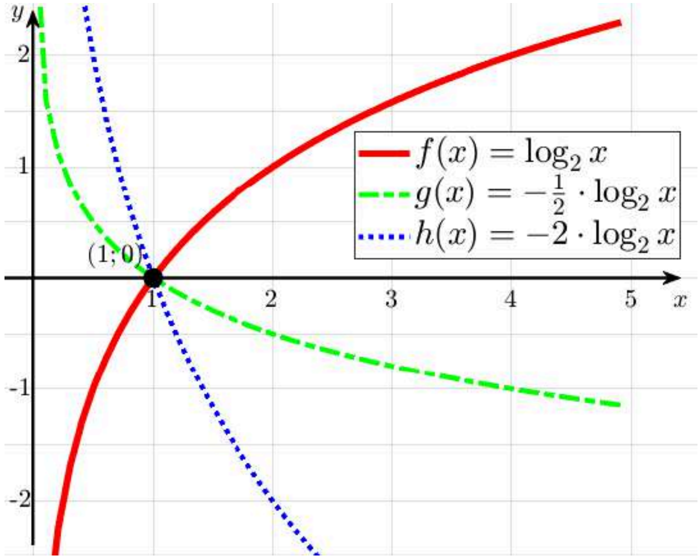


Figura 4: Reflexão da função em decorrência do sinal do coeficiente b.

Podemos verificar, nas figuras 3 e 4, que o coeficiente b multiplica o logaritmo e afeta a inclinação da curva. Valores $|b| > 1$ fazem a curva crescer mais rapidamente, enquanto $0 < |b| < 1$ tornam o crescimento mais lento. Podemos perceber, também, que estas funções passam pelo mesmo ponto $(1; 0)$, evidenciando que o valor deste coeficiente não altera a raiz da função original. Além disso, quando o sinal deste coeficiente é negativo, a função é refletiva em relação ao eixo x, invertendo, em decorrência disto, o comportamento de crescimento/decrescimento da função.

2ª Análise

Observe o gráfico representado na figura 5.

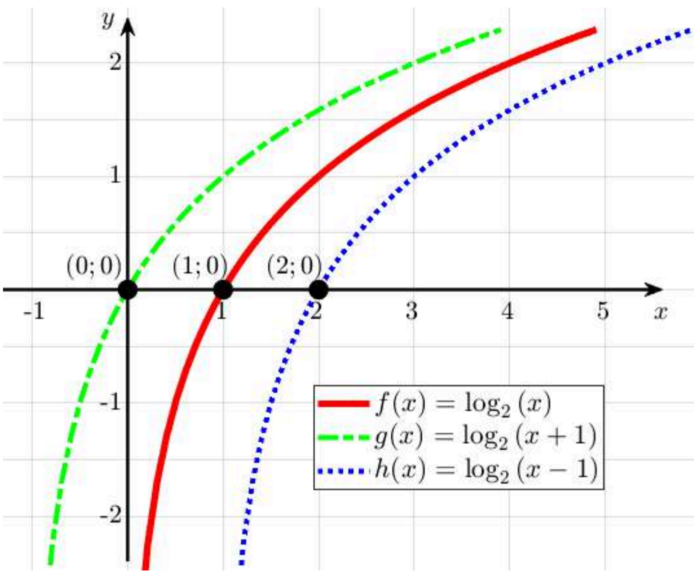


Figura 5: Deslocamento horizontal por influência do coeficiente c.

Na figura 5, podemos observar que o parâmetro c provoca um deslocamento horizontal da função ao longo do eixo x, movendo a assíntota vertical para $x = -c$. Os pontos destacados evidenciam a influência desse coeficiente, demonstrando que tanto a raiz da função original quanto a assíntota são deslocadas na mesma medida.

3ª Análise

Observe o gráfico representado na figura 6.

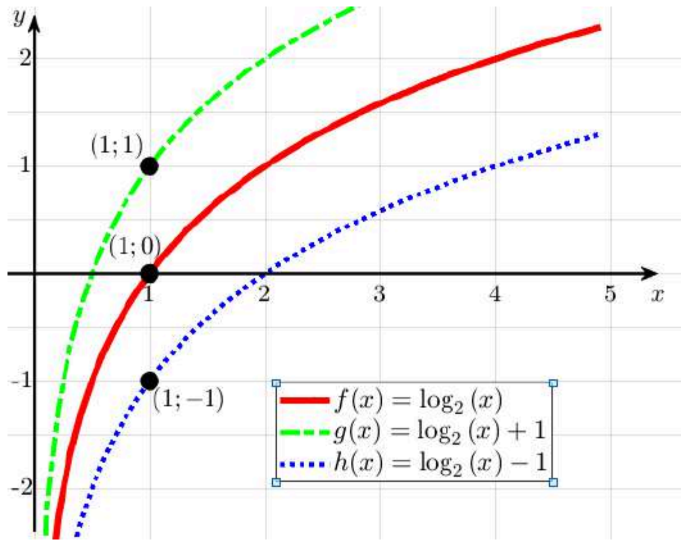


Figura 6: Deslocamento vertical por influência do coeficiente d.

O coeficiente d, como podemos verificar na figura 6, provoca um deslocamento vertical da curva sem alterar sua forma. Os pontos destacados evidenciam essa mudança de posição ao longo do eixo y, refletindo o impacto direto desse coeficiente. Esse deslocamento é uniforme e afeta todos os pontos do gráfico da mesma maneira.

4ª Análise

Observe o gráfico representado na figura 7.

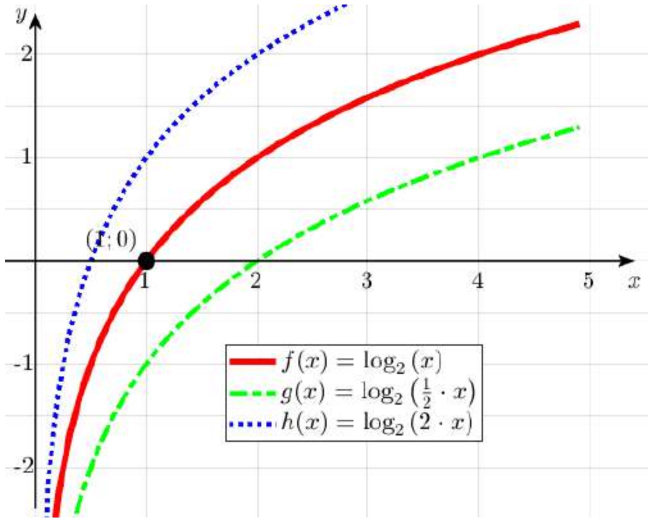


Figura 7: Deslocamento horizontal por influência do coeficiente k .

