SEDU 2026

Rotinas Pedagógicas Escolares

3ª Série

Primeiro Trimestre

Matemática

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO

Secretaria da Educação

Gerência de Currículo da Educação Básica

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Governador
JOSÉ RENATO CASAGRANDE

Secretário de Estado da Educação
VITOR AMORIM DE ANGELO

Subsecretária da Educação Básica e Profissional
ANDRÉA GUZZO PEREIRA

Gerente de Currículo da Educação Básica
ALEIDE CRISTINA DE CAMARGO

Subgerente de Desenvolvimento Curricular da Educação Básica
MARCOS VALÉRIO GUIMARÃES

Subgerente de Educação Ambiental
ALDETE MARIA XAVIER

2026

Coordenador-geral das Rotinas Pedagógicas Escolares
MARCOS VALÉRIO GUIMARÃES

Coordenadores do componente curricular
GABRIEL LUIZ SANTOS KACHEL
LAIANA MENEGUELLI
RAYANE SALVIANO DE OLIVEIRA SILVA
WELLINGTON ROSA DE AZEVEDO
WILLIAM MANTOVANI

Validadores das Rotinas Pedagógicas Escolares
JÉSSICA MONTEIRO FALQUETTO
THIAGO CÉZAR DE PÁDUA ROSA
ORGANDI MONGIN ROVETTA
CARLOS EDUARDO MORAES PIRES

Professores bolsistas responsáveis pela elaboração das Rotinas Pedagógicas Escolares

5º ano EF
FRANCIELY GOMES FAVERO FERREIRA
PAULA AVAREZ CABANÊZ
SILVANA COCCO DALVI

6º ano EF
KARLA SOUTO DE AMORIM
MAYARA DOS SANTOS ZANARDI

7º ano EF
DAVI MARCIO BERMUDES LINO
HELIONARDO THOMAZ ALVES LOURENÇO

8º ano EF
NAFTALY CRISTAL FÉLIX
FABIANA BUENO

9º ano EF
AMECKSON DE SOUZA FERREIRA
LILIAN CRISTINA RODRIGUES SARMENTO

1ª série EM
ANATIELLI LEILIANE PEREIRA SANTANA
FABRÍCIO OLIVEIRA SOUZA

2ª série EM
HAROLDO CABRAL MAYA
SEBASTIÃO ALMEIDA MOTA

3ª série EM
HIGOR SOARES MAJONI
MAURÍCIO DE OLIVEIRA CELERI

Sumário

CAPÍTULO 1 - CONTAGEM E PROBABILIDADE

CAPÍTULO 2 - ORGANIZAÇÃO DE DADOS, MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DE DISPERSÃO

CAPÍTULO 3 - SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

SEDU 2026

Gerência de Currículo
da Educação Básica

Capítulo 1: Contagem e Probabilidade

Apresentação

Prezado(a) estudante,

Você já parou para pensar quantas combinações diferentes existem para a senha do seu celular? Ou qual é a chance de sair cara ao jogar uma moeda?

Essas perguntas estão ligadas a dois temas muito importantes da Matemática: Contagem e Probabilidade. Eles nos ajudam a compreender situações que envolvem possibilidades, escolhas e chances, que aparecem o tempo todo na vida real — em jogos, sorteios, experimentos científicos, senhas digitais, estatísticas e até em decisões cotidianas.

O que você vai estudar neste capítulo

Primeiro, vamos explorar a Análise Combinatória, que nos permite contar o número de maneiras possíveis de realizar algo sem precisar listar todos os casos um por um. Depois, entraremos no estudo da Probabilidade, que trata da chance de um evento acontecer.

Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- Utilizar diagramas de árvore para organizar as possibilidades em problemas de contagem;
- Diferenciar e aplicar os princípios multiplicativo e aditivo;
- Reconhecer e resolver problemas que envolvem agrupamentos ordenáveis (permutação e arranjo);
- Reconhecer e resolver problemas que envolvem agrupamentos não ordenáveis (combinação);
- Identificar e descrever o espaço amostral e os eventos de um experimento aleatório;
- Calcular probabilidades e expressá-las em forma de fração, decimal ou percentual;

- Calcular a probabilidade da união de eventos;
- Compreender e aplicar a probabilidade condicional (eventos dependentes);
- Compreender e aplicar a probabilidade de eventos independentes e consecutivos.

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

CONTAGEM

Introdução

Contar de quantas formas algo pode acontecer pode ser tão simples quanto perceber que, ao lançar uma moeda ao ar, ela pode cair de duas maneiras — com a face "cara" ou "coroa" voltada para cima — ou tão complexo quanto calcular quantos apertos de mão únicos podem ocorrer entre 40 estudantes de uma turma.

Para situações simples, nossa dedução direta é geralmente suficiente. Porém, em situações mais complexas, utilizamos um ramo da matemática chamado Análise Combinatória. Essa área estuda técnicas de contagem que nos permitem determinar, sem listar todos os casos, quantas possibilidades existem em decorrência de um acontecimento.

Para começarmos, vamos definir alguns conceitos importantes e, em seguida, partimos para a definição dos princípios básicos da contagem.

O acontecimento e seus resultados

Antes de iniciarmos os métodos de contagem propriamente ditos, é importante sistematizar alguns termos fundamentais que servirão de base para todo o estudo.

- Acontecimento: é a descrição de uma situação que pode ocorrer, cujos resultados são bem definidos e passíveis de contagem.
- Conjunto resultados de um acontecimento: é o conjunto que reúne todas as possíveis consequências ou desfechos associados a esse acontecimento.
- Cardinalidade do conjunto: é a quantidade de elementos existentes em um determinado conjunto. Se A é um conjunto qualquer, sua cardinalidade é denotada por $n(A)$.

Obs.: Outras notações comumente utilizadas na literatura para indicar cardinalidade são $|A|$ ou $\#A$

Nosso objetivo neste material é compreender os diferentes tipos de acontecimentos e aprender a determinar a cardinalidade de seus conjuntos de resultados, aplicando princípios sistemáticos de contagem.

Exemplo 1 - Considere o seguinte acontecimento:

Lançar uma moeda ao ar e verificar qual face fica para cima quando ela estiver estável no chão: cara ou coroa.

O conjunto resultados para esse acontecimento é:

$$R = \{\, cara \ , \ coroa \,\}$$

Logo, a cardinalidade do conjunto é:

$$n\,(R) = 2$$

Princípios da Contagem

Muitos acontecimentos que analisamos envolvem **etapas sucessivas** ou podem ser **divididos em casos diferentes** e às vezes até combinam essas duas situações.

Para lidar com essas situações e calcular a **cardinalidade total** do conjunto de resultados com organização e eficiência, utilizamos os chamados **Princípios da Contagem**, que veremos a seguir: **Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo e Combinação dos dois princípios.**

- *Princípio Multiplicativo da Contagem*

Se um acontecimento é composto por k etapas sucessivas e independentes, e cada etapa tem seu próprio conjunto resultados R_i (com i variando de 1 até k), sendo que o resultado de uma etapa não interfere nos resultados das demais, então a cardinalidade total do conjunto resultados, R, é dada pelo produto da cardinalidade de cada uma de suas etapas:

$$\boxed{n\,(R) = n\,(R_1) \cdot n\,(R_2) \cdot \; \cdots \; \cdot n\,(R_{k-1}) \cdot n\,(R_k)}$$

Exemplo 2 - Uma pessoa vai se vestir para sair e precisa escolher:

- *uma das quatro camisetas disponíveis:* $A = \{\, Amarela \ , \ Verde \ , \ Cinza \ , \ Vermelha \,\}$
- *uma das duas bermudas disponíveis:* $B = \{\, Azul \ , \ Marrom \,\}$*; e*
- *um dos calçados disponíveis:* $C = \{\, Tênis \,\}$.

Como cada escolha é independente das demais, aplicamos o Princípio Multiplicativo:

$$n\left(A\right)\cdot n\left(B\right)\cdot n\left(C\right)=4\cdot 2\cdot 1=8$$

Portanto, o acontecimento pode ocorrer de **8 formas diferentes**.

Podemos utilizar uma ferramenta gráfica chamada **árvore de possibilidades** para visualizar, de forma organizada, todos os resultados possíveis de um acontecimento. Na figura 1, observamos a árvore correspondente ao Exemplo 2.

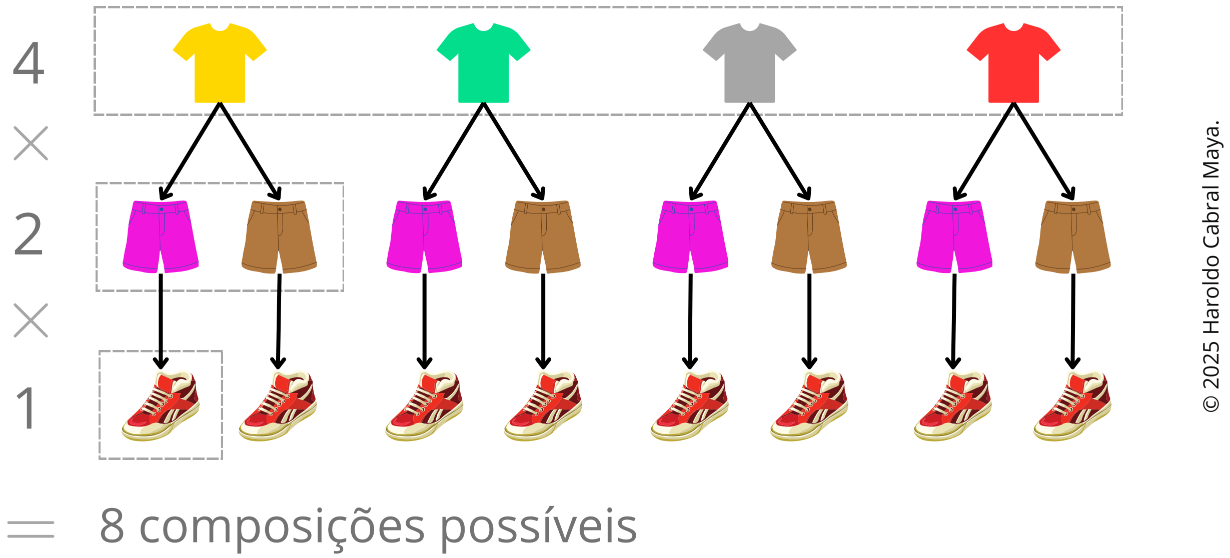


Figura 1: **Árvore de possibilidades representando o acontecimento do exemplo 2.**

- *Princípio Aditivo*

Seja R o conjunto total de resultados de um acontecimento que pode ocorrer de k formas diferentes, sendo cada forma um caso específico do acontecimento, com seu próprio conjunto resultados R_i (com k variando de 1 até i). Se esses casos são mutuamente excludentes, ou seja, se apenas um pode ocorrer por vez, então a cardinalidade total de R é dada pela soma das cardinalidades dos conjuntos resultados de cada caso:

$$\boxed{n\left(R\right)=n\left(R_1\right)+n\left(R_2\right)+\cdots+n\left(R_{k-1}\right)+n\left(R_k\right)}$$

Exemplo 3 - Um estudante decide como vai usar o tempo do recreio na escola. Ele pode optar por:

- *Praticar um dos esportes coletivos disponíveis na quadra:* $E=\left\{\,Basquete\ ,\ Futsal\ ,\ Vôlei\,\right\}$*; ou*
- *Fazer uma revisão de uma das disciplinas com avaliação marcada para as próximas aulas:* $R=\left\{\,Lingua\ Portuguesa\ ,\ Matemática\,\right\}$.

Como ele só pode escolher uma atividade, os sub-acontecimentos E e R são mutuamente excludentes. Aplicamos, então, o Princípio Aditivo:

$$n\,(E) + n\,(R) = 3 + 2 = 5$$

Portanto, o acontecimento escolher o que fazer no recreio pode ocorrer de 5 formas diferentes.

- *Combinação dos Princípios Aditivo e Multiplicativo*

Em muitos problemas, temos situações em que:

- Existem **casos diferentes**, **mutuamente excludentes** (Princípio Aditivo);
- E, **dentro de cada caso**, há **etapas sucessivas** (Princípio Multiplicativo).

Nesses casos, usamos **os dois princípios combinados**:

1. Aplicamos o **Princípio Multiplicativo** dentro de cada caso,
2. Usamos o **Princípio Aditivo** para somar os totais de cada caso.

Exemplo 4 - Arthur está em uma praça e decide fazer um lanche antes de voltar para casa. Ele tem **duas opções exclusivas** de local para lanchar:

Pastelaria

- *3 tipos de pastéis; e*
- *3 tipos de bebida.*

Banca de sanduíches

- *2 tipos de sanduíche; e*
- *3 tipos de bebida.*

Em qualquer uma das opções, Arthur deve montar um **combo** com **uma comida e uma bebida**.

Arthur conhece suas limitações e sabe que aguenta lanchar em apenas um dos dois locais. Portanto, os casos são **mutuamente excludentes**. Vamos aplicar os **princípios da contagem** para determinar a quantidade total de possibilidades.

Caso 1: Arthur escolhe lanchar na pastelaria

Aqui, a cardinalidade é calculada pelo Princípio Multiplicativo, pois a escolha da comida não interfere na escolha da bebida. Seja P o conjunto de lanches distintos na pastelaria, então:

$$n\,(P) = 3 \cdot 3 = 9$$

Portanto, há 9 possibilidades de refeições na pastelaria.

Caso 2: Arthur escolhe lanchar na banca de sanduíches

Também aplicamos o Princípio Multiplicativo. Seja S o conjunto de lanches distintos na banca de sanduíches, então:

$$n\left(S\right) = 2 \cdot 3 = 6$$

Portanto, há 6 possibilidades de refeições na banca.

Agora, como Arthur só vai a **um dos locais**, aplicamos o **Princípio Aditivo** para obter o total de possibilidades:

$$n\left(P\right) + n\left(S\right) = 9 + 6 = 15$$

Portanto, o acontecimento "Arthur fazendo um lanche na praça" pode ocorrer de 15 maneiras diferentes, que pode ser visto na árvore de possibilidades representada na figura 2.

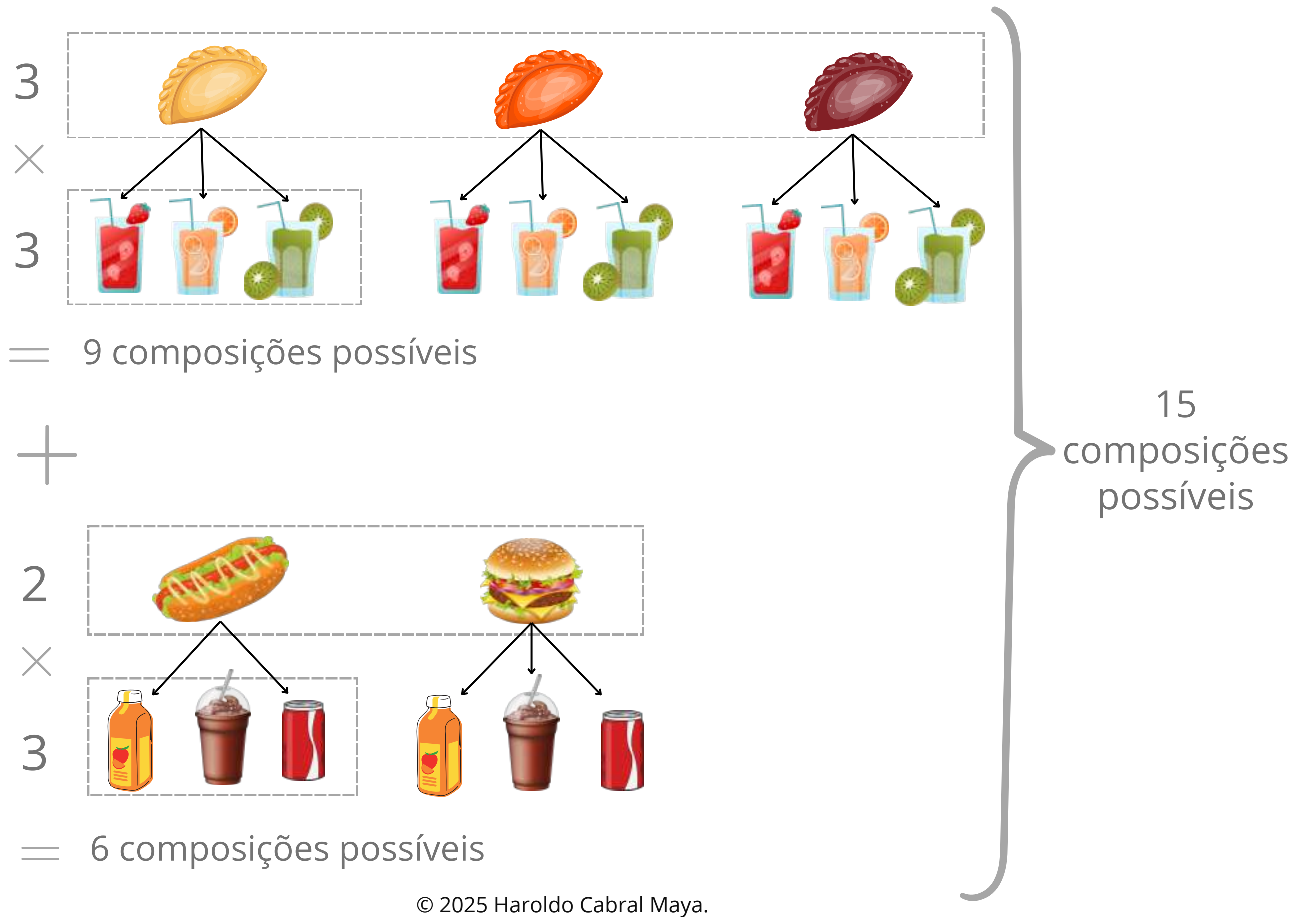


Figura 2: **Árvore de possibilidades representando o acontecimento do exemplo 4.**

AGRUPAMENTOS ORDENÁVEIS

Os princípios da contagem apresentados no tópico anterior são ferramentas fundamentais para determinar o número de resultados possíveis de um acontecimento. No entanto, em muitos problemas, a aplicação direta desses princípios pode se tornar trabalhosa ou pouco eficiente.