A multiplicação da variável x por um fator altera a taxa de crescimento da função, como ilustrado na figura 7. Quando x é multiplicado por um valor maior que 1, o gráfico original é comprimido horizontalmente, tornando-se mais inclinado. Por outro lado, quando x é multiplicado por um valor entre 0 e 1, o gráfico se expande horizontalmente, resultando em um crescimento mais lento.

EXERCÍCIO 1. Considere as seguintes funções logarítmicas:

$$f(x) = \log_3 x \qquad g(x) = \log_{\frac{5}{2}} x \qquad h(x) = \log_{\frac{2}{5}} x$$

$$m(x) = \log_{0,25} x \qquad n(x) = \log_5 x \qquad o(x) = \log_{0,99} x$$

e responda:

a) Quais as funções crescentes e qual delas é a que cresce mais rapidamente em relação ao crescimento de x?

b) Quais as funções decrescente e qual delas decresce mais rapidamente em relação ao crescimento de x?

SOLUÇÃO.

a) As funções crescentes são as que tem a base maior que 1. Portanto, das funções apresentadas, $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$ (pois $\frac{5}{2} = 2,5$) e $n(x) = \log_5 x$ são crescentes.

Entre elas, $g(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$ cresce mais rapidamente, pois quanto menor a base (desde que maior que 1), mais rapidamente a função cresce.

b) As funções logarítmicas são decrescentes quando a base está entre 0 e 1. Assim, as funções $h(x) = \log_{\frac{2}{5}} x$ (pois $\frac{2}{5} = 0,4$), $m(x) = \log_{0,25} x$ e $o(x) = \log_{0,99} x$ são decrescentes.

Entre elas, $o(x) = \log_{0,99} x$ decresce mais rapidamente, pois, quanto maior a base dentro do intervalo] 0,1 [, mais rápido a função diminui.

EXERCÍCIO 2. O nível de intensidade sonora e o cálculo do pH de uma solução são dois exemplos de aplicações da função logarítmica na Ciência. Suas funções podem ser dadas por:

1. Intensidade sonora:

$$\boldsymbol{f(x) = 10 \cdot \log\left(\frac{x}{x_0}\right)}$$

Em que:

- x é a intensidade sonora no local da medição; e
- x_0 é a menor intensidade sonora perceptível ao ouvido humano.

2. Cálculo do pH:

$$g(x) = -\log x$$

em que x é a concentração de íons de hidrogênio, em mols por litro.

Com isto, identifique o valor dos coeficientes que multiplicam o logaritmo em cada equação e explique a sua influência no comportamento da função.

SOLUÇÃO.

Na equação da intensidade sonora, o coeficiente é 10, o que provoca uma dilatação vertical do gráfico, multiplicando seus valores por 10. Isso faz com que a curva cresça mais rapidamente em comparação à função logarítmica básica de base 10, mantendo a mesma estrutura, mas com valores ampliados.

Na equação do pH, o coeficiente é -1, o que causa uma reflexão vertical da função, invertendo seus valores em relação ao eixo x. Como a função logarítmica básica de base 10 é crescente, a presença desse coeficiente transforma seu comportamento em decrescente, sem alterar sua assíntota ou deslocamento horizontal.

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 2: Função logaritmica.

- Tecnologias digitais. (p. 90 - 96)
- Conexões. (p. 97 - 103)

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 3: função logarítmica.

- Função logarítmica. (p. 99 - 102).

CONEXÕES

A audição e a função do tipo logarítmica

Nas páginas 97 a 100, há textos e questões para debate sobre a relação entre a audição e a função do tipo logarítmica.

Atividades

ATIVIDADE 1

Seja *f* uma função logarítmica definida de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, cuja lei de formação é $f(x) = log_4 x$. Para cada item faça o que se pede:

Considere que: $log\, 2 \approx 0,30$

a) Calcule o valor de $f\left(\frac{1}{4}\right)$, *f(1), f(2) e f(4)*.

b) Com base nos valores de *x* e *y* obtidos nos itens anteriores, organize os pares ordenados (*x, y*) e construa o gráfico da função *f(x)* em seu caderno.

c) Com base no gráfico do item b, que representa uma função logarítmica, analise o comportamento dos valores de *f(x)* à medida que *x* aumenta.

ATIVIDADE 2

Com base nas características do gráfico da função logarítmica $f(x) = log_a x$, qual das alternativas abaixo está **incorreta**?

a) A função logarítmica possui uma assíntota vertical em *x = 0*, ou seja, as curvas dos gráficos se aproxima do eixo *y*, mas não o tocam.

b) A taxa de crescimento de uma função logarítmica é muito mais lenta que a de funções lineares, quadráticas ou exponenciais.

c) Para *0 < a < 1* a função é decrescente, ou seja, a medida que *x* aumenta, o valor de *f(x)* diminui.

d) A função sempre passa pelo ponto (1, 0), independentemente da base *a*.

e) A função sempre passa pelo ponto (0, 1), independentemente da base *a*.

ATIVIDADE 3

Construa o gráfico de cada uma das funções dada a seguir:

$a) f(x) = log_{\frac{1}{10}}(x)$

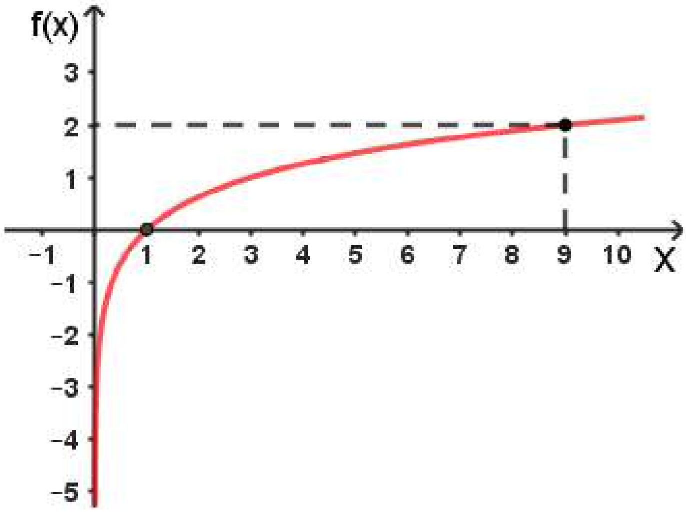
$b)\ f(x) = log_3\ (x+4)$

$c) f(x) = 3 + log_2(x)$

$d) f(x) = 3 \cdot log_2(x)$

ATIVIDADE 4

Observe abaixo o gráfico da função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.



Qual é a lei de formação dessa função?