Por isso, vamos estudar uma classe especial de problemas de contagem que envolve a organização de elementos de um conjunto em determinada ordem. Situações como a formação de filas com alunos, a disposição de trabalhos em um mural, ou mesmo a montagem de senhas com letras e números são exemplos em que precisamos considerar tanto os elementos envolvidos quanto a ordem em que aparecem. Nesses casos, vamos aplicar os princípios da contagem para deduzir fórmulas que simplificam e agilizam o processo de contagem.

Fatorial

Antes de definirmos arranjos e permutações, que são tipos de agrupamentos que vamos estudar neste material, precisamos entender o conceito de fatorial, pois ele aparece nas fórmulas principais desse estudo.

Definição: O fatorial de um número natural a ,denotado por $a!$, é o produto de todos os inteiros positivos de 1 até a.
Ou seja,

$$\boxed{a! = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}$$

E, por convenção, $0! = 1$.

Exemplos:

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$
- $(10-6)! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $\dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 8 \cdot 7 = 56$

Permutação

Chamamos de permutação toda organização ordenada em que utilizamos todos os elementos disponíveis de um conjunto. A principal característica das permutações é que a ordem importa e todos os elementos participam da organização.
Existem dois tipos principais:

- **Permutação simples**: todos os elementos são distintos.
- **Permutação com repetição**: alguns elementos se repetem, e trocá-los entre si **não gera** novas organizações distintas.

Para descobrir quantas permutações diferentes podem ser feitas, usamos os princípios da contagem, ajustando os cálculos sempre que houver repetições. A seguir, veremos exemplos e fórmulas específicas para cada caso.

- *Permutação Simples*

Na permutação simples, estamos interessados em descobrir de quantas formas podemos ordenar todos os elementos de um conjunto, considerando que todos são distintos e cada elemento aparece uma única vez.
Para compreender como calcular esse tipo de permutação, vamos analisar a seguinte situação:

Três estudantes — Ana, Bruno e Carla — vão se apresentar para a turma. De quantas maneiras diferentes eles podem organizar a ordem das apresentações?

Como temos 3 pessoas e queremos formar todas as ordens possíveis, aplicamos o Princípio Multiplicativo:

- Para a 1ª apresentação, há 3 opções (qualquer um dos três estudantes);
- Para a 2ª apresentação, restam 2 opções;
- Para a 3ª apresentação, sobra apenas 1 estudante.

Assim, o número total de maneiras distintas é:

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras distintas de organizar a apresentação.

Essas são as possíveis ordens:

{ (Ana, Bruno, Carla) , (Ana, Carla, Bruno) , (Bruno, Ana, Carla) ,
(Bruno, Carla, Ana) , (Carla, Ana, Bruno) , (Carla, Bruno, Ana) }

Definição: Considere um conjunto com n elementos distintos. O número total de ordenações diferentes desses elementos, que denominamos de permutação e denotamos como P_n, é dado por:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exemplo 5 - *De quantas formas diferentes podemos ordenar os 5 primeiros livros de uma estante?*

Solução: Como todos os livros são diferentes e queremos todas as possíveis ordens, aplicamos:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Portanto, existem **120 disposições distintas** para organizar esses 5 livros

- *Permutação com Repetição*

Uma permutação com repetição acontece quando alguns elementos do conjunto são idênticos (ou seja, se repetem), e queremos saber de quantas formas diferentes podemos ordená-los, considerando que trocar elementos repetidos entre si não gera uma nova ordem.

Vamos começar com uma situação simples: de quantas formas diferentes podemos organizar as letras da palavra "AME"? Como todas as três letras são distintas, trata-se de uma permutação simples com $3! = 6$ anagramas:

{ AME , AEM , MAE , MEA , EAM , EMA }

Anagrama é uma reorganização das letras de uma palavra ou frase, formando novas palavras ou frases, desde que todas as letras sejam usadas.

Agora, considere a palavra **AMA**, que também possui três letras, mas com **duas letras A**. Se distinguirmos os A's como A_1 e A_2, teremos:

{ A_1MA_2 , A_2MA_1 , MA_1A_2 , MA_2A_1 , A_1A_2M , A_2A_1M }

Embora a contagem inicial também indique **6 permutações**, na prática, algumas são **visualmente idênticas**, pois a troca entre letras A não altera a palavra. Isso significa que só há **3 anagramas distintos**:

{ AMA , MAA , AAM }

Para corrigir essa contagem, devemos **dividir o total de permutações pelo número de maneiras de reorganizar os elementos repetidos entre si**. No caso, as duas letras **A** podem ser organizadas de $2! = 2$ formas que resultam a mesma palavra. Logo, o número de permutações distintas da palavra AMA é:

$$\frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 3 \text{ variações}$$

Por fim, vamos analisar a palavra IRIRI, que tem 5 letras, sendo que:

- A letra I aparece 3 vezes
- A letra R aparece 2 vezes

Se todas fossem diferentes, o número de permutações seria:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Mas como temos repetições, devemos dividir esse total pelas permutações dos elementos repetidos:

- Os 3 I's podem ser permutados entre si de $3! = 6$ formas; e
- Os 2 R's podem ser permutados entre si de $2! = 2$ formas.

Então, o número real de permutações distintas da palavra **IRIRI** é:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = \frac{5 \cdot \cancelto{2}{4}}{\cancelto{1}{2}} = 5 \cdot 2 = 10$$

Assim, existem **10 anagramas distintos** da palavra IRIRI:

{ IRIRI , IRIIR , IRRII , IIRIR , RIRII , IIRRI , RIIRI , IIIRR , RIIIR , RRIII }

Definição: Considere um conjunto com n elementos, dos quais um elemento é repetido r_1 vezes, outro elemento é repetido r_2 vezes, e assim por diante. O número total de ordenações diferentes desses elementos, descontando as suas repetições, que denotamos como $P_n^{r_1, r_2, \cdots, r_n}$, é dado por:

$$\boxed{P_n^{r_1, r_2, \cdots, r_n} = \frac{n!}{r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n}}$$

Exemplo 6 - *Quantos anagramas podemos formar com a palavra AVIVAVA?*

Solução: Trata-se de um problema de permutação com repetição. As letras “A” e “V” se repetem, cada uma 3 vezes e a letra “I” apenas 1. Portanto,

$$P_7^{3,3,1} = \frac{7!}{3! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{6}} = 7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$$

Portanto, há 140 anagramas para a palavra AVIVAVA.

Arranjo Simples

O **arranjo simples** ocorre quando queremos formar agrupamentos ordenados com elementos de um conjunto, **sem permitir repetições**. Ou seja, a **ordem dos elementos importa** e **cada elemento pode ser usado apenas uma vez**.

Para entender, considere o seguinte exemplo:
Uma escola vai escolher os alunos que ocuparão os cargos de presidente, vice-presidente e secretário do grêmio estudantil, entre 10 candidatos. Cada cargo será ocupado por uma pessoa diferente e a ordem indica o cargo (presidente, vice-presidente e secretário) ocupado.

Como a ordem é importante e **nenhum aluno pode ocupar mais de uma posição**, trata-se de um **arranjo simples**. Pelo **Princípio Multiplicativo**, temos:

- 10 opções para o cargo de presidente;
- 9 opções para o cargo de vice-presidente (após a escolha do presidente); e
- 8 opções para o cargo de secretário (após a escolha dos dois primeiros).

Logo, o número total de maneiras diferentes de ocupar os três cargos é:

$$n(A) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Portanto, há **720 configurações distintas** para a organização desses cargos do grêmio ao se selecionar entre 10 alunos.

Definição: Considere um conjunto com n elementos distintos. O número total de sequências ordenadas dos elementos deste conjunto, tomados r a r (com $r \in \mathbb{N}^*$), sem repetições, é denominado arranjo simples, denotado por $A_{n,r}$ e dado por:

$$\boxed{A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Exemplo 7 - *Um professor quer gerar senhas de 3 letras diferentes com as opções A, B, C, D e E. Quantas senhas ele pode gerar?*

Solução: Como não pode repetir letras, temos um problema de **arranjo simples** de 5 elementos tomados 3 a 3:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Portanto, há **60 senhas diferentes** possíveis.

AGRUPAMENTOS NÃO ORDENÁVEIS

Vimos como a Matemática pode nos auxiliar a contar situações em que precisamos considerar a ordem dos elementos, seja organizando todos eles (como nas permutações) ou apenas parte deles (como nos arranjos). Nessas situações, a posição de cada elemento faz diferença no resultado final.

Mas e quando **a ordem não importa**? Em muitos contextos práticos, o que realmente interessa é apenas o conjunto de elementos escolhidos, e não a sequência em que foram selecionados. Pense, por exemplo, na formação de uma equipe com três amigos para um campeonato: não faz diferença quem foi chamado primeiro ou último; **o que importa é apenas quem faz parte da equipe**.

Esse tipo de situação nos leva a estudar os chamados **agrupamentos não ordenáveis**. Para analisá-los, recorremos novamente às ferramentas da Análise Combinatória, agora com foco em um novo conceito: a **combinação**.

Combinação Simples

Uma **combinação** é um tipo de agrupamento em que **a ordem dos elementos não importa**. Ou seja, estamos interessados apenas **nos elementos escolhidos,** não na posição que ocupam no grupo.

Para compreender melhor, pense na seguinte situação:

> *Você e mais 9 colegas estão disputando uma vaga para uma comissão de alunos. Dentre vocês, **serão escolhidos 3 estudantes** para representar a escola. A comissão não tem cargos definidos — todos os três representantes têm a mesma função.*

Nesse caso, **a ordem em que os três alunos são escolhidos não importa**. Ser escolhido primeiro ou por último não muda o resultado: o importante é **quem está no grupo.**

Esse é um exemplo clássico de combinação. Estamos formando grupos com **parte dos elementos de um conjunto,** sem nos preocupar com a ordem.

Agora compare com o que já vimos anteriormente:

- No material anterior, vimos a escolha de presidente, vice-presidente e secretário do grêmio estudantil da escola. A ordem dos nomes representa o cargo ocupado, portanto, (Ana, Bruno, Carla) é diferente de (Carla, Bruno, Ana). Esse tipo de situação é um **arranjo**, assunto que já estudamos na quinzena anterior.
- Por outro lado, se quisermos apenas selecionar 3 representantes, sem definir cargos, a ordem deixa de importar. Nesse caso, temos uma **combinação**.

Vamos começar com um exemplo simples para entender o raciocínio.

Exemplo 8 - *De um grupo de 6 estudantes (Ana, Bruno, Carla, Daniel, Elisa e Fábio) queremos formar* ***um grupo de 3 alunos*** *para participar de um projeto. Quantos grupos diferentes de 3 pessoas podemos formar?*

Solução: Se a ordem importasse, resolveríamos o problema por um arranjo de 6 pessoas tomadas 3 a 3:

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Ou seja, 120 arranjos possíveis.

Mas como **a ordem não importa** (ou seja, o grupo Ana, Bruno e Carla é o mesmo que Ana, Carla e Bruno, que é o mesmo que Bruno, Ana e Carla, etc...), temos repetições. Cada trio está repetindo 3!, pois a quantidade de ordenação possível de 3 elementos é sua permutação. Portanto, devemos dividir o arranjo resultante por 3!. Assim:

$$\frac{120}{3!} = \frac{120}{3 \cdot 2} = \frac{120}{6} = 20$$

Portanto, **há 20 grupos diferentes de 3 pessoas** formados de um grupo de 6 pessoas.

Definição: Considere um conjunto com n elementos distintos. O número total de subconjuntos que podemos formar com r elementos $(r \leq n)$, é chamado de combinação simples, denotado por $C_{n,r}$, e dado por:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Exemplo 9 - *O professor de Educação Física vai organizar um torneio de vôlei entre os alunos da escola. Há 10 alunos interessados e ele precisa escolher 6 jogadores para formar um time titular. Durante a partida, os jogadores rotacionam entre as posições conforme a regra oficial do vôlei, ou seja, todos os escolhidos desempenharão todas as funções em algum momento do jogo. Nesse caso, a ordem de escolha dos jogadores não importa, pois todos participarão igualmente. De quantas formas diferentes o professor pode escolher os 6 jogadores entre os 10 interessados?*

Solução: Trata-se de um problema de **combinação**, pois estamos apenas escolhendo quem vai participar, e a **ordem não altera o resultado**

$$C_{10,6} = \frac{10!}{6! \cdot (10-6)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8} \cdot 7}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}} = \frac{10 \cdot \cancel{9}^{3} \cdot 7}{\cancel{3}^{1}} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

Portanto, o professor pode formar 210 equipes diferentes com 6 jogadores, dentre os interessados.

Exemplo 10 - *Depois da aula, um grupo de 10 alunos resolveu comemorar o aniversário de um colega no pátio da escola. Como de costume, todos decidiram se cumprimentar entre si com um aperto de mão para celebrar a amizade e o momento especial.*
Um dos alunos, curioso com a situação, decidiu usar a matemática para descobrir quantos cumprimentos aconteceram no total. Considerando que cada cumprimento ocorre uma única vez entre dois alunos distintos, e que cumprimentos repetidos ou com a própria pessoa não são contados, quantos cumprimentos foram dados?

Solução: Este é um problema clássico de combinação de 2 a 2 dos 10 alunos, pois estamos formando pares sem se importar com a ordem.

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2! \cdot \cancel{8!}} = \frac{\cancel{10}^{5} \cdot 9}{\cancel{2}^{1}} = 5 \cdot 9 = 45$$

Ocorreram 45 cumprimentos entre os 10 alunos.

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. O modelo antigo de placas no Brasil seguia o formato LLL-NNNN (3 letras e 4 números). Com o modelo Mercosul, passou-se para o formato LLLNLNN (3 letras, 1 número, 1 letra e 2 números intercalados). Considere 26 possibilidades para cada letra (A–Z) e 10 para cada número (0–9), com repetições permitidas.

a) Quantas placas diferentes podem ser formadas em cada modelo?

b) Quantas vezes mais combinações o modelo Mercosul permite em relação ao modelo antigo?

SOLUÇÃO. Como as letras e os números podem se repetir, temos dois arranjos com repetição que são independentes entre si. Portanto, podemos aplicar o princípio multiplicativo entre esses arranjos para calcular o total de possibilidades.
No arranjo das letras, a base da fórmula é 26 (correspondente às 26 letras do alfabeto). No arranjo dos números, a base é 10 (correspondente aos dígitos de 0 a 9).

a) Modelo antigo (LLLNNNN):

- Letras: 26^3 arranjos; e
- Números: 10^4 arranjos.

Total de placas possíveis: $26^3 \cdot 10^4 = 175\,760\,000$.

Modelo novo (LLLNLNN):

- Letras: 26^4 arranjos; e
- Números: 10^3 arranjos.

Total de placas possíveis: $26^4 \cdot 10^3 = 456\,976\,000$.

b) Comparação entre os modelos:

$$\frac{26^4 \cdot 10^3}{26^3 \cdot 10^4} = \frac{26}{10} = 2{,}6$$

Ou seja, o modelo Mercosul permite 2,6 vezes mais combinações que o modelo antigo.

Atividades

ATIVIDADE 1

Durante o intervalo do recreio na escola, Lara e suas amigas decidiram se divertir com um jogo usando 4 cartões numerados de 1 a 4, conforme mostrado abaixo:

A proposta do jogo era formar o maior número possível de números de dois algarismos distintos, utilizando os cartões disponíveis sem repetir algarismos no mesmo número. Vencia a aluna que conseguisse formar e listar todos os agrupamentos possíveis primeiro.

a) Quais são todos os números de dois algarismos diferentes que podem ser formados utilizando os quatro cartões?

b) Qual é o total de agrupamentos diferentes (números de dois algarismos distintos) que podem ser formados?

ATIVIDADE 2

Em uma pastelaria, o cliente pode montar um combo que inclui:

- 1 tipo de recheio (frango, carne, queijo ou palmito)
- 1 bebida (água, suco ou refrigerante)
- 1 molho (ketchup ou maionese)

Para organizar os pedidos de forma eficiente, os funcionários decidiram montar um diagrama de árvore que representasse todas as escolhas possíveis

a) Construa um diagrama de árvore que mostre todas as possibilidades de escolhas contendo um recheio, uma bebida e um molho.

b) Liste todas as possibilidades representadas no diagrama.

c) Quantas escolhas diferentes de combos podem ser montadas?

ATIVIDADE 3

Para celebrar o Dia do Estudante, uma escola preparou uma programação especial com diversas atividades para os alunos. Entre as opções oferecidas, estão modalidades esportivas e jogos de tabuleiro. As modalidades esportivas disponíveis são: **futsal, vôlei, basquete e tênis de mesa**. Já os jogos de tabuleiro incluem: **xadrez, dama e dominó**.

Responda às seguintes situações:

a) Se, ao se inscrever, o aluno for informado de que pode escolher apenas uma atividade, seja um esporte ou um jogo de tabuleiro, de quantas maneiras diferentes essa escolha pode ser feita?

b) Se, ao se inscrever, o aluno for informado de que pode escolher uma modalidade esportiva e um jogo de tabuleiro, de quantas maneiras diferentes esses agrupamentos pode ser feita?

ATIVIDADE 4

Durante a Feira de Matemática da Escola Horizonte, os alunos do 2º ano foram desafiados a criar senhas de segurança para trancar as caixas que continham os prêmios. Essas senhas deveriam ser formadas por números do sistema de numeração decimal, com três algarismos distintos, ou seja, compreendidos entre 100 e 999. Cada grupo de alunos recebeu regras específicas para montar as senhas, utilizando apenas determinados tipos de algarismos (pares, ímpares ou um conjunto fixo).

Com base nesse desafio, responda às seguintes questões:

a) Quantas senhas de três algarismos distintos podem ser formadas utilizando apenas os algarismos 2, 7 e 9?

b) Entre as senhas formadas com os algarismos 2, 7 e 9, quantas são números pares? Liste todas elas.

c) Quantas senhas diferentes de três algarismos distintos podem ser criadas utilizando apenas os algarismos ímpares?

d) Quantas senhas diferentes de três algarismos distintos podem ser criadas utilizando apenas os algarismos pares de 0 a 9?

ATIVIDADE 5

Determine o número de anagramas formados a partir das palavras:

a) FESTA

c) CASA

b) ESCOLA

d) SOCORRO

ATIVIDADE 6

Um anagrama é uma reordenação das letras de uma palavra, podendo ou não formar palavras com sentido. Considerando a palavra BRASIL, que possui 6 letras distintas, responda:

a) Qual é o número total de anagramas que podem ser formados com todas as letras da palavra BRASIL?
b) Quantos desses anagramas começam com a letra B?
c) Quantos anagramas começam com uma vogal?
d) Quantos anagramas começam com as letras BR, juntas e nessa ordem?
e) Quantos anagramas começam com a letra B e terminam com a letra L?
f) Quantos anagramas começam com a letra B ou terminam com a letra L?

ATIVIDADE 7

Em um concurso de redação da escola, 5 alunos foram selecionados para destaque: Alice, Bruno, Carla, Diego e Elisa. A escola quer realizar duas ações com esses alunos:

a) Situação A: Serão escolhidos 3 alunos para receber medalhas de ouro, prata e bronze, de acordo com a classificação no concurso. Quantas maneiras diferentes essa premiação pode ser feita?
b) Situação B: Além da situação A, a escola vai formar uma comissão de 3 alunos (dentre os 5) para representar a turma em um evento. Nesta comissão, todos têm a mesma função. Quantas comissões diferentes podem ser formadas?
c) Explique por que o número de possibilidades é diferente nas duas situações, mesmo escolhendo a mesma quantidade de alunos.

ATIVIDADE 8

Carlos e sua família estavam conhecendo as belezas da região de Pedra Azul, no Espírito Santo. Ao pararem para lanchar e pedirem uma jarra de suco natural, o atendente informou que havia seis sabores diferentes de suco disponíveis, sendo eles: morango, laranja, abacaxi, uva, goiaba e maracujá. O atendente explicou, ainda, que o suco de morango era feito com morangos da própria região de Pedra Azul, já que ela é um dos polos mais importantes do cultivo de morango no Espírito Santo. Carlos e sua família iriam escolher três sabores distintos de suco, servidos em jarras de 1 litro cada, para que toda a família pudesse experimentar os três sabores e mediante a informação do atendente, decidiram que um deles seria de morango. De quantas maneiras distintas, os outros dois sabores de suco poderiam ser escolhidos, já que o primeiro foi o de morango?

ATIVIDADE 9

João, morador da Barra do Jucu, em Vila Velha, pretende passar o final de semana na casa de seu filho, que vive no bairro Serra Sede (Centro), localizado no município da Serra. Para chegar até lá, partindo de sua residência, João irá fazer todo o trajeto de ônibus dividido em três trechos:

- 1º trecho: Da Barra do Jucu até o Terminal de Itaparica (em Vila Velha), há apenas uma opção de linha: 609.
- 2º trecho: Do Terminal de Itaparica até o Terminal de Laranjeiras (na Serra), ele pode escolher entre 11 linhas diferentes: 508, 503, 504, 506, 515, 559, 572, 800, 814, 834 e 857.
- 3º trecho: Do Terminal de Laranjeiras até o bairro Serra Sede (Centro), estão disponíveis 15 linhas diferentes: 815, 816, 817, 818, 819, 821, 833, 849, 852, 854, 858, 881, 884, 885 e 896.

Sabendo que João usará linhas diferentes em cada trecho, de quantas maneiras distintas ele pode completar todo o trajeto?

a) 27

b) 150

c) 160

d) 165

e) 176

ATIVIDADE 10

Um banco oferece aos seus clientes a opção de criar uma senha numérica composta por 4 dígitos distintos, escolhidos entre os algarismos de 0 a 9. Sabendo que os dígitos não podem se repetir, de quantas maneiras diferentes essa senha pode ser formada?

ATIVIDADE 11

(SAEPE - 2019) Uma pizzaria proporciona um serviço em que o cliente pode montar a sua pizza. É possível escolher a massa e um ingrediente de cada um dos 3 grupos, conforme o cardápio representado abaixo.

Tipo de Massa:
- ☐ Comum
- ☐ Integral

Opções:
- ☐ Brócolis
- ☐ Ervilha
- ☐ Milho
- ☐ Ovo
- ☐ Palmito
- ☐ Presunto

Queijos:
- ☐ Muçarela
- ☐ Parmesão
- ☐ Provolone

Carne:
- ☐ Calabresa
- ☐ Carne seca
- ☐ Frango
- ☐ Pepperoni

Sônia planeja comprar uma pizza nessa pizzaria para lanchar com seus filhos. De quantas formas diferentes Sônia pode escolher a massa e os ingredientes para montar a sua pizza?

a) 15

b) 72

c) 144

d) 752

e) 1 365

ATIVIDADE 12

(SAEPE 2016) Os membros de uma banca examinadora escolheram 7 questões de Matemática, 5 questões de Português e 4 questões de Ciências. Desse grupo de questões, eles irão sortear 2 questões de Matemática, 2 de Português e 1 de Ciências para compor uma prova de um concurso. Quantas provas diferentes poderão ser elaboradas para esse concurso?

a) 140

b) 280

c) 560

d) 700

e) 840

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 1

(ENEM 2019) Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão.
A quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir é determinada por:
a) 6.
b) 8.
c) 12.
d) 16.
e) 24.

QUESTÃO 2

(ENEM 2024) Para abrir a porta de uma empresa, cada funcionário deve cadastrar uma senha utilizando um teclado alfanumérico como o representado na figura.

Por exemplo: a tecla que contém o número 2 traz as letras correlacionadas A, B e C. Cada toque nessa tecla mostra, sequencialmente, os seguintes caracteres: 2, A, B e C. Para os próximos toques, essa sequência se repete. As demais teclas funcionam da mesma maneira.

As senhas a serem cadastradas pelos funcionários devem conter 5 caracteres, sendo 2 algarismos distintos seguidos de 3 letras diferentes, nessa ordem. Um funcionário irá cadastrar a sua primeira senha, podendo escolher entre as teclas que apresentam os números 1, 2, 5, 7 e 0 e as respectivas letras correlacionadas, quando houver.

O número de possibilidades diferentes que esse funcionário tem para cadastrar sua senha é:
a) 11 520.
b) 14 400.
c) 18 000.
d) 312 000.
e) 390 000.

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 3

(Enem 2009) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) duas combinações.
e) dois arranjos.

ATIVIDADE 4

(ENEM 2024) Um hospital tem 7 médicos cardiologistas e 6 médicos neurologistas em seu quadro de funcionário. Para executar determinada atividade, a direção desse hospital formará uma equipe com 5 médicos, sendo, pelo menos, 3 cardiologistas.
A expressão numérica que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe é:

$$a)\ \frac{7!}{4!} \times \frac{6!}{4!}$$

$$b)\ \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!}$$

$$c)\ \frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!} + \frac{5!}{1! \times 4!}$$

$$d)\ \left(\frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!}\right) \times \left(\frac{7!}{4! \times 3!} + \frac{6!}{1! \times 5!}\right) \times \left(\frac{7!}{5! \times 2!} + \frac{6!}{0! \times 6!}\right)$$

$$e)\ \left(\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!}\right) + \left(\frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{6!}{1! \times 5!}\right) + \left(\frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{0! \times 6!}\right)$$

CONCEITOS BÁSICOS EM PROBABILIDADE

Quando estamos numa cidade ao nível do mar e colocamos a água para aquecer para fazer nosso café, a que temperatura que ela entra em ebulição? Qual a trajetória que uma bola de vôlei faz ao ser sacada em um jogo? Qual o resultado obtido ao lançar uma moeda honesta e observar sua face superior? Qual o resultado obtido ao lançar um dado honesto e observar o número em sua face superior?

Todas essas perguntas tem um ponto em comum: representam um experimento, algo que pode ser repetido quantas vezes quisermos. No entanto, existe uma diferença entre as perguntas: enquanto as duas primeiras possuem uma resposta fechada, as duas últimas não tem a mesma sorte.

Experimentos como os das duas primeiras perguntas são ditos **experimentos determinísticos**, já os das duas últimas são chamados **experimentos aleatórios**. Nosso interesse daqui para frente se encontra nos experimentos aleatórios, e podemos defini-los da seguinte forma.

Um experimento aleatório é aquele tal que mesmo repetido nas mesmas condições não se pode prever o resultado exato.

No entanto, apesar de o resultado de um experimento aleatório ser imprevisível, é possível determinar cada uma das possibilidades de que ele ocorra.

Chamamos de **espaço amostral (U)** ao conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. O número de elementos de U será indicado por *n(U)*. Vejamos alguns exemplos:

Lançamento de um dado: Ao lançar um dado e observar o número da face voltada para cima não conseguimos prever qual será o resultado, no entanto, sabemos que os resultados só podem ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, assim, U={1, 2, 3, 4, 5, 6} e n(U)=6.

Lançamento de uma moeda: Ao lançar uma moeda e observar a face superior sabemos que os resultados só podem ser cara ou coroa, assim, U={cara, coroa} e n(U)=2.

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de **evento**, e são indicados por letras maiúsculas do alfabeto. No exemplo anterior do lançamento do dado, um evento poderia ser "sair um número par". Vamos chamá-lo de evento A, assim, A={2, 4, 6} e n(A)=3.

Temos cinco tipos de eventos que nos interessam:

1. **Evento impossível:** é o evento representado pelo conjunto vazio, ou seja, nenhum elemento do espaço amostral atende a esse evento;
2. **Evento certo:** este tipo de evento é o próprio espaço amostral;
3. **Evento simples:** é o evento que é representado pelo conjunto unitário;
4. **Eventos mutuamente exclusivos:** são dois eventos tais que os elementos de um não fazem parte do outro e vice-versa;
5. **Eventos complementares:** são dois eventos mutuamente exclusivos, mas que juntos, formam o espaço amostral.

Considere nosso experimento do lançamento de um dado. Vejamos alguns eventos:

1. A: "Sair um número maior do que 6 na face voltada para cima", assim, A={} é um *evento impossível*.
2. B: "Sair um número maior do que zero e menor do que 10 na face voltada para cima", assim, B={1, 2, 3, 4, 5, 6} é um *evento certo*, pois é igual ao espaço amostral.
3. C: "Sair um número par e primo na face voltada para cima", assim, C={2}, um *evento simples*.
4. D: "Sair um número maior do que cinco na face voltada para cima" e E: "sair um número ímpar na face voltada para cima", dessa forma, D={6} e E={1, 3, 5}. D e E não possuem elemento em comum, logo, são chamados de *eventos mutuamente exclusivos*.
5. F: "Sair um número par na face voltada para cima", note que F={2, 4, 6}. Considere o evento E mencionado acima, perceba que E e F não possuem elementos em comum e que se unirmos os dois conjuntos chegamos em U, assim E e F são *eventos complementares*.

Cálculo de Probabilidades

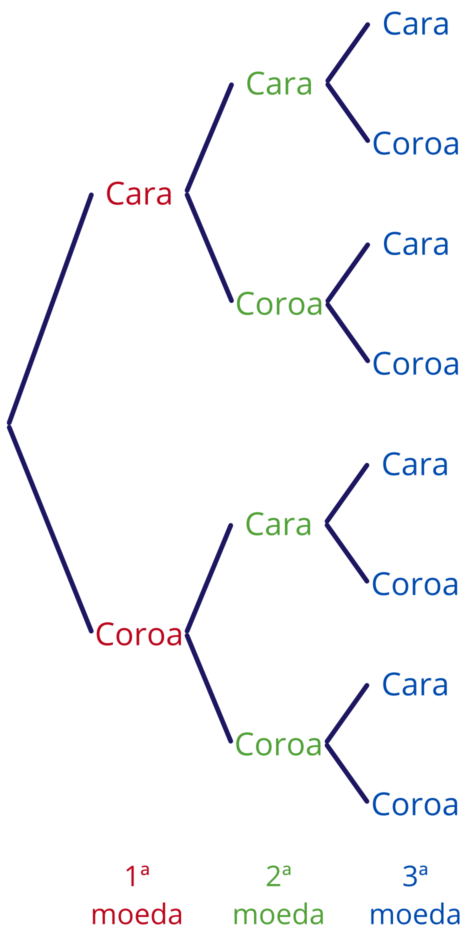
A questão que falta ser respondida é: "Como calcular a probabilidade de um evento acontecer?"

Conhecendo o espaço amostral de um experimento e conseguindo quantificar o evento desejado A, podemos calcular a probabilidade do evento A acontecer da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}.$$

Vejamos, a seguir, algumas situações envolvendo o cálculo de probabilidades.

Considere que uma moeda será lançada 3 vezes e o resultado de cada lançamento (face voltada para cima) será anotado.



Nesse caso, denotando coroa por C e cara por K, temos as seguintes possibilidades de resultado:

CCC, CCK, CKC, KCC, CKK, KCK, KKC e KKK.

Os possíveis resultados dos lançamentos podem ser observados no diagrama ao lado. Portanto, o espaço amostral é:

U={CCC, CCK, CKC, KCC, CKK, KCK, KKC, KKK} e n(U)=8.

Qual a probabilidade de ocorrer exatamente duas coroas?

Neste caso, nosso evento A é "ocorrer exatamente duas coroas no lançamento de três moedas", logo,

A={CCK, CKC, KCC}

e n(A)=3. Desse modo, a probabilidade de ocorrer exatamente duas coroas é

$$P(A) = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%.$$

Considere, agora, que lançaremos dois dados honestos simultaneamente e somaremos os resultados das faces voltadas para cima, assim podemos ter todas as seguintes possibilidades de somas:

Dado 2

Dado 1

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Note que, ao todo, são 36 possibilidades. Agora, vamos determinar a probabilidade de que a soma dos resultados seja 8: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) e (6, 2), cinco possibilidades. Assim, a probabilidade do evento A: "a soma dos resultados seja 8" é

$$P(A) = \frac{5}{36} \approx 0,1389 = 13,89\%.$$

Isto é, a probabilidade de que a soma dos resultados seja 8 é, aproximadamente, igual a 13,89%.

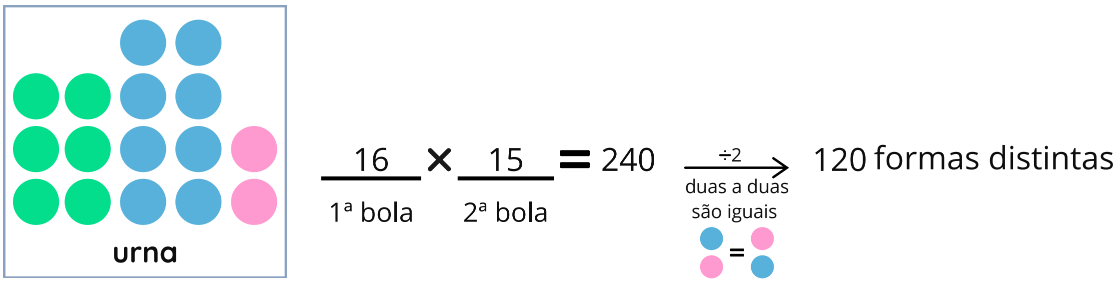
Até agora, nos problemas que resolvemos, conseguimos descrever o espaço amostral e os eventos apenas fazendo uma análise simples. No entanto, nem sempre descrever o espaço amostral e o evento é uma tarefa simples.

Pense no seguinte problema: de uma urna com 16 bolas (6 verdes, 8 azuis e 2 rosas) você deve sortear, uma após a outra sem reposição, duas dessas bolas e observar as suas cores. Qual a probabilidade que as duas bolas selecionadas sejam rosa?

Neste problema, descrever todos os resultados possíveis pode ser um tanto quanto trabalhoso, já que devemos encontrar todos os pares de duas cores. Mas observe algumas coisas:

1. A ordem em que observamos as cores das bolas não interessa no problema, isto é, selecionar uma bola verde e uma azul é o mesmo que selecionar uma bola azul e uma bola verde;
2. De todas as opções de bolas usaremos apenas duas.

Vamos determinar de quantas formas podemos selecionar duas dessas bolas:



Se você se recordar, este é um problema de combinação, portanto existem

$$C_{16,2} = \frac{16!}{2! \cdot (16-2)!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14!}{2 \cdot 1 \cdot 14!} = \frac{240}{2} = 120$$

formas de selecionar 2 bolas dessa urna. Note que existe apenas uma forma de selecionar as duas bolas rosas, já que só existem duas, assim, considerando A como o evento “as duas bolas selecionadas sejam rosa”, temos

$$P(A) = \frac{1}{120}.$$

Como você pode notar, os problemas de probabilidade muitas vezes vão esbarrar em problemas de contagem.

Exercicios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Na caixa de ferramentas de um marceneiro existem 5 tipos diferentes de parafusos:

- 10 parafusos francês;
- 25 parafusos sextavado;
- 40 parafusos para madeira;
- 20 parafusos auto brocante;
- 15 parafusos allen.