$a)\ f(x) = -3 \cdot log_3\, x$

$b)\ f(x) = 3 \cdot log_3\, x$

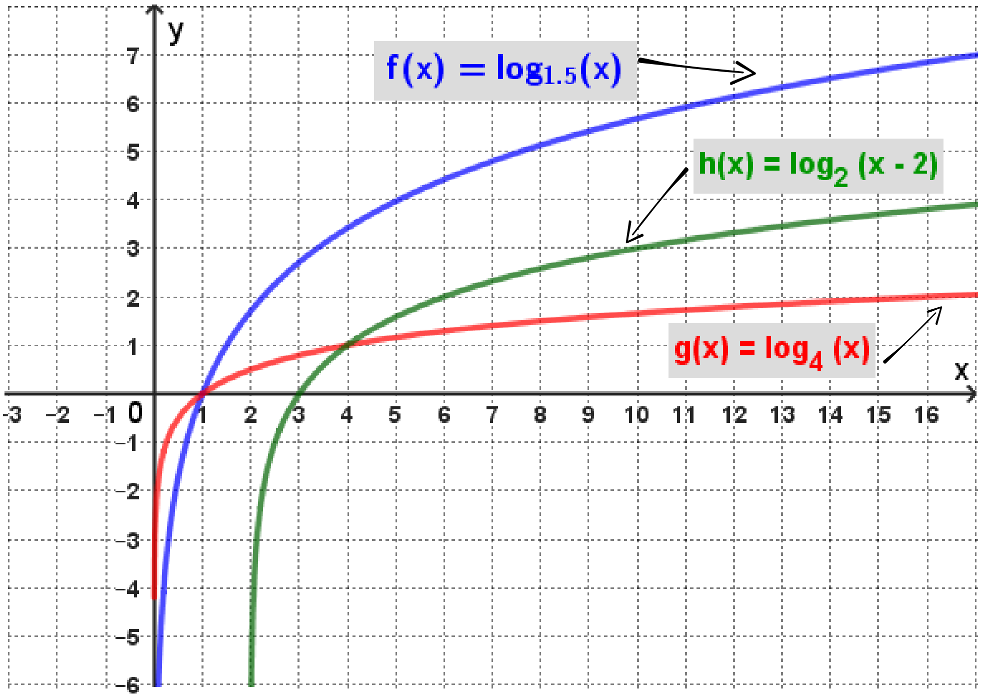
$c)\ f(x) = log_3\, x$

$d)\ f(x) = log_{\frac{1}{3}}\, x$

$e)\ f(x) = log_3\, (x+2)$

ATIVIDADE 5

Abaixo no plano cartesiano estão representados as funções reais *f(x), g(x) e h(x)*.



Considerando as representações gráficas de cada uma dessas funções no plano cartesiano, com suas respectivas leis de formação, marque "V" para as afirmações verdadeiras e "F" para as falsas nas frases dadas a seguir:

a) ( ) As funções *f(x)* e *g(x)* possuem a mesma taxa de crescimento porque ambas têm base maior que 1.

b) ( ) A função *f(x)* tem uma taxa de crescimento mais rápida do que a função *g(x)*. Isso ocorre porque, em uma função logarítmica crescente, quanto menor a base *a* do logaritmo, maior é a taxa de crescimento da função.

c) ( ) A função *h(x)* tem uma assíntota vertical em *x* = 2. Já a função *g(x)* tem assíntota vertical em *x = 0*.

d) ( ) As funções *f(x)*, *g(x)* e *h(x)* têm um ponto em comum, pois todas interceptam o eixo *x* no ponto de coordenadas (1, 0).

e) ( ) As funções *h(x)* e *g(x)*, se interceptam no ponto de coordenadas (4, 1)

f) ( ) A função *f(x)* possui uma assíntota vertical em *x = 0*.

g) ( ) A função *h(x)* é definida apenas para valores de *x* maiores que 2.

h) ( ) Na função *g(x)*, temos que *g(16)* = 2 e na função *h(x)*, temos que *h(10) = 3*.

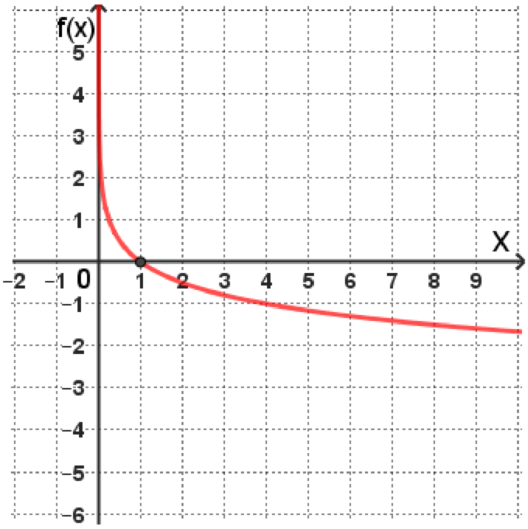
i) ( ) Na função *f(x),* temos que *f(0)* = - 6.

ATIVIDADE 6

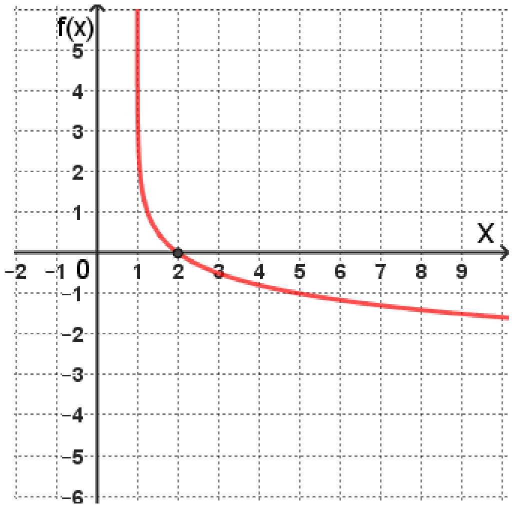
Qual é o gráfico que representa a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\boxed{f(x) = log_{\frac{1}{4}}(x-1)}$$

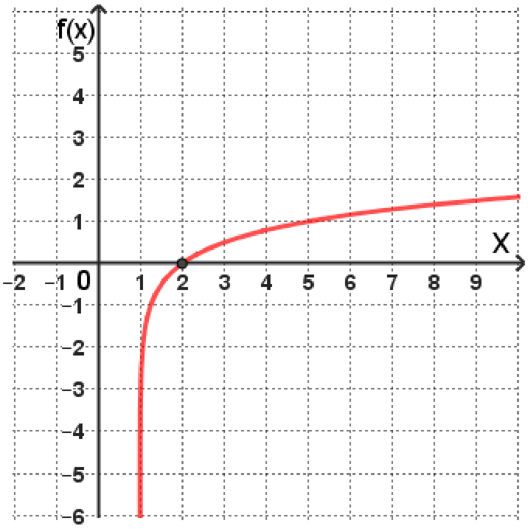
a)