Ele precisa de um parafuso sextavado para finalizar uma peça. Tirando aleatoriamente um parafuso de sua caixa, qual é a probabilidade desse parafuso ser sextavado?

a) $\frac{1}{110}$ b) $\frac{1}{25}$ c) $\frac{25}{110}$ d) $\frac{25}{85}$ e) $\frac{110}{25}$

SOLUÇÃO. Inicialmente devemos determinar o evento que desejamos calcular. Vamos chamar de evento A, dado por “retirar um parafuso sextavado da caixa de ferramentas”. Designando por U o espaço amostral, temos que:

$$\begin{cases} n(U) = 10 + 25 + 40 + 20 + 15 = 110 \\ n(A) = 25 \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{25}{110}.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra c.

EXERCÍCIO 2. Ao sortear um número com 4 algarismos, qual a probabilidade de que o número sorteado seja menor do que 5000, divisível por 5 e seja formado apenas pelos números 2, 3, 4 e 5?

SOLUÇÃO. O espaço amostral, U, é o conjunto de todos os número de 4 algarismos, portanto n(U)=9000 (podemos obter esse número pelo princípio fundamental da contagem: o algarismo da unidade de milhar possui 9 possibilidades de escola, exclui-se o 0; para as centenas, dezenas e unidades podemos escolher qualquer um dos 10 algarismo, assim, obtemos 9·10·10·10=9000). O evento que desejamos calcular a probabilidade é A=”número menor do que 5000, divisível por 5 e seja formado apenas pelos números 2, 3, 4 e 5”, vamos determinar n(A):

$$\mathbf{n(A)} = \underset{UM}{\underline{3}} \times \underset{C}{\underline{4}} \times \underset{D}{\underline{4}} \times \underset{U}{\underline{1}} = 48.$$

Exceto o algarismo 5, pois o número deve ser menor do que 5000.

Obrigatoriamente o 5, pois o número deve ser divisível por 5.

Dessa forma,

$$P(A) = \frac{48}{9000} = \frac{2}{375} \approx 0,005 = 0,5\%.$$

EXERCÍCIO 3. Um hospital deverá selecionar 4 dos 12 médicos de sua equipe de cirurgia para compor uma comissão interna. Sabe-se que dos 12 médicos, 7 são mulheres e 5 são homens. Qual a probabilidade de que a comissão formada conte com, ao menos, uma mulher?

SOLUÇÃO. Inicialmente devemos determinar de quantas formas podemos formar uma comissão com 4 membros dentre os 12 elegíveis ($n(U)$):

$$n(U) = C_{12,4} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8!} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495.$$

Para determina a probabilidade de que a comissão tenha, ao menos, uma mulher devemos determinar quantas dessas comissões contam com, ao menos, uma mulher ($n(A)$). Note que temos algumas possibilidades disso acontecer:

A ordem em que escolhemos os médicos não importam, pois será formada a mesma comissão. Portanto, estamos com um problema de combinação. Vamos determinar o número de formas de montar uma comissão com cada uma das configurações acima:

- 1 mulher e 3 homens: $C_{7,1} \cdot C_{5,3} = \dfrac{7!}{1! \cdot 6!} \cdot \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 7 \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 \cdot 2 = 70.$
- 2 mulheres e 2 homens: $C_{7,2} \cdot C_{5,2} = \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \cdot \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 210.$
- 3 mulheres e 1 homem: $C_{7,3} \cdot C_{5,1} = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \dfrac{5!}{1! \cdot 4!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 5 = 7 \cdot 5 \cdot 5 = 175.$
- 4 mulheres: $C_{7,4} = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35.$

Portanto, existem 490 (70+210+175+35) comissões em que pelo menos um dos membros é uma mulher, daí, considerando A: "a comissão formada com, ao menos, uma mulher", obtemos:

$$P(A) = \frac{490}{495} \approx 0,9899 = 98,99\%.$$

OUTRA FORMA: Note que a condição desejada só não é alcançada se a comissão for formada somente por homens, ou seja, devemos escolher 4 dos 5 homens elegíveis:

$$C_{5,4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4!}{4! \cdot 1} = 5 \Rightarrow n(A) = 495 - 5 = 490.$$

Daí,

$$P(A) = \frac{490}{495} \approx 0,9899 = 98,99\%.$$

Atividades

ATIVIDADE 1

Um professor de matemática decidiu realizar um experimento com seus alunos. Ele irá lançar um dado de seis faces e, em seguida, tirar uma carta de um baralho padrão de 52 cartas. Qual é o espaço amostral total desse experimento, considerando todas as combinações possíveis do lançamento do dado e da retirada da carta?

A) 6
B) 52
C) 58
D) 102
E) 312

ATIVIDADE 2

Dados do Censo 2022 produzido pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) mostram que população indígena residente no Espírito Santo é de 14 411 pessoas, das quais 4 663 residem em terras indígenas e 9 748 residem fora de terras indígenas.

Disponível em: https://ijsn.es.gov.br/Media/IJSN/PublicacoesAnexos/S%C3%ADnteses/Censo%202022%20Indigenas.pdf Acesso em: 28 dez. 2024.

Qual é a probabilidade de que, ao escolher ao acaso, um indígena para ser representante de todos em uma solenidade, ele resida em terras indígenas?

A) 0,23
B) 0,32
C) 0,45
D) 0,50
E) 0,62

ATIVIDADE 3

(BONJORNO; GIOVANNI; SOUZA, 2020) Considere um conjunto de dez frutas, em que três estão estragadas. Escolhendo aleatoriamente duas frutas desse conjunto, qual a probabilidade de ambas não estarem estragadas?

A) $\frac{7}{15}$

B) $\frac{7}{45}$

C) $\frac{2}{21}$

D) $\frac{2}{15}$

E) $\frac{1}{10}$

ATIVIDADE 4

Os Jogos Paralímpicos de Paris 2024 foram marcados por um desempenho impressionante de várias nações. Os 10 países que mais conquistaram medalhas foram (em ordem decrescente):

1. China - **220 medalhas** (94 ouros, 76 pratas, 50 bronzes)
2. Grã-Bretanha - **124 medalhas** (49 ouros, 44 pratas, 31 bronzes)
3. Estados Unidos - **105 medalhas** (36 ouros, 42 pratas, 27 bronzes)
4. Holanda - **56 medalhas** (27 ouros, 17 pratas, 12 bronzes)
5. Brasil - **89 medalhas** (25 ouros, 26 pratas, 38 bronzes)
6. Itália - **71 medalhas** (24 ouros, 15 pratas, 32 bronzes)
7. Ucrânia - **82 medalhas** (22 ouros, 28 pratas, 32 bronzes)
8. França - **75 medalhas** (19 ouros, 28 pratas, 28 bronzes)
9. Austrália - **63 medalhas** (18 ouros, 17 pratas, 28 bronzes)
10. Japão - **41 medalhas** (14 ouros, 10 pratas, 17 bronzes)

Disponível em: https://olympics.com/en/paris-2024/paralympic-games/medals.Acesso em: 28 dez. 2024.

No experimento aleatório de selecionar um país entre os dez que mais conquistaram medalhas nas Paralimpíadas de Paris 2024, qual dos seguintes eventos pode ser considerado um evento certo?

A) Selecionar um país que conquistou menos de 10 medalhas de ouro.
B) Selecionar um país que não conquistou medalhas de bronze.
C) Selecionar um país que conquistou exatamente 60 medalhas.
D) Selecionar um país que não participou das Paralimpíadas.
E) Selecionar um país que conquistou mais de 10 medalhas de ouro.

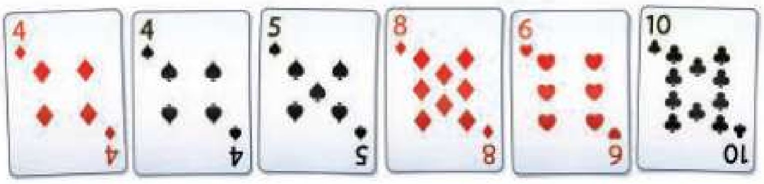
ATIVIDADE 5

Em um experimento aleatório em que se lança uma moeda duas vezes e se anota o resultado de cada lançamento (cara ou coroa), qual é o espaço amostral (S) desse experimento?

A) S = {cara}
B) S = {cara, coroa}
C) S = {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)}
D) S = {(cara, cara), (coroa, coroa), (cara, coroa)}
E) S = {coroa}

ATIVIDADE 6

(Adaptado de DANTE; VIANA, 2020) Existem diversos jogos que utilizam baralhos comuns, de 52 cartas. Em um desses jogos foram selecionadas as 6 cartas apresentadas abaixo: quatro de ouros, quatro de espadas, cinco de espadas, oito de ouros, seis de copas e dez de paus.



Sorteamos, aleatoriamente, uma das 6 cartas. A partir desse experimento aleatório, analise as afirmações abaixo e identifique a alternativa falsa.

A) O espaço amostral desse experimento é composto por 6 elementos.
B) Considerando o evento “sair uma carta de espadas” podemos dizer que ele contém 3 elementos.
C) A probabilidade de ser sorteada uma carta vermelha é de 50%.
D) A probabilidade de ser sorteada a carta 6 de copas é de aproximadamente 0,17.
E) A probabilidade de ser sorteada uma carta de ouros é de aproximadamente 0,33.

ATIVIDADE 7

Em uma empresa, os funcionários trabalham de segunda a sexta-feira, totalizando 5 dias úteis. Em uma semana específica, um funcionário esteve ausente em 2 dias. Qual é a probabilidade de que, ao escolher aleatoriamente, um dia útil dessa semana, esse funcionário esteja presente?

A) 20%.
B) 40%.
C) 60%.
D) 80%.
E) 100%.

ATIVIDADE 8

Numa promoção da lanchonete "Tô com fome", é possível que o cliente, com apenas R$ 6,00, escolha um combo com uma opção de lanche, uma opção de suco e uma opção de doce. O cardápio dessa promoção é composto por:

- Lanches: hambúrguer, crepe, misto quente, pizza e coxinha.
- Sucos: laranja, morango e abacaxi.
- Doces: brigadeiro e cajuzinho.

Decidindo escolher um combo aleatoriamente, qual será a quantidade de possibilidades referentes ao espaço amostral?

ESPAÇOS AMOSTRAIS DISCRETOS E CONTÍNUOS

Na seção anterior, iniciamos o estudo sobre os eventos aleatórios, eventos que, mesmo repetidos sobre as mesmas condições, não é possível prever o resultado. Considere os seguintes experimentos:

1. Número de árvores em uma reserva florestal;
2. Tipo sanguíneo de um habitante escolhido ao acaso;
3. Tempo de vida de uma lâmpada, selecionada ao acaso, dentro de uma casa;
4. Peso de uma criança após 2 meses tomando um certo medicamento;
5. Tempo de espera de um cliente, escolhido ao acaso, em uma fila de banco durante um dia específico, observando a tolerância máxima de 15 minutos.

Podemos determinar o espaço amostral de cada um dos eventos acima:

- Número de árvores em uma reserva florestal:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots\}.$$

- Tipo sanguíneo de um habitante escolhido ao acaso:

$$U = \{A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O-\}.$$

- Tempo de vida de uma lâmpada selecionada ao acaso dentro de uma casa:

$$U = \{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}.$$

- Peso de uma criança após 2 meses tomando um certo medicamento:

$$U = \{p \in \mathbb{R}; p \geq 0\}.$$

- Tempo de espera de um cliente escolhido ao acaso em uma fila de banco durante um dia específico, observando a tolerância máxima de 15 minutos:

$$U = \{t \in \mathbb{R}; 0 < t \leqslant 15\} =]0, 15].$$

O que diferencia os experimentos acima são os tipos de espaço amostral que possuem: enquanto os dois primeiros experimentos possuem espaços amostrais discretos, os dois últimos possuem espaços amostrais contínuos.
Confira a diferença entre os dois tipos de espaços amostrais:

Confira a diferença entre os dois tipos de espaços amostrais:

Espaço Amostral Discreto

O conjunto é finito ou possui infinitos elementos, porém é contável.

ou

Espaço Amostral Contínuo

O conjunto inclui todos os números de um intervalo da reta real

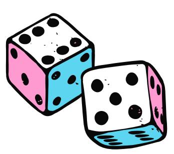
EVENTOS EQUIPROVÁVEIS E NÃO EQUIPROVÁVEIS

Vamos começar com um jogo rápido:

- Inicialmente a turma deve ser dividida em grupos e cada grupo recebe dois dados (pode ser dados digitais acessados pelo QR Code ao lado).
- Cada grupo se divide em 2 times. Cada time escolhe para apostar 3 números, de 0 a 5 no tabuleiro, e os registra na tabela.

Nome dos Participantes	Números Escolhidos

- Decide-se quem começa.
- Na sua vez de jogar, você lança dois dados, calcula a diferença entre os valores obtidos nas faces superiores (em módulo) e registra, no tabuleiro, o respectivo valor.
- O jogo termina após 10 rodadas e o ganhador será aquele que escolheu o número com maior quantidade de espaços registrados com as diferenças.



0										
1										
2										
3										
4										
5										

Ao lançar os dois dados e calcular a diferença entre os números na face superior obtemos o seguinte espaço amostral: U={0, 1, 2, 3, 4, 5}, conforme o esquema abaixo:

Dado 2

Dado 1

Dado 1 \ Dado 2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

A partir destes resultados chegamos que:

$$P('Resultado\ é\ 0') = \frac{6}{36}. \qquad P('Resultado\ é\ 2') = \frac{8}{36}. \qquad P('Resultado\ é\ 4') = \frac{4}{36}.$$

$$P('Resultado\ é\ 1') = \frac{10}{36}. \qquad P('Resultado\ é\ 3') = \frac{6}{36}. \qquad P('Resultado\ é\ 5') = \frac{2}{36}.$$

Note que nem todos os eventos unitários acima tem a mesma probabilidade de ocorrer, portanto, o jogo não é justo para todas as escolhas possíveis. O jogador que escolher o número 1 terá mais chances de ganhar do que o jogador que escolheu o número 5. Estes tipos de eventos são ditos *não equiprováveis*.

Evento Equiprovável

Todos os eventos simples do espaço amostral possuem a mesma probabilidade de ocorrer.

ou

Evento Não Equiprovável

Os eventos simples do espaço amostral possuem probabilidades distintas de ocorrer.

No caso de eventos equiprováveis dizemos que o espaço amostral também é equiprovável, da mesma forma, no caso dos eventos não equiprováveis, dizemos que o espaço amostral também o é.

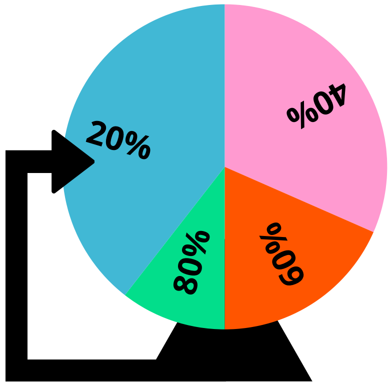
É necessário ter cuidado ao definir os eventos equiprováveis ou não equiprovável, os eventos tratados aqui são apenas os **eventos simples**!

Considere os seguintes experimentos aleatórios:

- Lançar um dado e observar o número da face voltada para cima;
- Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima.

Caso o dados e a moeda sejam honestos, ambos espaços amostrais são equiprováveis, isto é, no primeiro experimento, a probabilidade da face voltada para cima ser o número 2 ou o número 5 é exatamente a mesma. Da mesma forma, a probabilidade de ocorrer cara ou coroa é exatamente a mesma no lançamento da moeda.

Agora considere o seguinte problema: Uma loja, no mês do seu aniversário, fez uma promoção: após a compra o cliente pode girar a roleta (veja o esquema ao lado) e ganhar um desconto na compra. Conforme você pode notar, a faixa (setor circular) relativa ao desconto de 80% é menor do que a faixa do desconto de 60% que, por sua vez é menor do que a faixa de 40% e esta é menor do que a faixa de 20% de desconto.



Portanto, a probabilidade de o cliente ganhar 20% de desconto não é igual à probabilidade dele ganhar qualquer outro desconto, logo, os eventos são não equiprováveis.

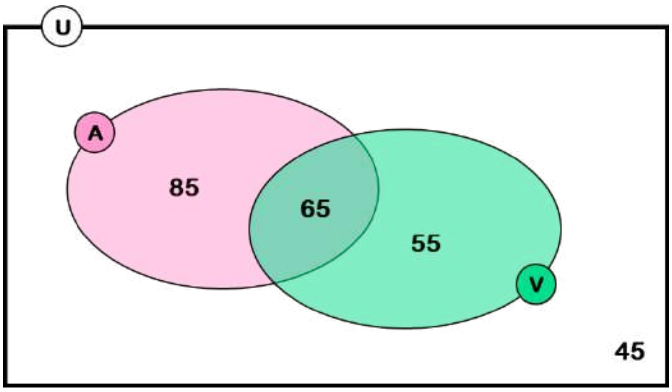
PROBABILIDADE DE UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Considere a seguinte situação: Uma livraria está fazendo uma enquete para averiguar o gosto dos seus leitores, sendo que a cada semana ela promove um “combate” entre dois livros. Os livros escolhidos para esta semana são: O Auto da Compadecida, de Ariano Suassuna, e Vidas Secas, de Graciliano Ramos. Foram entrevistados 250 clientes que passaram pela loja. Depois das entrevistas a livraria divulgou que

- 120 pessoas conheciam a obra Vidas Secas;
- 150 pessoas conheciam a obra O Auto da Compadecida;
- 65 pessoas conheciam as duas obras.

Estamos interessados em responder uma pergunta: quantas pessoas que conhecem O Auto da Compadecida ou Vidas Secas? Bom, poderíamos pensar em somar o número de pessoas que conhecem O Auto da Compadecida e o número de Pessoas que conhecem Vidas Secas, no entanto isso daria 120+150=270, um número maior do que o número de entrevistados. O que estamos esquecendo é que as pessoas que conhecem as duas obras são contadas duas vezes. Portanto, na verdade, devemos retirar 65 de 270: 270-65=205 pessoas. Logo, existem 205 pessoas que conhecem ambas as obras.