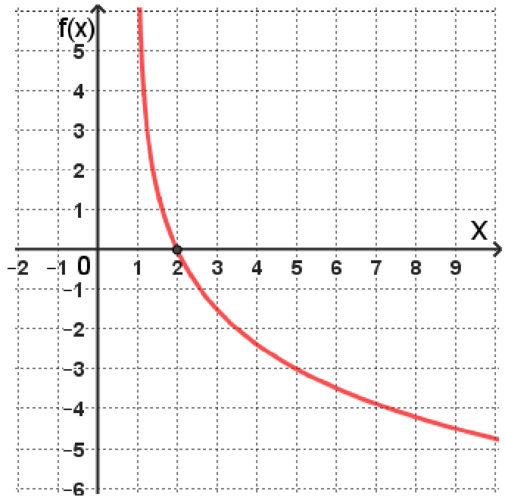
b)



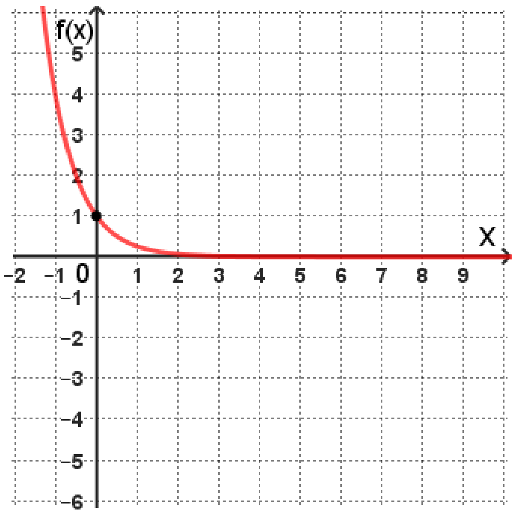
c)



d)



e)



ATIVIDADE 7

O aquecimento de um forno de precisão será feito de modo que sua temperatura *T*, em graus Celsius (ºC), será controlada para variar de acordo com a função $T = 30 \cdot log_2\,(3t + 1) + 25$, sendo *t* o tempo, em minutos, decorridos desde o início do aquecimento.

a) Qual a temperatura do forno no instante em que é iniciado o aquecimento?

b) Qual a temperatura do forno 5 minutos após o inicio do aquecimento?

c) Após quantos minutos a temperatura atingirá 205 ºC?

ATIVIDADE 8

Teste do bafômetro: qual o limite de tolerância?

Dirigir sob efeito de álcool é crime e, no Brasil, a política é de tolerância zero para quem dirige alcoolizado, ou seja, não é permitido consumir sequer uma gota de álcool antes de dirigir. O bafômetro, utilizado para medir a quantidade de álcool no organismo é preciso, mas pode apresentar falhas, justificando uma margem de erro. Segundo a Resolução nº 432/2013 do Contran, a margem de erro permitida é de 0,04 mg/l de álcool no ar expelido.

Margem do Contran que define presença de álcool no organismo como crime de trânsito.	
Até 0,04 mg/l	Sem penalidades. Está dentro da margem de erro estabelecida pelo Contran.
de 0,05 mg/l a 0,33 mg/l	Infração gravíssima com multa de R$ 2934,70.
Igual ou superior a 0,34 mg/l	Enquadra-se como crime de trânsito, e o condutor responderá criminalmente

Disponível em: <https://autoesporte.globo.com/mobilidade/noticia/2024/02/teste-do-bafometro-qual-o-limite-de-tolerancia.ghtml>. Acessado em 24/12/2024.

Supondo que, após o consumo de uma quantidade considerável de bebida alcoólica, o nível de álcool no sangue de uma pessoa diminua a uma taxa constante a cada hora, e que esse processo pode ser modelado pela função $f(x) = \dfrac{14 + 10 \cdot log\,x}{3}$, onde *x* representa a quantidade inicial de álcool no sangue, medida em miligramas por litro, e *f(x)* é uma função que descreve o tempo, em horas, necessário para que uma pessoa, após parar de beber, se recupere da intoxicação e atinja o nível mínimo de álcool no sangue.

Considerando que, após interromper o consumo de bebida alcoólica, o motorista mediu seu nível de álcool no sangue e obteve o valor de 2,5 mg/l, qual será o tempo, em horas, necessário para que ele esteja apto a dirigir, levando em consideração o limite máximo indicado na margem de erro, conforme apontado pelo Contran nas medições feitas por bafômetro? **(Dados:** $log\,(2,5) \approx 0,40;\ log\,5 \approx 0,70$ **)**

ATIVIDADE 9

A intensidade sonora é medida em uma unidade chamada decibel (dB). Quando uma pessoa escuta música através de fones de ouvido, os níveis de pressão sonora podem variar entre 85 dB e 110 dB, dependendo do volume do dispositivo e das condições do ambiente. No entanto, é fundamental ter cuidado com volumes excessivos, pois a exposição prolongada a níveis sonoros elevados pode resultar em danos permanentes à audição.

O nível sonoro de um ambiente, expresso em decibéis (dB), pode ser calculado pela Lei de Weber-Fechner, dada pela fórmula:

$$N = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

onde N é o nível de pressão sonora em decibéis (dB), I é a intensidade sonora medida em watts por metro quadrado (W/m²), e I_0 é a intensidade de referência, equivalente a 10^{-12} W/m².

Calculando o nível sonoro em decibéis de um fone de ouvido cuja intensidade sonora seja 10^{-3} W/m², encontramos que o nível de pressão sonora é de:

a) 30 dB
b) 80 dB
c) 90 dB
d) 120 dB
e) 150 dB

ATIVIDADE 10

O altímetro é um instrumento de bordo das aeronaves responsável por medir a pressão atmosférica estática e indicar a altitude da aeronave. Ele é calibrado de acordo com o modelo internacional padronizado de pressão atmosférica e temperatura, garantindo precisão nas leituras durante o voo.

Disponível em: <https://www2.anac.gov.br/anacpedia/por_esp/tr3628.htm>. Acessado em: 23/12/2024.

Suponha que a altitude *h* acima do nível do mar, em quilômetro, detectada pelo altímetro de um avião seja dada, em função da pressão atmosférica *p*, em atm, por:

$$h(p) = 20 \cdot log_{10}\left(\frac{1}{p}\right)$$

Num determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro era 0,5 atm. Considerando a aproximação $log_2 \approx 0,30$, a altitude *h* do avião nesse instante, em quilômetro, era de :

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 14

O CONCEITO DE FUNÇÃO INVERSA

Antes de explorarmos as relações entre funções exponenciais e logarítmicas, é fundamental compreender o que significa dizer que uma função é a inversa de outra.

Definição formal de função inversa

Uma função $f : A \longrightarrow B$ tem uma função inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ se, e somente se, f for **bijetora**, ou seja, **injetora** (valores distintos de x geram valores distintos de y) e **sobrejetora** (todo elemento do conjunto de chegada B tem pelo menos um correspondente em A), tal que:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \text{para todo } x \in A.$$

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \qquad \text{para todo } y \in B.$$

Ou seja, dada uma função bijetora f, sua função inversa, denotada por f^{-1}, é aquela que reverte a operação realizada por f, e vice-versa. Em outras palavras, se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.

VOCÊ SABIA?

O crescimento de cristais pode ser modelado por uma função logarítmica, onde a velocidade de crescimento diminui com o tempo. A inversa dessa função pode ser usada para determinar o tempo necessário para que um cristal atinja determinado tamanho, o que é importante em processos industriais de fabricação de cristais e semicondutores, que podem atuar tanto como condutores quanto como isolantes, o que os torna essenciais para a eletrônica moderna.

Exemplo

Considere a função bijetora $f(x) = 2x + 3$. Para encontrarmos a sua inversa, podemos fazer os seguintes procedimentos:

1. Troque $f(x)$ por y.

$$y = 2x + 3$$

2. Isole a variável x para fazer a sua equação em termos de y.

$$y = 2x + 3 \rightarrow 2x = y - 3 \rightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

3. Substitua x por $f^{-1}(y)$.

$$f^{-1}(x) = \frac{y-3}{2}$$

Por fim, para consolidar o conceito de função inversa, vamos aplicar alguns valores arbitrários de x na função do exemplo dado. Em seguida, utilizamos os valores obtidos para verificar se a função inversa realmente desfaz a operação, retornando ao valor original de x. A tabela a seguir mostra esse processo:

x	$f(x) = 2x + 3$	y *obtido*	$f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$	x *obtido*
-3	$2 \cdot (-3) + 3$ $= -6 + 3 = -3$	-3	$\frac{-3-3}{2} = \frac{-6}{2} = -3$	-3
$-1,5$	$2 \cdot (-1.5) + 3$ $= -3 + 3 = 0$	0	$\frac{0-3}{2} = \frac{-3}{2} = -1,5$	$-1,5$
0	$2 \cdot (0) + 3$ $= 0 + 3 = 3$	3	$\frac{3-3}{2} = \frac{0}{2} = 0$	0
5	$2 \cdot (5) + 3$ $= 10 + 3 = 13$	13	$\frac{13-3}{2} = \frac{10}{2} = 5$	5

Tabela 1: Verificação da inversibilidade da função do exemplo dado.

Como podemos ver nesses exemplos da tabela 1, ao aplicar um determinado valor de x a $f(x)$, obtemos um valor y. Quando aplicamos esse y em $f^{-1}(y)$, recuperamos o valor original de x, confirmando que f^{-1} realmente desfaz a operação de f.

Visualizando o gráfico da função e da sua inversa

Para compreender melhor a relação entre uma função e sua inversa, representamos graficamente, na figura 1, a função dada no exemplo, $f(x) = 2x + 3$, juntamente com sua inversa, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$. Nesse contexto, utilizamos x como variável de entrada de ambas para comparar diretamente o comportamento das duas funções para os mesmos valores. Além disso, incluímos a reta identidade $y = x$, que desempenha um papel fundamental na interpretação geométrica das funções inversas.

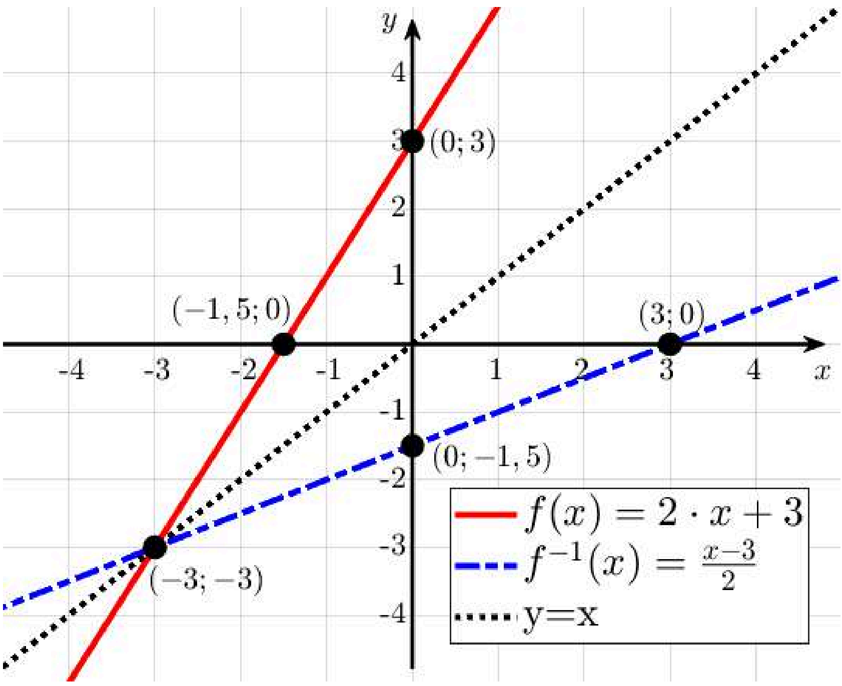


Figura 1: Comparação do gráfico de uma função e sua inversa.

Uma propriedade essencial das funções inversas é a **simetria de seus gráficos em relação à reta $\boldsymbol{y = x}$**. Isso significa que, se um ponto $(a; b)$ pertence ao gráfico da função f, então o ponto $(b; a)$ pertence ao gráfico de f^{-1} .

Para ilustrar essa simetria, destacamos no gráfico os seguintes pares de pontos, que também podem ser confirmados pelos valores apresentados na tabela 1:

- $(-3; -3)$, que é um ponto presente em ambas as funções;
- $(-1,5;\ 0)$ em f, e seu correspondente $(0;\ -1,5)$ em f^{-1} ; e
- $(0; 3)$ em f, e seu correspondente $(3; 0)$ em f^{-1}.

Essa reflexão dos pontos em relação à reta $y = x$ é uma característica marcante das funções inversas. Geometricamente, essa propriedade reforça a ideia de que a inversa de uma função "desfaz" sua operação original, trocando as posições de entrada e saída.

VOCÊ SABIA?

A percepção de brilho e intensidade luminosa no olho humano segue uma função logarítmica. Isso significa que a nossa capacidade de perceber diferenças de brilho é uma função inversa de uma função exponencial que descreve a quantidade de luz que incide sobre a retina. A inversa dessa relação ajuda a explicar como ajustamos nossa percepção ao lidar com mudanças em intensidade luminosa em ambientes com diferentes níveis de iluminação.

A FUNÇÃO LOGARÍTMICA COMO INVERSA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Agora que compreendemos o conceito de função inversa, vamos demonstrar que a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Para isso, podemos partir da definição de uma das funções (lembrando que ambas são bijetoras) e isolar a variável x, como foi feito no exemplo do tópico anterior.