O problema pode ser representado num diagrama de Venn, o que facilita a interpretação e, consequentemente, evita cometer erros:

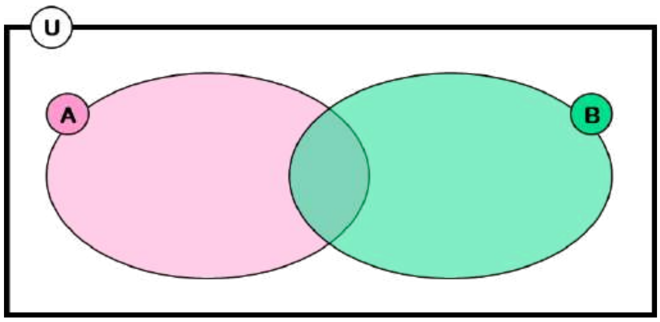


Podemos interpretar o diagrama da seguinte forma: existem 65 pessoas que conhecem ambas as obras ($A \cap V$), assim, existem 120-65=55 pessoas que conhecem apenas Vidas Secas e 150-65=85 pessoas que conhecem apenas O Auto da Compadecida. Além disso, é possível observar que existem 45 pessoas que não conhecem nenhuma das obras, determinado por 250-(85+65+55). Assim, existem 205 pessoas que conhecem O Auto da Compadecida ou Vidas Secas ($A \cup V$).

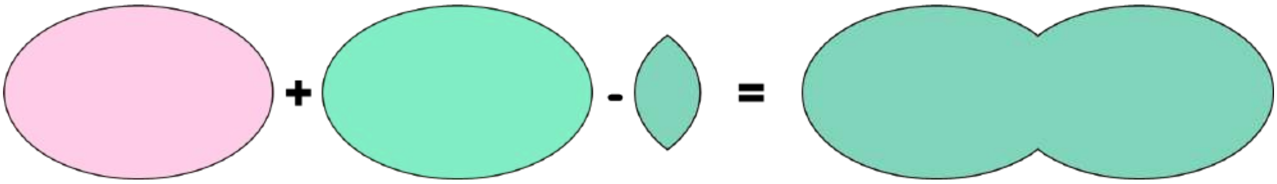
A probabilidade de se selecionar uma pessoa que conhece O Auto da Compadecida ou Vidas Secas é

$$\frac{205}{250} = 0,82 = 82\%.$$

Dados dois conjuntos A e B, subconjuntos de uma espaço U, conforme abaixo:



A união de A e B pode ser observada como:



Que podemos traduzir na seguinte equação:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Logo, considerando A e B como eventos de um espaço amostral U, a probabilidade de A ou B acontecer é

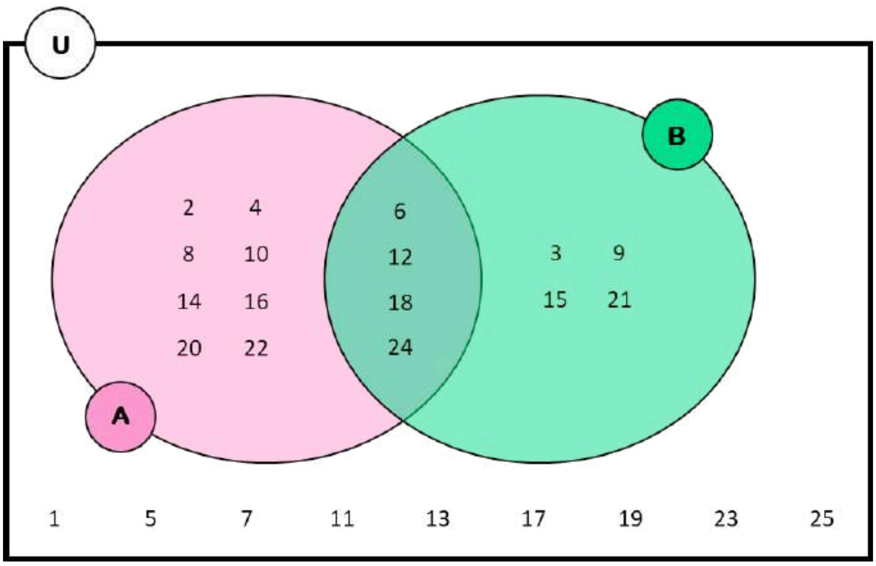
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Considere outra situação: uma urna contem 25 bolas de mesmo tamanho e mesma massa, numeradas de 1 a 25. Suponha que uma delas seja extraída, ao acaso. Qual é a probabilidade de o número da bola sorteada ser múltiplo de 2 ou de 3?

Vamos inicialmente determinar os eventos A: "o número da bola sorteada ser múltiplo de 2" e B: "o número da bola sorteada ser múltiplo de 3":

$$A = \{2, 4, 6, 8, \cdots, 24\} \ e \ B = \{3, 6, 9, \cdots, 24\}$$

E podemos, ainda, representar esses eventos com o diagrama de Venn:



Podemos observar que

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24\}.$$

Portanto,

$$P(A \cup B) = \frac{16}{25} = 0,64 = 64\%.$$

Caso os eventos sejam mutuamente exclusivos, isto é, a interseção dos dois eventos é um conjunto vazio, a probabilidade da união de dois evento é a soma das probabilidades individuais.

Na próxima situação, trazemos um problema com eventos mutuamente exclusivos.

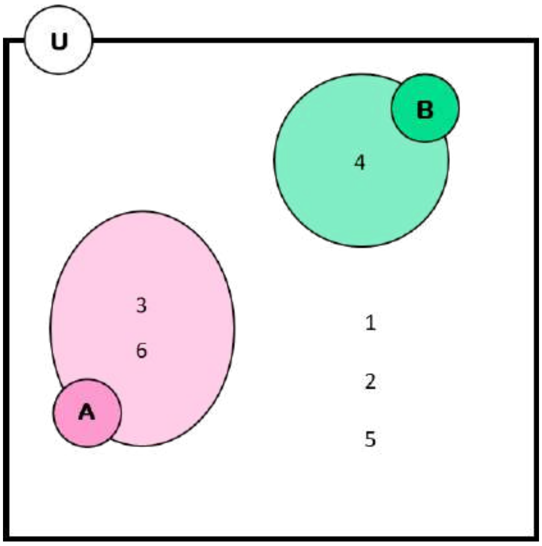
Mais uma situação: Considere que um dado seja lançado e observamos a face voltada para cima, qual a probabilidade de que a face voltada para cima seja um múltiplo de 3 ou de 4?

Defina os eventos *A: "a face voltada para cima é um múltiplo de 3"* e *B: "a face voltada para cima é um múltiplo de 4"*. Assim:

$$A = \{3, 6\}; B = \{4\} \text{ e } A \cup B = \{3, 4, 6\}.$$

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \ P(B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 50\%.$$



Prezado(a) Estudante,

Nesta semana utilizamos o diagrama de Venn para solução de problemas. As vídeo aulas presentes aqui, podendo ser acessadas pelo QR Code ao lado, são uma possibilidade de revisão do conteúdo, caso seja necessário.

EXERCÍCIO 1. Escolhendo-se, ao acaso, um número inteiro de 26 a 175, qual a probabilidade de ser escolhido um número que

a) é múltiplo de 5?

b) é múltiplo de 6?

c) é múltiplo de 5 e de 6?

d) é múltiplo de 5 ou de 6?

SOLUÇÃO. O espaço amostral desse evento é U={26, 27, 28, 29, 30, ... , 174, 175}, portanto n(U)=175-26+1=150. Considere os eventos A e B como sendo "escolhe-se um múltiplo de 5 de 26 a 175" e "escolhe-se um múltiplo de 6 de 26 a 175", respectivamente.

a) O menor múltiplo de 5 em U é 30 e o maior múltiplo de 5 em U é 175, além disso sabemos que 5·6=30 e 5·35=175. Portanto, n(A)=35-6+1=30. Assim

$$P(A) = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%.$$

b) Usando o raciocínio feito na questão anterior, o menor e maior múltiplo de 6 em U são, respectivamente, 30 e 174, além disso 6·5=30 e 6·29=174. Portanto, n(B)=29-5+1=25. Assim,

$$P(B) = \frac{25}{150} = \frac{1}{6} \approx 0,167 = 16,7\%.$$

c) Os múltiplos de 5 e de 6, simultaneamente, são os múltiplos de 30 (mmc(5,6)=30). Usando o raciocínio já visto, temos que o menor e o maior múltiplo de 30 em U são, respectivamente, 30 e 150. Além disso 30·1=30 e 30·5=150, logo, n(A⋂B)=5-1+1=5. Portanto,

$$P(A \cap B) = \frac{5}{150} = \frac{1}{30} \approx 0,033 = 3,3\%.$$

d) Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, portanto

$$P(A \cup B) = 0,2 + 0,167 - 0,033 = 0,334 = 33,4\%.$$

EXERCÍCIO 2. Numa determinada comunidade a probabilidade de se encontrar uma pessoa idosa é igual a 0,42, a probabilidade de se encontrar uma pessoa com diabetes é igual a 0,26 e a probabilidade de se encontrar um idoso diabético é 0,14. Qual a probabilidade de que se encontre, nessa comunidade, uma pessoa idosa ou diabética?

SOLUÇÃO. Considere os eventos A: "encontrar uma pessoa idosa na comunidade" e B: "encontrar uma pessoa diabética na comunidade", assim, obtemos

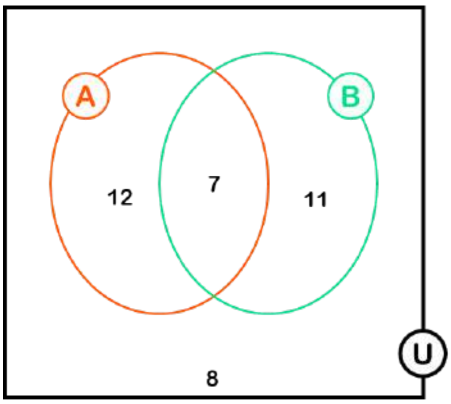
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,42 + 0,26 - 0,14 = 0,54 = 54\%.$$

EXERCÍCIO 3. Marcela pesquisou a preferência de seus colegas de classe em relação aos gêneros musicais MPB e Rock. Dos 38 entrevistados, temos que:

- 18 gostam de MPB;
- 19 de Rock;
- 7 gostam de MPB e Rock;
- 8 não gostam de nenhum dos gêneros.

Ao sortear um desses entrevistados, qual é a probabilidade de que ele goste de rock ou MPB?

SOLUÇÃO. Considere os eventos A: "Sortear um entrevistado que gosta de Rock" e B: "Sortear um entrevistado que gosta de MPB". Inicialmente vamos construir o diagrama de Venn para o problema:



Portanto,

$$P(A \cup B) = \frac{12 + 7 + 11}{38} = \frac{30}{38} \approx 0,789 = 78,9\%.$$

Outra forma: de todos os entrevistados estamos interessados naqueles que gostam de Rock ou MPB, portanto, basta que, do total, eliminemos aqueles que não gostam de nenhum dos dois gêneros:

$$P(A \cap B) = \frac{38 - 8}{38} = \frac{30}{38} \approx 0,789 = 78,9\%.$$

Atividades

ATIVIDADE 1

Analise as afirmações sobre espaços amostrais discretos e contínuos, indicando se cada uma é verdadeira (V) ou falsa (F):

( ) O espaço amostral de um experimento que envolve a contagem do número de chamadas recebidas em um call center em um dia é discreto.

( ) O espaço amostral de um experimento que mede a temperatura em uma cidade ao longo de um dia é discreto.

( ) O espaço amostral de um experimento que consiste em registrar os resultados de um jogo com 52 cartas é composto por um número finito de resultados.

( ) O espaço amostral da velocidade do vento em uma determinada região, medida em metros por segundo, é contínuo.

( ) O espaço amostral da quantidade de pessoas que entram em uma loja em uma hora específica é contínuo.

A sequência correta que representa as afirmações acima é:

A) V, V, V, F, F
B) V, F, V, V, V
C) V, F, V, V, F
D) F, F, V, V, F
E) F, V, F, V, F

ATIVIDADE 2

Em um experimento que envolve o tempo de espera para um ônibus, medido em minutos, e que pode variar de 0 a 30 minutos, o espaço amostral é definido por:

A) U = {1, 2, 3, ..., 30}
B) U = {0, 1, 2, ..., 29}
C) U = {x | x ≥ 0}
D) U = {x | x < 30}
E) U = [0, 30]

ATIVIDADE 3

Em uma urna, há 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 1 bola verde. Uma bola será retirada aleatoriamente e, a partir desse experimento, vamos considerar os seguintes eventos:

- Evento **A**: ser sorteada uma bola vermelha;
- Evento **B**: ser sorteada uma bola azul;
- Evento **C**: ser sorteada uma bola verde.

Agora, analise as afirmações abaixo, referente a esse experimento, e identifique a única verdadeira.

A) Os eventos A, B e C são equiprováveis, pois cada um tem a mesma probabilidade de ocorrer.
B) Os eventos A e B são equiprováveis, mas o evento C não é.
C) Os eventos A, B e C não são equiprováveis, pois têm diferentes probabilidades de ocorrência.
D) Os eventos A e C são equiprováveis, mas o evento B não é.
E) Apenas os eventos B e C são equiprováveis.

ATIVIDADE 4

Em um treinamento sobre logística e produção com 20 funcionários de uma empresa, 15 funcionários estão focados em gestão de cadeia de suprimentos, 10 estão interessados em otimização de processos de produção e 5 funcionários estão envolvidos em ambas as áreas. Se um participante for escolhido aleatoriamente, qual é a probabilidade de que ele esteja focado em gestão de cadeia de suprimentos ou otimização de processos de produção?

A) 0,55
B) 0,75
C) 0,85
D) 0,95
E) 1,00

ATIVIDADE 5

Analise as afirmações a seguir sobre eventos equiprováveis e não equiprováveis.

I - No experimento aleatório “lançamento de uma moeda honesta”, considere os eventos “Sair cara” e “Sair coroa”. Podemos dizer que são eventos equiprováveis, pois ambos os resultados têm a mesma probabilidade de ocorrer (50%).

II - No experimento “retirada de uma carta de um baralho padrão de 52 cartas”, os eventos “sair uma carta preta” e “sair uma carta vermelha” são considerados equiprováveis, já que, dentre as 52 cartas, há 26 cartas de cada uma dessas cores.

III - O evento “lançamento de um dado justo de seis faces” é não equiprovável, pois cada face tem a mesma probabilidade de aparecer, que é dada por .

IV - Os eventos A e B são equiprováveis se ambos têm quantidades diferentes de resultados possíveis em um experimento, independentemente de quantos resultados totais existem.

V - Em um dado justo de seis faces, o evento de obter um número par (2, 4, 6) e o evento de obter um número ímpar (1, 3, 5) são equiprováveis, pois ambos têm a mesma probabilidade de ocorrência.

Assinale a alternativa que contém apenas exemplos corretos.

A) Somente as alternativas I, II e IV estão corretas.
B) Somente as alternativas III e V estão corretas.
C) Somente as alternativas I, II e V estão corretas.
D) Somente as alternativas II, IV e V estão corretas.
E) Todas as alternativas estão corretas.

ATIVIDADE 6

Em uma caixa, foram colocadas 30 bolas numeradas de 1 a 30. Uma delas será retirada ao acaso. Qual é o valor aproximado da probabilidade de que um número escolhido aleatoriamente seja um divisor comum de 15 e 24?

A) 0,066

B) 0,1

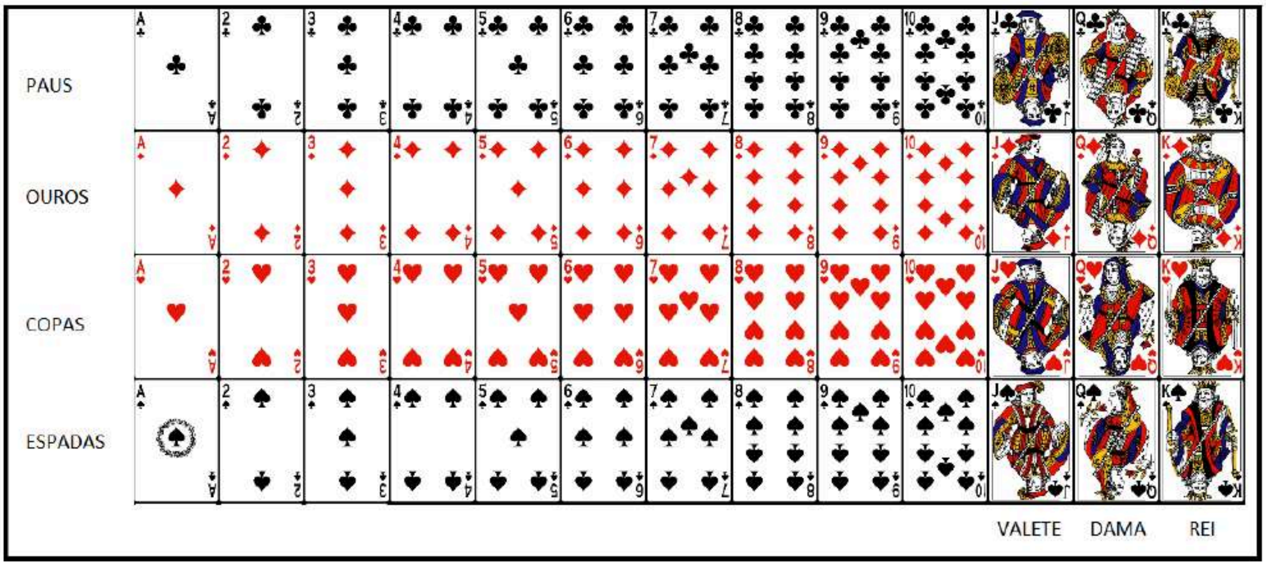
C) 0,166

D) 0,2

E) 0,333

ATIVIDADE 7

Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de que essa carta seja vermelha ou um rei?