Assim, consideremos a função exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por:

$$f(x) = a^x, \qquad \text{em que } a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Trocando $f(x)$ por y, temos:

$$y = a^x$$

Agora, aplicamos a definição de logaritmo para isolar x:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Por fim, substituindo x por $f^{-1}(y)$, obtemos a função inversa:

$$f^{-1}(y) = \log_a y$$

Portanto, a função logarítmica é a inversa da função exponencial, ou seja, . Isso significa que a função logarítmica "desfaz" a exponencial.

$f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

Verificação da relação de invertibilidade entre as funções

Agora, verificamos que ao aplicar uma função seguida de sua inversa, recuperamos o valor original:

1. Verificando $f^{-1}(f(x)) = x$:

$$f^{-1}(f(x)) = \log_a a^x$$

Pela propriedade de logaritmo de potenciação, temos

$$\log_a a^x = x \cdot \underbrace{\cancel{\log_a a}}_{1} = x \cdot 1 = x$$

2. Verificando $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$:

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = a^{\log_a y}$$

Pela propriedade fundamental de logaritmo, temos que:

$$a^{\log_a y} = y$$

Dessa forma, comprovamos que a função exponencial e a função logarítmica são realmente inversas uma da outra.

Na figura 2, observamos o gráfico da função exponencial de base 2, $f(x) = 2^x$, juntamente com sua inversa, a função logarítmica de base 2, $f^{-1}(x) = \log_2 x$. A reta identidade $y = x$ destaca a **simetria entre os gráficos**, evidenciando que cada ponto da função exponencial tem um correspondente refletido na função logarítmica. Em particular, os pontos (1;0) e (0;1) ilustram essa reflexão, reforçando a relação entre as funções inversas.

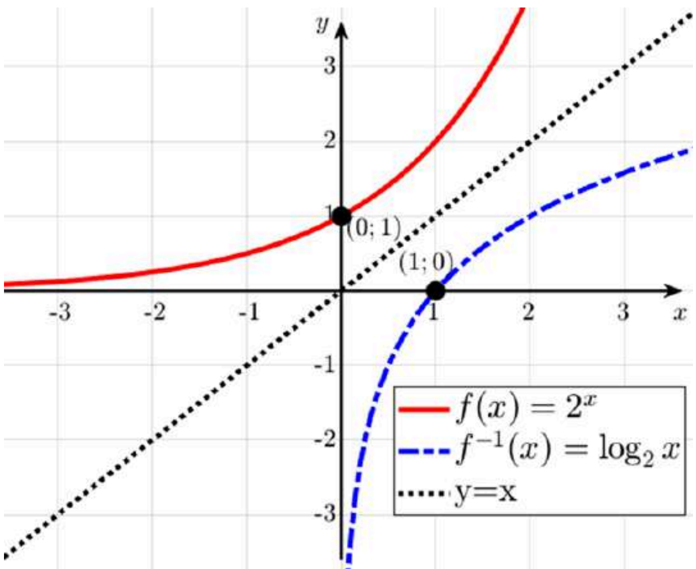


Figura 2: Simetria entre as funções exponencial e logarítmica de base 2.

EXERCÍCIO 1. Sabendo que $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$ encontre $\boldsymbol{f^{-1}(27)}$.

SOLUÇÃO.

A função inversa de $f(x) = 3^x$ é $f^{-1}(x) = \log_3 x$. Assim,

$$f^{-1}(27) = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \cdot \cancelto{1}{\log_3 3} = 3 \cdot 1 = 3$$

Rascunho

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 27 = 3^3$$

Portanto, $f^{-1}(27) = 3$.

EXERCÍCIO 2

A função exponencial $\boldsymbol{f(x) = 5^x}$ passa pelos pontos $\boldsymbol{A(2\,;\,25)}$ e $\boldsymbol{B(-1\,;\,0,2)}$.

a) Determine os pontos correspondentes a $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ no gráfico de sua inversa.
b) Escreva a expressão $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ e verifique se os pontos obtidos pertencem ao seu gráfico.

SOLUÇÃO.

a) Sabemos que a inversão de uma função troca os papéis de x e y. Assim, os pontos do gráfico da inversa serão:

- Se $(2\,;\,25)$pertence a f, então $(25\,;\,2)$pertence a f^{-1}.
- Se $(-1\,;\,0,2)$pertence a f , então $(0,2\,;\,-1)$pertence a f^{-1}.

b) A função $f(x) = 5^x$ tem como inversa a função logarítmica de mesma base:

$$f^{-1}(x) = \log_5 x$$

Agora, verificamos se os pontos $(25\,;\,2)$e $(0,2\,;\,-1)$pertencem ao gráfico de $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(25) = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \cdot \cancelto{1}{\log_5 5} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f^{-1}(25) = \log_5 0,2 = \log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1 \cdot \cancelto{1}{\log_5 5} = -1 \cdot 1 = -1$$

Os valores conferem, confirmando que os pontos encontrados realmente pertencem ao gráfico da inversa.

Material Extra

LIVROS DIDÁTICOS

Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequência. (DANTE).

Capítulo 2: Função logarítmica.

- A função logarítmica. (p. 88 - 89).

Prisma Matemática: funções e progressões. (BONJORNO)

Capítulo 3: função logarítmica.

- Função logarítmica. (p. 101 - 102).

VIDEOAULAS

Portal da OBMEP
Função Logarítmica

Atividades

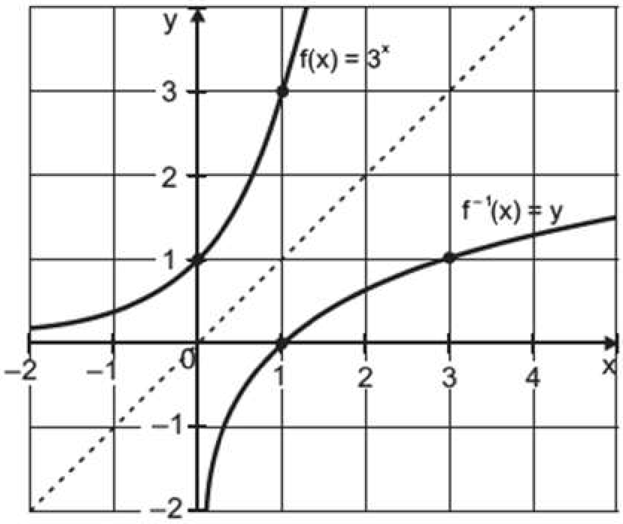
ATIVIDADE 1

As funções $f(x) = log_8\, x$ e $g(x) = 8^x$ são:

a) Opostas
b) ímpares
c) Inversas
d) Pares
e) Constantes

ATIVIDADE 2

(SAEPE) No gráfico abaixo, está representada a função definida por $f(x) = 3^x$ e sua inversa.