Fonte: https://fantasia.fandom.com/pt/wiki/Baralho

ATIVIDADE 8

Na CEEFMTI Professora Maria Penedo, localizada no bairro Itacibá, no município de Cariacica, **100 estudantes** se inscreveram para realizar o ENEM 2025. Esses estudantes têm a opção de utilizar três linhas de ônibus diferentes para chegar ao local da prova:

- 504: Terminal de Itacibá/Terminal de Laranjeiras (Via Reta da Penha)
- 505: Terminal de Itacibá/Terminal de Laranjeiras (Via Camburi)
- 506: Terminal de Itacibá/Terminal de Laranjeiras (Via Maruípe)

Observou-se que **60 estudantes** poderiam pegar a linha 504; **32 estudantes** a linha 505; e **45 estudantes** a linha 506. Além disso, **10 estudantes** poderiam utilizar tanto a linha 504 quanto a linha 505, e **25 estudantes** as linhas 504 e 506 e **8 estudantes** as linhas 505 e 506. Apenas **6 estudantes** poderiam utilizar as três linhas.

Qual é a probabilidade de se escolher um estudante ao acaso e esse estudante poder utilizar as linhas 505 ou 506?

ATIVIDADE 9

Um pesquisador, em colaboração com um dentista, analisou os dentes de crianças em uma escola pública localizada no distrito de Guaraná, em Aracruz (ES). Para ilustrar a pesquisa, foi elaborado um diagrama que permitia observar quais crianças apresentavam cáries e quais consumiam doces (balas, pirulitos, bombons etc.).

		CÁRIES NÃO	CÁRIES SIM	TOTAL
DOCES	NÃO	20	6	26
DOCES	SIM	14	45	59
TOTAL		34	51	

Responda:

A) Escolhendo uma criança aleatoriamente, determine a probabilidade (em porcentagem) dela ter cáries.

B) Escolhendo uma criança aleatoriamente, determine a probabilidade (em porcentagem) dela não ter cáries.

ATIVIDADE 10

Uma empresa fez uma pesquisa para saber a preferência dos usuários em relação a duas operadoras de telefone celular. Dos entrevistados, 73 utilizam a operadora A, 64 a B e 46 as duas operadoras. Sabendo que foram entrevistadas 150 pessoas, qual a probabilidade de, ao se sortear uma, ela ser cliente da operada A, ou da B, ou de ambas?

CÁLCULO DE PROBABILIDADES: PROBABILIDADE CONDICIONAL

Na seção anterior jogamos um jogo da subtração de dados: cada grupo teve de escolher dois números entre 0 e 5, vimos também que as probabilidades de ocorrência dos possíveis resultados não eram equiprováveis, vejamos:

Dado 1 \ Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$P('Resultado\ é\ 0') = \frac{6}{36}. \qquad P('Resultado\ é\ 2') = \frac{8}{36}. \qquad P('Resultado\ é\ 4') = \frac{4}{36}.$$

$$P('Resultado\ é\ 1') = \frac{10}{36}. \qquad P('Resultado\ é\ 3') = \frac{6}{36}. \qquad P('Resultado\ é\ 5') = \frac{2}{36}.$$

Se você tivesse que escolher um número para apostar, o ideal seria apostar no número 1, pois possui a maior probabilidade de vitória. Vamos ver os resultados considerando que no primeiro dado tenha saído o número 4, vejamos quais são os resultados possíveis:

Dado 1 \ Dado 2	1	2	3	4	5	6
4	3	2	1	0	1	2

$$P('Resultado\ é\ 0') = \frac{1}{6}. \qquad P('Resultado\ é\ 2') = \frac{2}{6}. \qquad P('Resultado\ é\ 4') = \frac{0}{6} = 0.$$

$$P('Resultado\ é\ 1') = \frac{2}{6}. \qquad P('Resultado\ é\ 3') = \frac{1}{6}. \qquad P('Resultado\ é\ 5') = \frac{0}{6} = 0.$$

Tivemos agora uma pequena mudança no nosso panorama: agora se você escolher os números 1 ou 2 você tem iguais chances de ganhar, enquanto se escolher os números 4 ou 5 você não tem chance alguma de ganhar. Nessa seção estudaremos esse tipo de situação: a probabilidade condicional.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Observando as fichas clínicas em um consultório oftalmológico, verificou-se que foram atendidos em certo dia 40 pacientes, dos quais 14 têm hipermetropia, 21 têm miopia e 8 têm ambos os problemas de visão.

Em um experimento aleatório equiprovável, a ficha de um dos pacientes será sorteada para que ele responda, por telefone, a um questionário sobre satisfação do atendimento. Qual é a probabilidade de o paciente sorteado ter hipermetropia? E qual a probabilidade de que o paciente possua os dois problemas de visão?

Considere H o evento no qual o paciente sorteado tem hipermetropia e M o evento em que o paciente tem miopia, dessa forma, a probabilidade de o paciente sorteado ter hipermetropia é

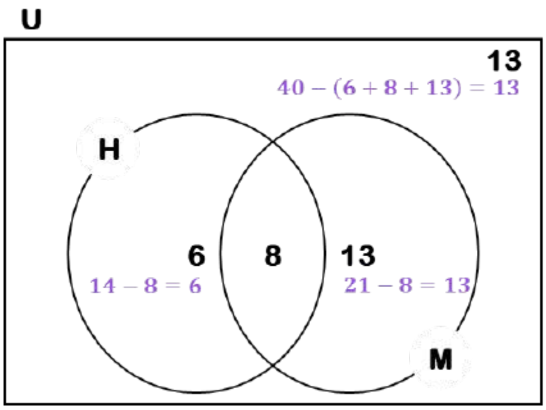
$$P(H) = \frac{14}{40} = \frac{7}{20} = 0,35 = 35\%.$$

Já a probabilidade de que o paciente tenha ambos os problemas de visão é

$$P(H \cap M) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%.$$

Agora considere a seguinte situação: o paciente selecionado tem hipermetropia, qual a probabilidade de que ele tenha, também, miopia?

Para responder a essa questão, construir o diagrama de Venn pode ajudar:



Assim, a probabilidade de que o paciente tenha miopia, sabendo que ele tenha hipermetropia é

$$P(M|H) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \approx 0,57 = 57\%.$$

Probabilidade de o paciente ter miopia (M) dado que (|) ele tenha hipermetropia (H)

Agora observe um detalhe:

$$\frac{P(H \cap M)}{P(H)} = \frac{0,2}{0,35} \approx 0,57 = 57\% = P(M|H).$$

Esse tipo de problema é chamado de probabilidade condicional:

Probabilidade condicional

Sejam A e B eventos de um espaço amostral equiprovável U, finito e não vazio, denominamos de probabilidade condicional de B em relação a A, a probabilidade de que ocorra o evento B dado que o evento A tenha ocorrido. Essa probabilidade, indicada por P(B|A), é dada por

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Os problemas de probabilidade condicional podem ser resolvidos sem o uso da fórmula apresentada acima, como feito no nosso exemplo introdutório.

Vejamos um outro exemplo: um avião fretado por uma operadora turística de Minas Gerais partiu de Belo Horizonte com destino a Natal, no Rio Grande do Norte, com 140 passageiros. Durante o voo, cada turista respondeu a duas perguntas:

- Já voou antes?
- Já esteve em Natal?

Os dados obtidos a partir das respostas dos passageiros encontram-se organizados no quadro seguinte:

	Voando pela primeira vez	Já havia voado antes	Total
Não conhecia Natal	83	22	105
Já conhecia Natal	23	12	35
Total	106	34	140

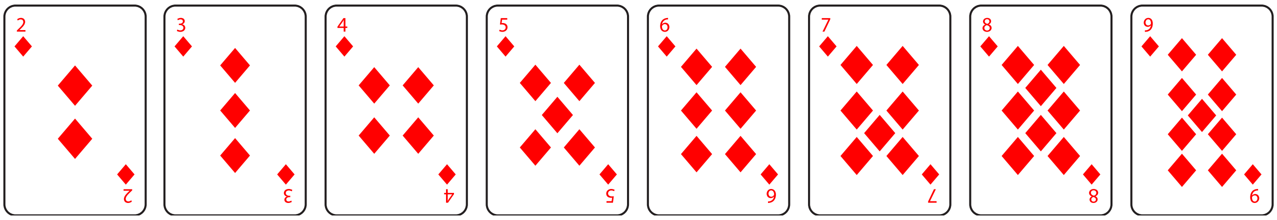
Qual a probabilidade de selecionarmos, ao acaso, um passageiro que já conhecia Natal sabendo que ele estava voando pela primeira vez?

Considere os eventos N: “o passageiro conhece Natal” e V: ”o passageiro está voando pela primeira vez”. Sabemos que o passageiro está voando pela primeira vez, portanto, o espaço amostral não é 140 passageiros, mas sim 106. Sabendo que o passageiro está voando pela primeira vez, devemos determinar quantos desses passageiros já conheciam Natal: 23 passageiros. Assim, probabilidade de selecionarmos, ao acaso, um passageiro que já conhecia Natal sabendo que ele estava voando pela primeira vez é

$$P(N|V) = \frac{23}{106} \approx 0,217 = 21,7\%.$$

Exercicios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. Considere que, de um baralho comum, tenham sido separadas as 9 cartas numéricas de naipe ouros, conforme mostrado abaixo. Essas cartas foram colocadas sobre uma mesa com a face numérica voltada para baixo e, em seguida, embaralhadas. Uma dessas cartas foi retirada ao acaso e verificou-se que o número sorteado era par. Qual é a probabilidade de esse número ser menor do que 7?



SOLUÇÃO. Como sabemos que o número sorteado era par, nosso espaço amostral é redefinido para U={2, 4, 6, 8}. Considere o evento A: “o número sorteado é menor do que 7”, assim, dado que o número é par, A={2, 4, 6}. Portanto,

$$P(A|'número\ é\ par') = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%.$$

EXERCÍCIO 2. Numa determinada comunidade a probabilidade de se encontrar uma pessoa idosa é igual a 0,42, a probabilidade de se encontrar uma pessoa com diabetes é igual a 0,26 e a probabilidade de se encontrar um idoso diabético é 0,14. Qual a probabilidade de que se encontre, nessa comunidade, uma pessoa diabética, sabendo que ela é idosa?

SOLUÇÃO. Considere os eventos A: “encontrar uma pessoa idosa na comunidade” e B: “encontrar uma pessoa diabética na comunidade”, assim, obtemos

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,14}{0,42} \approx 0,333 = 33,3\%.$$

EXERCÍCIO 3. Considere que uma peça seja retirada aleatoriamente de um jogo de dominó comum e completo. Qual é a probabilidade de, ao adicionar os pontos das duas partes dessa peça, a soma ser:

a) igual a 6?

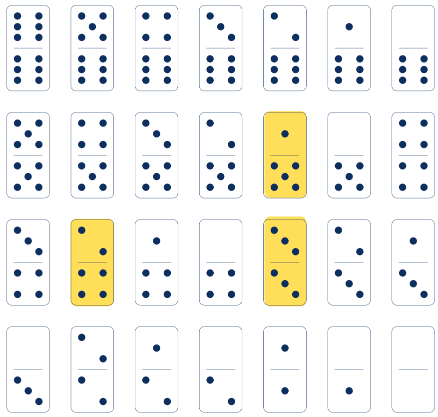
b) igual a 8, sabendo que a peça tem 5 pontos em uma das partes?

c) igual a 6, sabendo que a peça tem uma quantidade ímpar de pontos em, pelo menos, uma das partes?

SOLUÇÃO.

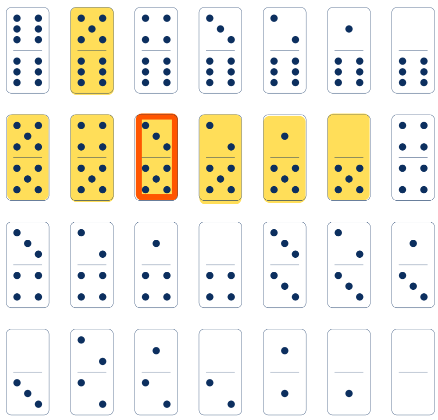
a) Considere o evento A: "a soma dos pontos da peça é 6". Ao lado, temos marcado todas as peças que atendem ao evento. Assim, n(U)=28 e n(A)=4, logo

$$P(A) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7} \approx 0,143 = 14,3\%.$$



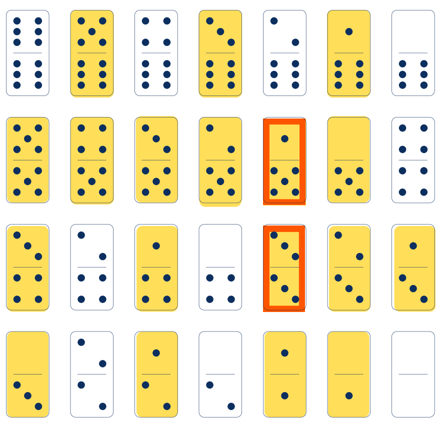
b) Considere o evento A: "a soma dos pontos da peça é 8". No entanto, sabemos que uma das partes da peça possui o número 5, assim o espaço amostral é reduzido e n(U)=7, conforme as peças marcadas ao lado. Das 6 peças marcadas, apenas uma soma 8 (a peça 5|3), logo, n(A)=1, logo

$$P(A) = \frac{1}{7} \approx 0,143 = 14,3\%.$$



c) Considere o evento A: "a soma dos pontos da peça é 6". No entanto, sabemos que a peça tem uma quantidade ímpar de pontos em uma das partes, assim o espaço amostral é reduzido e n(U)=18, conforme as peças marcadas ao lado. Das 18 peças marcadas, apenas duas somam 6, logo, n(A)=2, logo

$$P(A) = \frac{2}{18} \approx 0,111 = 11,1\%.$$



Atividades

ATIVIDADE 1

Um dado é lançado e o número da face voltada para cima é observado. Sabendo que o número observado é um número par, qual é a probabilidade de que esse número seja o 4?

ATIVIDADE 2

Uma empresa multinacional abriu um processo de contratação de funcionários para trabalhar em alguns países. Em uma classificação prévia, foram selecionados 174 homens e 186 mulheres, dos quais:

Funcionários	Falam inglês	Falam mandarim	Falam hindi
Homem	92	35	47
Mulher	101	33	52

Escolhe-se uma pessoa ao acaso. Sabendo que essa pessoa fala hindi, qual é a probabilidade de que seja um homem?

ATIVIDADE 3

Uma loja de cosméticos promoveu um sorteio que consistia em premiar as 100 primeiras pessoas que entrassem na loja durante a semana que antecedia o Natal. Cada uma dessas pessoas ganharia um número (inteiro) para o sorteio, compreendido entre 1 e 100. Qual é a probabilidade de o número sorteado ser par, dado que ele é menor do que 30?

ATIVIDADE 4

Um biólogo monitora 25 tartarugas marinhas, sendo 16 da espécie tartaruga-cabeçuda (*Caretta caretta*) e 9 da espécie tartaruga-de-couro (*Dermochelys coriacea*). Em janeiro de 2025, esse biólogo observou que 6 tartarugas-cabeçudas e 2 tartarugas-de-couro estiveram na praia de Regências, localizada em Linhares-ES, durante o período de desova. Qual é a probabilidade de que uma tartaruga escolhida, aleatoriamente, seja da espécie tartaruga-de-couro (*Dermochelys coriacea*), dado que ela desovou na praia de Regências?

ATIVIDADE 5

A ONU e seus parceiros no Brasil estão trabalhando para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS). Esses objetivos são 17, ambiciosos e interconectados, que abordam os principais desafios de desenvolvimento enfrentados por pessoas no Brasil e no mundo.

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

Fonte: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs

A tabela a seguir destaca a destinação dos recursos provenientes do Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES) para que o Brasil cumpra suas metas relacionadas aos ODS.

Contribuição do BNDES

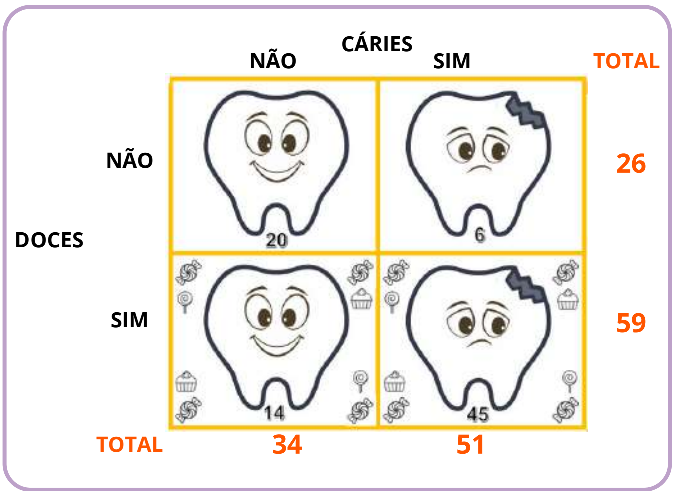
ODS	DESEMBOLSO (R$)
ODS 9	54 354 611 193
ODS 8	38 184 537 622
ODS 7	17 379 929 516
ODS 13	17 218 122 146
ODS 10	13 257 349 232
ODS 2	12 477 002 222
ODS 11	12 347 599 847
ODS 17	12 274 448 754
ODS 1	9 404 084 407
ODS 12	8 943 759 955
ODS 6	3 272 986 410
ODS 3	1 499 250 224
ODS 15	1 341 451 493
ODS 14	921 273 334
ODS 4	299 875 689
ODS 16	223 117 043
ODS 5	12 180 001
TOTAL	203 411 579 088

Fonte: https://bndes.gov.br/wps/portal/site/home/desenvolvimento-sustentavel/compromisso/objetivo1-conteudo (adaptado)

ATIVIDADE 6

Um pesquisador, em colaboração com um dentista, analisou os dentes de crianças em uma escola pública localizada no distrito de Guaraná, em Aracruz (ES).