A função inversa de $f(x) = 3^x$ representada no gráfico por $f^{-1}(x) = y$ é:

$a)\ y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$b)\ y = log_3\, x$

$c)\ x = log_y\, 3$

$d)\ y = -3^x$

$e)\ y = log_{\frac{1}{3}}\, y$

ATIVIDADE 3

Observe as representações gráficas 1 e 2 a seguir:

Gráfico 1

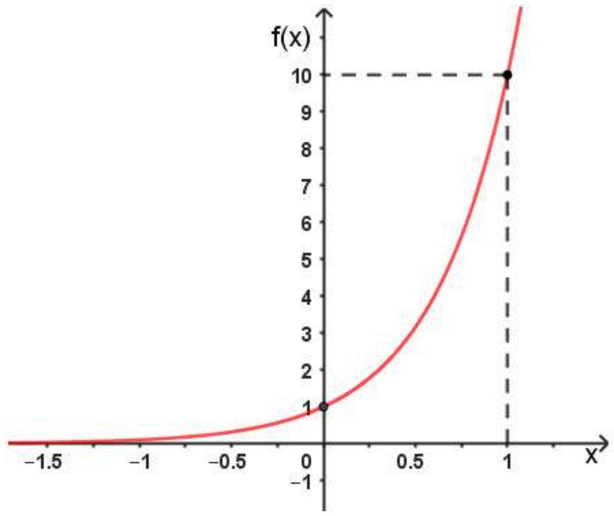
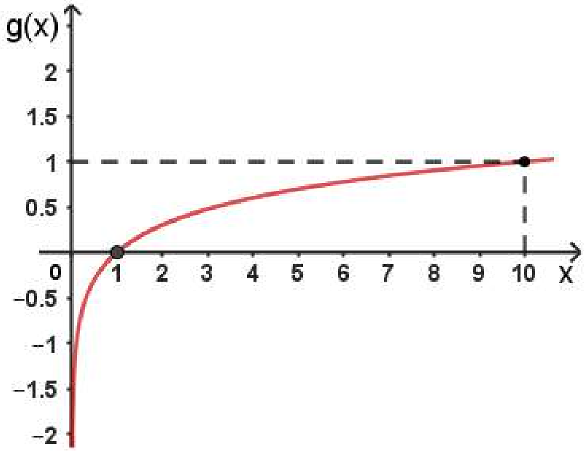


Gráfico 2



Com base nas representações gráficas acima, analise suas características e definições correspondentes e marque a alternativa **incorreta**:

a) Com base nas representações gráficas 1 e 2, podemos afirmar que o gráfico 1 representa à função exponencial do tipo $f(x) = a^x$, enquanto o gráfico 2 representa a função logarítmica do tipo $g(x) = log_a x$. Ambas as funções são crescentes, pois a base *a* é maior que 1.

b) O domínio de uma função corresponde aos valores possíveis que podem ser atribuídos a *x* na função. Assim, no gráfico 1, o domínio abrange todos os valores reais de *x*, ou seja, x $\in \mathbb{R}$. No gráfico 2, o domínio é restrito aos valores reais positivos, ou seja, $x > 0$.

c) No gráfico 1, o conjunto imagem é representado por $y > 0$, ou seja, *y* assume apenas valores positivos. No gráfico 2, o conjunto imagem inclui todos os valores de *y*, sem restrições, podendo ser qualquer número real.

d) Se o gráfico de $f(x) = a^x$ for crescente, o gráfico de sua função inversa, $f^{-1}(x)$, também será crescente. No entanto, a inclinação de $f^{-1}(x)$ será mais suave, especialmente para valores grandes de *x*.

e) O gráfico 1 corresponde à função exponencial $f(x) = 10^x$. Portanto, sua função inversa, representada no gráfico 2, é dada por $g(x) = log_{\frac{1}{10}} x$.

ATIVIDADE 4

Lucas e João estavam estudando o comportamento de diferentes funções quando, em determinado momento, se depararam com um desafio. Utilizando a função $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, Lucas tinha como objetivo determinar o valor de *y* para cada valor de *x*, conforme mostrado na Tabela 1. Em seguida, ele pediu a João para representar, em uma nova tabela (Tabela 2), os valores de x e y da função inversa da função exponencial, ou seja, da função logarítmica, representada por $y = log_{\frac{1}{5}}\, x$.

a) Ajude Lucas a completar a Tabela 1 e João a realizar a tarefa, preenchendo a Tabela 2 com os valores correspondentes de *x* e *y*.

Tabela 1		
x	$y = f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	***(x, y)***
-1	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5^1 = 5$	(-1, 5)
0	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^0 =$	
1		
2		

Tabela 2	
x	$y = log_{\frac{1}{5}}\, x$

b) Após preencher as Tabelas 1 e 2, utilize seu caderno para representar as coordenadas (x, y) de ambas as tabelas em um mesmo plano cartesiano. Em seguida, trace o gráfico da função *f(x)* e de sua inversa $f^{-1}(x)$.

c) Indique qual é o domínio e o conjunto imagem para as funções *f(x)* e $f^{-1}(x)$.

d) Observe os gráficos das funções *f(x)* e $f^{-1}(x)$, e indique se elas são crescentes ou decrescentes, justificando sua resposta com base no comportamento numérico das funções para os valores de *x* escolhidos.

ATIVIDADE 5

Considere a função logarítmica *f(x)* dada por $f(x) = log_6 x$. Determine o que se pede a seguir:

a) *f(216)* =

b) *D(f)* =

c) *Im(f)* =

d) *x* tal que *f(x)* = 2

e) $f^{-1}(x) =$

f) $f^{-1}(1) =$

ATIVIDADE 6

Uma startup de tecnologia está desenvolvendo um novo aplicativo de mensagens, e o número de usuários do aplicativo está crescendo de forma exponencial ao longo do tempo. A evolução desse número de usuários é modelada pela função exponencial:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{0,15 \cdot t}$$

onde *N(t)* representa o número de usuários do aplicativo após *t* meses, N_0 é o número inicial de usuários (no momento do lançamento) e *t* é o tempo, em meses, desde o lançamento do aplicativo.

A equipe de marketing da startup deseja estimar o tempo necessário para que o número de usuários do aplicativo atinja um determinado valor *N(t)*. Para isso, eles usam a função logarítmica derivada da equação exponencial (função inversa da exponencial):

$$t = \frac{log_e\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{0,15}$$

A seguir, analise e responda às questões propostas:

a) Identifique o domínio e a imagem da função $N(t) = N_0 \cdot e^{0,15 \cdot t}$. Lembre que t representa o tempo e que N(t) representa o número de usuários.

b) Identifique o domínio e a imagem da função $t = \frac{log_e\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{0,15}$. Lembre que N(t) representa o número de usuários e t representa o tempo.