Para ilustrar a pesquisa, foi elaborado um diagrama que permitia observar quais crianças apresentavam cáries e quais consumiam doces (balas, pirulitos, bombons etc.).



Qual é a probabilidade de que uma criança escolhida ao acaso tenha cáries, dado que ela não consome doces?

A) 0,12 B) 0,23 C) 0,46 D) 0,77 E) 0,98

ATIVIDADE 7

Em uma reserva florestal, existem 700 árvores de espécies nativas e 300 árvores de espécies exóticas, totalizando 1 000 árvores. Sabe-se que 40% das árvores nativas e 10% das árvores exóticas estão em risco de extinção. Qual é, aproximadamente, a probabilidade de uma árvore escolhida aleatoriamente ser nativa, dado que ela está em risco de extinção?

A) 8,30% B) 32,06% C) 65,14% D) 80,25% E) 90,32%

ATIVIDADE 8

Dois dados foram lançados, e os seguintes eventos foram observados:

- **Evento A:** Um dado mostrou o resultado (face para cima) igual a 2.
- **Evento B:** A soma dos pontos nos dois dados é igual a 6.

Dessa forma, o valor de **P(A|B)** é:

A) 3% B) 14% C) 17% D) 20% E) 25%

EVENTOS INDEPENDENTES

Eventos Independentes

Sejam A e B eventos de um espaço amostral equiprovável U, finito e não vazio. Os eventos A e B são independentes se **P(B|A)=P(B)**.

Considere um duplo lançamento de uma moeda honesta. Sejam os eventos: A "obter coroa no primeiro lançamento" e B "obter coroa no segundo lançamento". Vamos verificar os dois eventos: designando Cara por K e Coroa por C, temos o seguinte espaço amostral

U={KK, KC, CK, CC},

daí os eventos A e B são dados por

A={CK, CC} e **B={KC, CC}**

Vamos determinar P(B|A), para isso, devemos assumir que o evento A ocorreu, assim, sabemos que temos um coroa no primeiro lançamento (2 possibilidade), dentre essas duas possibilidades apenas 1 delas possuem coroa no segundo lançamento, ou seja, o evento B ocorre. Portanto,

$$P(B|A) = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%.$$

Agora, note que a probabilidade de ocorrer apenas o evento B também é 50%:

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\% = P(B|A).$$

Logo, os eventos A e B são eventos independentes.
Podemos apresentar uma segunda forma de determinar se dois eventos são ou não independentes:

Eventos Independentes

Sejam A e B eventos de um espaço amostral equiprovável U, finito e não vazio. Os eventos A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Vejamos outros exemplos:

- Considere uma caixa contendo quatro bolas pretas e seis bolas azuis, todas de mesmo tamanho e textura. Escolhendo duas bolas com reposição, qual é a probabilidade de a primeira bola ser preta e a segunda, azul?

Vamos assumir os eventos A "a primeira bola retirada é preta" e B "a segunda bola retirada é azul". Para o problema temos:

U={P, P, P, P, A, A, A, A, A, A}; A={P, P, P, P} e B={A, A, A, A, A, A}

As probabilidades do eventos A e B são

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%;$$

$$P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%.$$

Como as bolas são idênticas, as duas tiragens são independentes, portanto, a probabilidade de a primeira bola ser preta e a segunda, azul, é

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = 0,24 = 24\%.$$

- Caio possui dois despertadores, um deles funciona em 85% das vezes em que é colocado para despertar e o outro funciona em 60% das vezes. Caio tem uma consulta cedo e está preocupado com a hora, portanto ele deve colocar os dois despertadores para despertar. Qual a probabilidade de que os dois relógios despertem na hora certa? Qual a probabilidade de que um ou outro relógio desperte na hora correta?

Primeiramente, chamaremos de eventos A e B o primeiro e o segundo relógios despertarem, respectivamente, assim, P(A)=85%=0,85 e P(B)=60%=0,6. Como os dois eventos são independentes (um despertador não interfere no outro), a probabilidade de que os dois relógios despertem na hora certa é

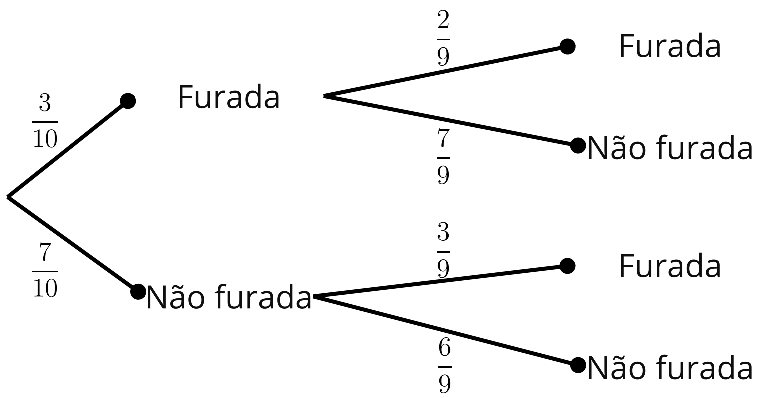
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,85 \cdot 0,60 = 0,51 = 51\%.$$

Já a probabilidade de que um ou outro relógio desperte na hora correta é dado pela probabilidade da união dos dois eventos, como vimos nas semanas anteriores,

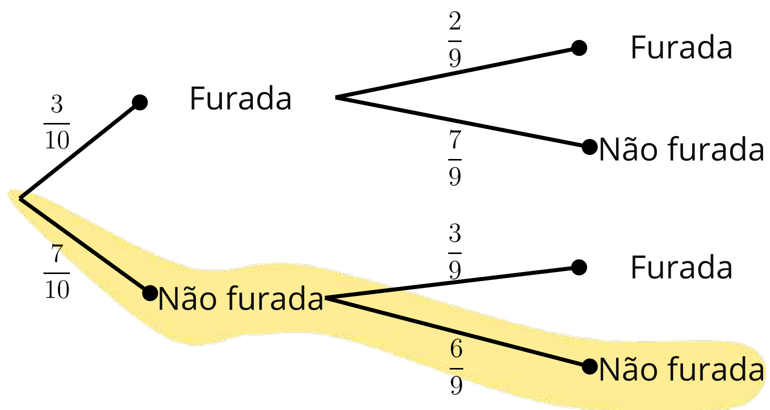
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,85 + 0,60 - 0,51 = 0,94 = 94\%.$$

Uma forma de representar as probabilidades quando temos dois ou mais eventos que ocorrem em sequência (**eventos consecutivos**) é por um diagrama de árvores, vejamos a situação a seguir: *Em um cesto de roupas há dez camisetas, das quais três estão furadas. Duas camisetas são retiradas ao acaso, sucessivamente e sem reposição no cesto. Qual é a probabilidade de que as duas camisetas retiradas não estejam furadas?*

Podemos construir um diagrama de árvore para representar os resultados possíveis desse experimento. Associando probabilidades a cada "galho", note que o segundo galho depende do resultado do primeiro galho, já que não há reposição da camisa selecionada na primeira escolha:



Desejamos encontrar a probabilidade de que as duas camisetas retiradas não estejam furadas, isso ocorre no galho destacado abaixo:



Assim, temos que

$$P('duas\ camisetas\ não\ furadas') = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15} \approx 0,467 = 46,7\%.$$

Exercícios Resolvidos

EXERCÍCIO 1. A probabilidade de um jogador X acertar um alvo é de 80%, e a probabilidade de um jogador Y acertar o mesmo alvo é de 90%. Se os dois jogarem seus dardos uma única vez, simultaneamente, qual é a probabilidade de que:

a) ambos atinjam o alvo?

b) pelo menos um atinja o alvo?

SOLUÇÃO. Considere os eventos X: “jogador X acerta o alvo” e Y: “jogador Y acerta O alvo”.

a) Como os dois jogadores são independentes, os eventos X e Y são independentes, assim,

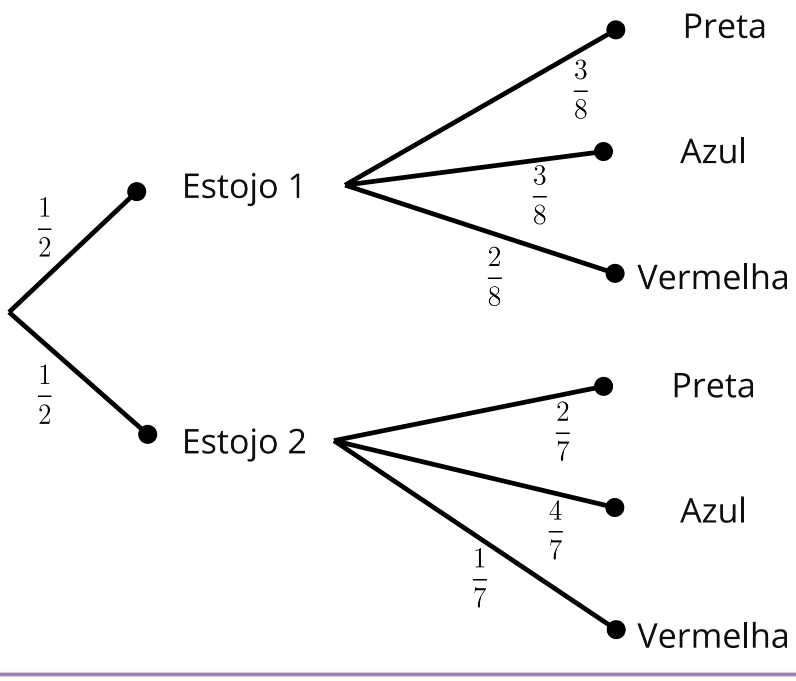
$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72 = 72\%.$$

b) A probabilidade de que pelo menos um atinja o alvo é dado pela união dos eventos X e Y:

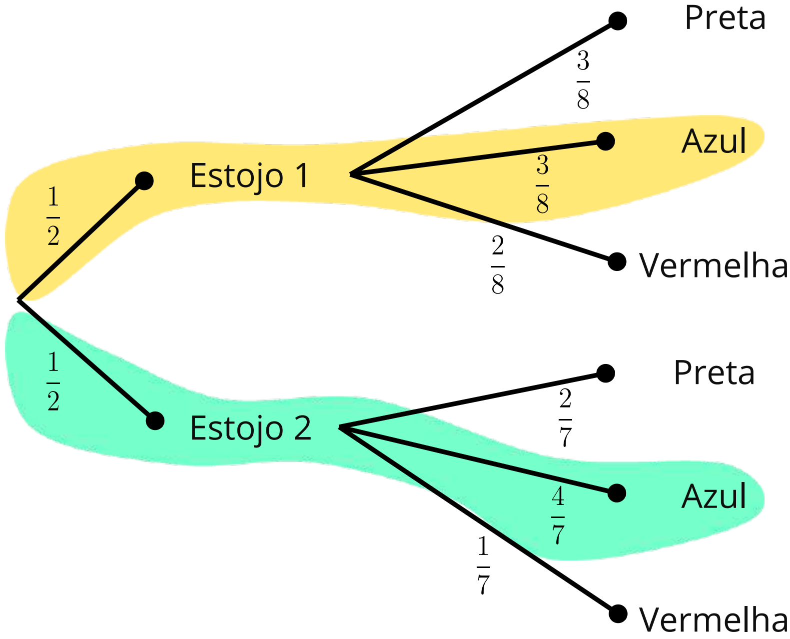
$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0,8 + 0,9 - 0,72 = 0,98 = 98\%.$$

EXERCÍCIO 2. Dois estojos idênticos estão sobre uma mesa. Um deles tem 3 canetas pretas, 2 vermelhas e 3 azuis; o outro tem 2 canetas pretas, 4 azuis e 1 vermelha. Fabrício escolhe ao acaso um estojo e dele extrai, aleatoriamente, uma caneta. Qual é a probabilidade de Fabrício tirar uma caneta azul?

SOLUÇÃO. Para facilitar a compreensão do problema, podemos representar o problema na forma de um diagrama de árvores, com as devidas probabilidades:



Considere o evento A: "tirar uma caneta azul", Fabrício pode fazer isso de duas formas: tirar uma caneta azul do estojo 1 ou tirar uma caneta azul do estojo 2, conforme marcado abaixo



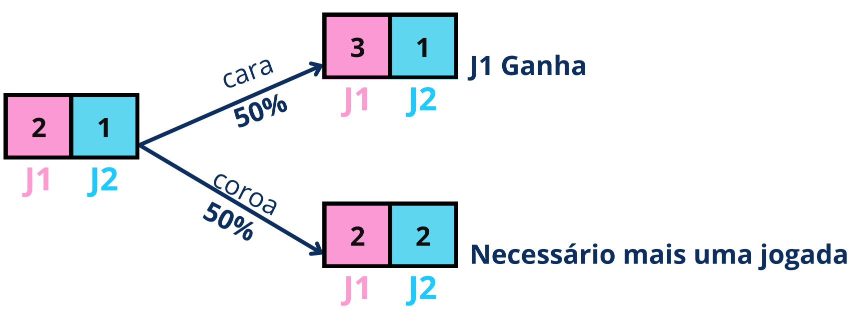
Portanto,

$$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7} = \frac{3}{16}+\frac{4}{14} = \frac{3\cdot 7}{16\cdot 7}+\frac{4\cdot 8}{14\cdot 8} = \frac{21}{112}+\frac{32}{112} = \frac{53}{112} \approx 0,473 = 47,3\%.$$

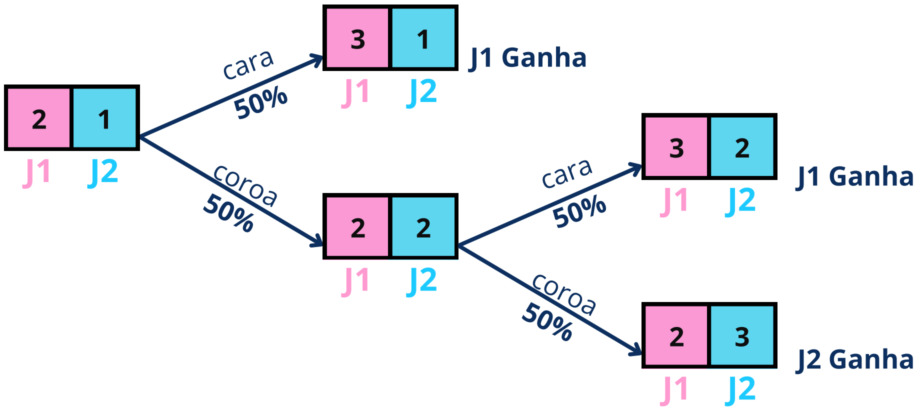
EXERCÍCIO 3. Suponha que dois jogadores tenham apostado uma quantia de dinheiro num jogo de azar (estilo cara ou coroa) a ser dado como encerrado quando um dos jogadores vencer 3 vezes, mas que a partida tenha sido interrompida quando o primeiro jogador estiver vencendo por duas rodadas a uma. Como os jogadores terão que dividir a aposta?

SOLUÇÃO. Para facilitar a compreensão do problema vamos supor que o jogo era um cara ou coroa, o jogador 1 vence caso o resultado seja cara enquanto o jogador 2 ganha se o resultado for coroa.

O jogo foi interrompido quando o placar estava de 2x1 para o jogador 1, vejamos as possibilidades, caso fosse feito mais um lançamento da moeda:



Pode ser necessário mais uma rodada para a definição do jogo, vejamos as possibilidades para o próximo lançamento:



Com mais duas rodadas o ganhador estaria definido, vejamos a probabilidade de cada um dos dois jogadores ganhar:

$$P('J1\ Ganha') = 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,5 + 0,25 = 0,75 = 75\%.$$
$$P('J2\ Ganha') = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 = 25\%.$$

Desta forma, a forma mais justa de dividir o dinheiro apostado entre os dois jogadores é: 75% do dinheiro ficará com o jogador 1 e 25% do dinheiro ficará com o jogador 2.

Atividades

ATIVIDADE 1

Uma pessoa escolhe uma fruta aleatoriamente de uma cesta que contém 5 maçãs, 3 bananas e 2 laranjas. Após devolver a fruta escolhida, ela faz uma nova escolha. A probabilidade de essa pessoa ter escolhido uma maçã na primeira escolha e uma banana na segunda escolha é de:

A) 0,02
B) 0,15
C) 0,30
D) 0,50
E) 1,00

ATIVIDADE 2

Joaquim é um influenciador digital e, em todos os seus vídeos, afirma ser "o cara mais sortudo do mundo", ao ponto de garantir que nunca perdeu em uma brincadeira de par ou ímpar. Certo dia, em um de seus vídeos, ele fez a seguinte aposta:

"Irei lançar esta moeda 10 vezes e, em todas as vezes, sairá cara."

A probabilidade de a afirmação de Joaquim dar certo é de:

A) 0,1%
B) 0,5%
C) 10%
D) 50%
E) 99%

ATIVIDADE 3

Analise as afirmações, indicando se cada uma é verdadeira (V) ou falsa (F):

( ) Pegar uma carta de um baralho e, em seguida, pegar outra carta do mesmo baralho sem reposição são eventos independentes.
( ) A probabilidade de tirar uma carta de copas em um baralho e a probabilidade de jogar um dado e obter um número par são eventos independentes.
( ) Tirar uma bola vermelha de uma caixa e depois tirar uma bola azul da mesma caixa, sem reposição, são eventos independentes.
( ) Tirar uma carta de um baralho e, em seguida, tirar outra carta do mesmo baralho, com reposição, são eventos independentes.
( ) Lançar duas moedas ao mesmo tempo é um exemplo de eventos independentes.