ATIVIDADE 7

O professor escreveu no quadro da sala de aula a seguinte equação exponencial:

$$10^x = 3$$

Em seguida, solicitou que um aluno apresentasse uma solução para o expoente *x*, sem utilizar uma calculadora. Assim, o aluno expressou a solução para *x* da seguinte forma:

$a)\ x = 0$

$b)\ x = 2$

$c)\ x = log_3 10$

$d)\ x = log\, 3$

$e)\ x = log\, 10$

ATIVIDADE 8

Sabemos que o pH de uma solução é dado pela fórmula $pH = -log[H^+]$. Dessa maneira, podemos afirmar que se o pH de uma substância é 10, então a concentração de $[H^+]$ é:

$a)\ 10^{-10}$

$b)\ 10^{10}$

$c)\ -10^{10}$

$d)\ 1\,010$

$e)\ -1$

ATIVIDADE 9

A lei que mede o ruído é definida pela expressão $R = 120 + 10 \cdot log\, I$, em que *I* é a intensidade sonora, medida em watt por metro quadrado (W/m²) e *R* é a medida do ruído, em decibéis (dB). Nosso ouvido capta sons a partir de 0 dB, e uma conversa normal gira em torno de 60 dB. Já em níveis acima de 100 dB, apenas 3 minutos já são suficientes para danificar as células auditivas.

A intensidade sonora *(I)* para um som de 100 dB é igual a:

$a)\ 10^{-12}\ W/m^2$

$b)\ 10^{-2}\ W/m^2$

$c)\ 10\ W/m^2$

$d)\ 10^2\ W/m^2$

$e)\ 10^{12}\ W/m^2$

ATIVIDADE 10

Dentre os problemas decorrentes da automedicação, está a ingestão excessiva de medicamentos. Quando um paciente ingere um medicamento, a droga entra na corrente sanguínea e, ao passar pelo fígado e pelos rins, é metabolizada e eliminada a uma taxa que é proporcional a quantidade ingerida e ao tempo decorrido.
Suponha que a quantidade de determinado medicamento no organismo possa ser modelada pela função $Q(t) = Q_0 \cdot (0,5)^t$, em que Q_0 é a quantidade ingerida (em mg) e *Q(t)* é a quantidade do medicamento no organismos (em mg) decorridas *t* horas da ingestão.
Se um paciente ingerir uma super dose de um medicamento cujo princípio ativo é de 500 mg, após quanto tempo no organismo a quantidade da droga será igual a 90 mg? (Considere: $log\, 5 \approx 0,70 \quad e \quad log\, 0,18 \approx -0,74$).

a) 0,41 horas
b) 1,06 horas
c) 2,47 horas
d) 3,6 horas
e) 5,6 horas

atenção

TAREFA COMPLEMENTAR

Que tal explorar um pouco mais sobre equações Logarítmicas?

Trouxemos esta tarefa complementar para que você possa aprender um pouco mais sobre essas equações que, algumas vezes, precisamos recorrer para resolver problemas abordando funções Logarítmicas.

Considerando as equações logarítmicas a seguir, determine o conjunto solução para cada uma delas.

$a)\ log_5\,(x+4) = log_5\,25$

$b)\ log_4\,(2 \cdot x) - 1 = 2$

$c)\ log_5\,125 = x - 4$

$d)\ \log\ x + \log\ 4 = log_3\,9$

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo sobre **Logaritmo** e **Função Logarítmica**. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?

Reflita sobre sua aprendizagem

- Consigo explicar, com minhas próprias palavras, o que é um logaritmo e como ele se relaciona com a potenciação?
- Sei calcular logaritmos e aplicar suas propriedades para simplificar expressões e resolver problemas?
- Consigo identificar as características principais de uma função logarítmica, como base, domínio, imagem e comportamento de crescimento?
- Sou capaz de construir e interpretar gráficos de funções logarítmicas?
- Entendo a relação entre as funções exponenciais e logarítmicas e reconheço que uma é a inversa da outra?
- Sei aplicar os logaritmos e as funções logarítmicas em situações reais, como nas escalas de pH, Richter, decibéis e problemas de Matemática Financeira?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Compreensão do conceito de logaritmo e sua relação com a potenciação	○	○	○
Cálculo e aplicação das propriedades dos logaritmos	○	○	○
Identificação e análise das características das funções logarítmicas	○	○	○
Construção e interpretação de gráficos de funções logarítmicas	○	○	○
Relação entre funções exponenciais e logarítmicas	○	○	○
Aplicação dos logaritmos em contextos reais	○	○	○

Dica: Revise os tópicos que você marcou como "**preciso revisar**" e converse com seu(sua) professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências

ANDRADE, Thais Marcelle de. Matemática interligada: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Matemática e suas tecnologias – Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2020.

ANAC. Agência Nacional de Aviação Civil. ANACPÉDIA: altímetro. Disponível em: <https://www2.anac.gov.br/anacpedia/por_esp/tr3628.htm>. Acessado em: 23/12/2024.

BONJORNO, José Roberto et al. Prisma matemática: funções e progressões. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. Prisma matemática: funções e progressões. Ensino Médio – Matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

CHAVANTE, Eduardo. Quadrante matemática, 1º ano: ensino médio. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em Contexto: função exponencial, função logarítmica e sequências. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos: função exponencial, função logarítmica e sequências. Matemática e suas Tecnologias – Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

GOV.BR. Ministério da Educação – INEP. Provas e Gabaritos. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 27/12/2024.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson et al. Conecte: matemática ciência e aplicações, 1. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2014.

LEONARDO, Fabio Martins. Conexões com a matemática. Ensino Médio. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2016.

Referências

PAIVA, Manoel. Matemática: Paiva/Manoel Paiva. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SAEPE – CAEd/UFJF. Coleção 2016. Revista do Professor: Matemática. Disponível em: <https://avaliacaoemonitoramentopernambuco.caeddigital.net/#!/biblioteca>. Acessado em: 29/12/2024.

SILVA, Everton da Paz. Manual da Química. pH. Disponível em: <https://www.manualdaquimica.com/fisico-quimica/conceito-ph.htm>. Acessado em: 20/12/2024.

SOUZA, Joamir Roberto de. Multiverso Matemática: funções e suas aplicações. Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. Contato Matemática. Ensino Médio. 1º ano. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2016.

TOLEDO, Júlia Maria; FELIX, Leonardo. Teste do bafômetro: qual o limite de tolerância? Publicado em 10/02/2024. Disponível em: <https://autoesporte.globo.com/mobilidade/noticia/2024/02/teste-do-bafometro-qual-o-limite-de-tolerancia.ghtml>. Acessado em 24/12/2024.