A sequência correta que representa as afirmações acima é:

A) V, F, F, V, V.
B) V, V, F, V, V.
C) V, V, V, F, V.
D) F, V, F, V, V.
E) F, V, F, F, V

ATIVIDADE 4

Numa siderúrgica, três máquinas independentes apresentam um plano de manutenção preventiva de acordo com o quadro de probabilidades de defeito de cada uma.

Máquina	Probabilidade de defeito
X	$\frac{1}{2}$
Y	$\frac{1}{3}$
Z	$\frac{1}{4}$

Qual é a probabilidade das três maquinas apresentarem defeitos?

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{3}{24}$ D) $\frac{2}{12}$ E) $\frac{3}{9}$

ATIVIDADE 5

Nos jogos de RPG (*Role-Playing Game*), os jogadores colaboram para criar narrativas ricas e dinâmicas em um universo imaginário. Cada jogador interpreta um personagem com características únicas, habilidades e histórias pessoais. A interação entre os personagens e as decisões tomadas durante o jogo moldam o desenrolar da trama.

Os dados desempenham um papel importante na mecânica dos RPGs, servindo como ferramentas que influenciam as ações dos personagens e o resultado de eventos. Os dados de RPG são diferentes dos dados tradicionais de jogos de tabuleiro. Um exemplo de dado de RPG é o D20 (20 faces), que se tornou um símbolo do gênero e pode ser usado para diversas ações nas partidas.

Um jogador de RPG está participando de uma campanha que envolve o lançamento de um dado de 12 lados. O dado possui os números de 1 a 12. O jogador fará dois lançamentos consecutivos do dado. Qual é a probabilidade de o jogador obter um número par no primeiro lançamento e um número maior que 8 no segundo lançamento?

A) 43,3% B) 31,5% C) 28,9% D) 22,3% E) 16,7%

ATIVIDADE 6

Numa sala existem 4 homens e 6 mulheres. Uma mosca entra na sala e pousa numa pessoa, ao acaso. Prove que esse evento não é independente.

ATIVIDADE 7

Para que dois eventos de um espaço amostral equiprovável U (finito e não vazio) sejam independentes, é necessário que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Demonstre, por meio dessa relação, que ao retirar, ao acaso, uma carta de um baralho, o evento A (sair uma carta de copas) e o evento B (sair um rei) são independentes.

ATIVIDADE 8

Priscilla está jogando um dado comum de seis faces. Ela deseja saber a probabilidade de obter um número par em três lançamentos consecutivos do dado. Qual é a probabilidade de Priscilla obter um número par no primeiro lançamento, novamente um número par no segundo e, posteriormente, outro número par no terceiro lançamento?

ATIVIDADE 9

Uma fábrica produz lâmpadas LED. Cada lâmpada tem uma probabilidade de 90% de funcionar corretamente. A fábrica realiza um teste em três lâmpadas escolhidas aleatoriamente em um determinado lote para verificar se todas estão funcionando corretamente.

A) Qual é a probabilidade de que todas as três lâmpadas testadas funcionem corretamente?
B) Qual é a probabilidade de que todas as três lâmpadas testadas não funcionem corretamente?
C) Qual é a probabilidade de que duas primeiras lâmpadas testadas funcionem corretamente e a terceira não?

ATIVIDADE 10

O jogo do bafo é uma brincadeira recreativa popular entre colecionadores de figurinhas (ou cartinhas), onde o objetivo é ganhar as figurinhas que ficam viradas para baixo. O nome do jogo vem do deslocamento de ar (bafo) causado ao bater com a mão no monte de figurinhas.
Ana Luiza, Bernardo e Lorenzo estão jogando bafo com suas cartinhas de monstros de bolso, e a regra estabelecida por eles é: “Cada jogador pode bater em uma cartinha 3 vezes. Para ganhar a cartinha, ela precisa virar (desenho para cima) pelo menos duas vezes.”

Qual é a probabilidade de ganhar uma cartinha virando-a **exatamente** duas vezes?

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 1

(ENEM 2015) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

A) $\frac{1}{100}$ B) $\frac{19}{100}$ C) $\frac{20}{100}$ D) $\frac{21}{100}$ E) $\frac{80}{100}$

QUESTÃO 2

(ENEM 2023) Uma empresa com 425 funcionários resolve sortear, numa festa comemorativa, uma bicicleta entre os funcionários que têm filhos. Dos seus 425 funcionários, 68 não têm filhos, 153 têm um filho, 119 têm dois filhos e o restante tem mais de dois filhos. Cartões, com um único número impresso, serão distribuídos a funcionários que têm, pelo menos, um filho. Cada funcionário receberá, no máximo, um desses cartões. A probabilidade de a bicicleta ser sorteada para um funcionário que tenha exatamente dois filhos é

A) $\frac{357}{425}$ B) $\frac{238}{425}$ C) $\frac{119}{425}$ D) $\frac{119}{357}$ E) $\frac{1}{119}$

QUESTÃO 3

(ENEM 2023) No alojamento de uma universidade, há alguns quartos com o padrão superior ao dos demais. Um desses quartos ficou disponível, e muitos estudantes se candidataram para morar no local. Para escolher quem ficará com o quarto, um sorteio será realizado. Para esse sorteio, cartões individuais com os nomes de todos os estudantes inscritos serão depositados em uma urna, sendo que, para cada estudante de primeiro ano, será depositado um único cartão com seu nome; para cada estudante de segundo ano, dois cartões com seu nome; e, para cada estudante de terceiro ano, três cartões com seu nome. Foram inscritos 200 estudantes de primeiro ano, 150 de segundo ano e 100 de terceiro ano. Todos os cartões têm a mesma probabilidade de serem sorteados. Qual a probabilidade de o vencedor do sorteio ser um estudante de terceiro ano?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{3}{8}$

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 4

(ENEM 2017) Um programa de televisão criou um perfil em uma rede social, e a ideia era de que esse perfil fosse sorteado para um dos seguidores, quando esses fossem em número de um milhão. Agora que essa quantidade de seguidores foi atingida, os organizadores perceberam que apenas 80% deles são realmente fãs do programa. Por conta disso, resolveram que todos os seguidores farão um teste, com perguntas objetivas referentes ao programa, e só poderão participar do sorteio aqueles que forem aprovados. Estatísticas revelam que, num teste dessa natureza, a taxa de aprovação é de 90% dos fãs e de 15% dos que não são fãs.

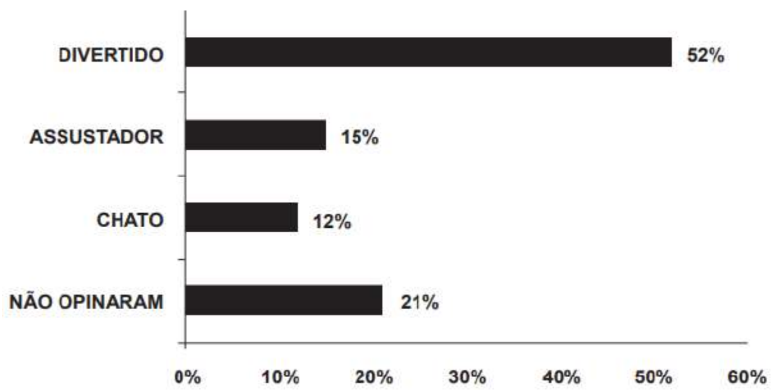
De acordo com essas informações, a razão entre a probabilidade de que um fã seja sorteado e a probabilidade de que o sorteado seja alguém que não é fã do programa é igual a

A) 1. B) 4. C) 6. D) 24. E) 96.

QUESTÃO 5

(ENEM 2012) Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados "Contos de Halloween". Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em: "Divertido", "Assustador" ou "Chato". Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.

Contos de Halloween: opinião dos visitantes



CONEXÃO ENEM

O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem "Contos de Halloween". Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto "Contos de Halloween" é "Chato" é mais aproximada por

A) 0,09.
B) 0,12.
C) 0,14.
D) 0,15.
E) 0,18.

QUESTÃO 6

(ENEM 2013) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{5}{6}$

E) $\frac{5}{14}$

Material Extra

SITE

Portal da Matemática - OBMEP

A seção “O que é probabilidade?” e “Ferramentas básicas” traz vídeos sobre os conteúdos tratados neste material estruturado. Para ter acesso, basta clicar aqui ou via QR-Code (ao lado).

Portal da Matemática - OBMEP

A seção “Noções básicas” traz vídeos sobre os conteúdos tratados neste material estruturado. Para ter acesso, basta clicar aqui ou via QR-Code (ao lado).

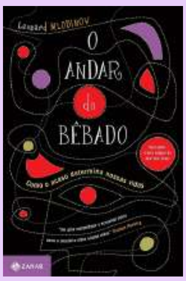
Portal da Matemática - OBMEP

A seção “Probabilidade condicional” traz vídeos sobre os conteúdos tratados neste material estruturado. Para ter acesso, basta clicar aqui ou via QR-Code (ao lado).

LEITURAS

Mais um papel da divisão na Análise Combinatória

Disponível no espaço “Sala de leitura”, o texto apresenta algumas discussões e problemas sobre conceitos de Análise Combinatória. Para ter acesso, basta clicar aqui ou via QR-Code (ao lado).



Em “**O Andar do Bêbado**”, Leonard Mlodinow, apresenta um panorama interessante sobre a aleatoriedade da antiguidade aos dias atuais. Já em “**A Fascinante História da matemática**”, Mickal Launay, no capítulo 15, apresenta uma ideia geral do desenvolvimento da probabilidade.

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo sobre **Contagem** e **Probabilidade**. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?

Reflita sobre sua aprendizagem

- Consegui usar diagramas de árvore para organizar e visualizar as possibilidades em um problema de contagem?
- Sei diferenciar e aplicar os princípios multiplicativo e aditivo em situações diversas?
- Entendo a diferença entre agrupamentos ordenáveis (como arranjos e permutações) e não ordenáveis (combinações)?
- Sou capaz de identificar o espaço amostral e os eventos em um experimento aleatório?
- Sei calcular probabilidades e expressá-las de diferentes formas (fração, decimal, percentual)?
- Consigo analisar eventos dependentes e independentes e aplicar a probabilidade condicional quando necessário?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Diagramas de árvore	○	○	○
Princípios multiplicativo e aditivo	○	○	○
Agrupamentos ordenáveis e não ordenáveis	○	○	○
Espaço amostral e eventos	○	○	○
Cálculo de probabilidades	○	○	○
Probabilidade condicional e eventos independentes	○	○	○

Dica: Revise os tópicos que você marcou como "**preciso revisar**" e converse com seu(sua) professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUZA, Câmara, P. R. **Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade.** Ensino médio. Área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

CABRAL, R. M. P. **Matemática discreta.** 1. ed. Fortaleza: EDUECE, 2017.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos: combinatória, probabilidade.** 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

GOV.BR. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Inep. Provas e Gabaritos**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 25/05/2025.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar 5:** geometria plana. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David Mauro. **Fundamentos de matemática elementar, 5:** combinatória, probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2015 - Exame Nacional do Ensino Médio 2015:** 2º dia. Brasília: INEP, 2015. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/2015_PV_impresso_D2_CD7.pdf. Acesso em: 03 jan. 2025.

Instituto Jones dos Santos Neves. **IJSN Especial Censo Demográfico 2022:** Primeiros Resultados - População Quilombola no Brasil e no Espírito Santo. Vitória, 2024. Disponível em: https://ijsn.es.gov.br/Media/IJSN/PublicacoesAnexos/S%C3%ADnteses/IJSN_Censo_2022-Quilombola.pdf. Acesso em: 28 dez. 2024.

LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. **Discrete mathematics: elementary and beyound.** New York: Springer-Verlag, 2013.

Medals of the Paris 2024 Paralympic Games. **Olympic Games**, 2024. Disponível em: https://olympics.com/en/paris-2024/paralympic-games/medals. Acesso em: 28 dez. 2024.

MORGADO, A. C. O. et all. **Análise combinatória e Probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM. 2006.

SAEPE 2016. Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco - **Revista do Professor – Matemática.** Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2018/PE%20SAEPE%202018%20RP%20MT%20WEB.pdf>. Acessado em 29/06/2025.

SAEPE 2019. Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco - **Revista do Professor de Matemática**. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2018/PE%20SAEPE%202018%20RP%20MT%20WEB.pdf>. Acessado em 29/06/2025.

SCHEINERMAN, E. R. **Mathematics: a discrete introduction.** 3. ed. Boston: Cengage Learning, 2012.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Estatística e probabilidade - Ensino Médio**. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

SEDU 2026

Gerência de Currículo
da Educação Básica

Capítulo 2: Organização de dados, medidas de tendência central e de dispersão

Apresentação

Prezado(a) estudante,

Você já se perguntou como os dados que vemos em reportagens, pesquisas ou nas redes sociais são organizados e interpretados? Em um mundo cada vez mais guiado por informações, saber ler, analisar e representar dados se tornou essencial para compreender a realidade e tomar decisões conscientes.

Neste capítulo, você será convidado(a) a refletir sobre como a Estatística nos ajuda a transformar dados em informações, revelando padrões e diferenças que podem ser observadas em contextos sociais, econômicos, ambientais científicos.

O que você vai estudar neste capítulo

Primeiro, vamos estudar como organizar e representar conjuntos de dados por meio de tabelas e gráficos, reconhecendo elementos essenciais como título, eixos, escalas e legendas, que tornam a comunicação das informações mais clara e precisa. Depois, conheceremos as medidas de tendência central (média, mediana e moda) que ajudam a identificar o valor mais representativo de um conjunto de dados. Em seguida, exploraremos as medidas de dispersão, como amplitude, variância e desvio-padrão, que indicam o quanto os dados variam ou se concentram em torno da média.

Esses conhecimentos permitirão compreender melhor como os dados são usados em diferentes contextos e de que forma podem influenciar nossa leitura crítica do mundo, nossas decisões e até as conclusões que tiramos a partir das informações que recebemos diariamente.

Expectativas de aprendizagem

- Construir e interpretar gráficos de frequências a partir de dados apresentados.
- Determinar média, moda e mediana de conjuntos de dados simples e agrupados.
- Utilizar recursos digitais (como planilhas eletrônicas) para organizar dados, fazer cálculos e representar informações.

- Calcular amplitude, variância e desvio-padrão de conjuntos de dados.
- Relacionar medidas de tendência central (média, mediana e moda) com medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio-padrão).
- Resolver situações-problema que envolvam medidas de tendência central e de dispersão.
- Identificar e interpretar diferentes tipos de gráficos (barras, setores, linhas, histogramas etc.) e seus elementos essenciais (título, eixos, legendas, escalas e unidades).
- Avaliar a consistência entre dados e suas representações gráficas.
- Reconhecer distorções e vieses em gráficos, tabelas ou pesquisas, analisando escalas, intervalos e métodos de coleta.
- Compreender os conceitos de amostra e população, avaliando se uma amostra é representativa e adequada para o contexto estudado.

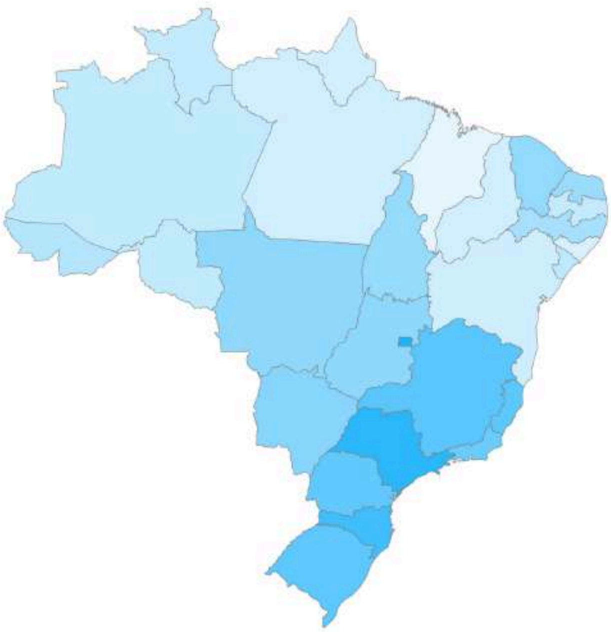
Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

TABELAS E GRÁFICOS DE FREQUÊNCIA

O quadro e os gráficos a seguir foram adaptados do Programa das Nações Unidades para o Desenvolvimento (PNUD) e trazem o resultado do IDHM por estado do Brasil mais o Distrito Federal, juntamente com sua classificação, do ano de 2021:

Unidade da Federação	IDHM	Classificação
Distrito Federal	0.814	Muito alto
São Paulo	0.806	Muito alto
Santa Catarina	0.792	Alto
Minas Gerais	0.774	Alto
Rio Grande do Sul	0.771	Alto
Espírito Santo	0.771	Alto
Paraná	0.769	Alto
Rio de Janeiro	0.762	Alto
Mato Grosso do Sul	0.742	Alto
Goiás	0.737	Alto
Mato Grosso	0.736	Alto
Ceará	0.734	Alto
Tocantins	0.731	Alto
Rio Grande do Norte	0.728	Alto
Pernambuco	0.719	Alto
Acre	0.71	Alto
Sergipe	0.702	Alto
Rondônia	0.7	Alto
Amazonas	0.7	Alto
Roraima	0.699	Médio
Paraíba	0.698	Médio
Bahia	0.691	Médio
Pará	0.69	Médio
Piauí	0.69	Médio
Amapá	0.688	Médio
Alagoas	0.684	Médio
Maranhão	0.676	Médio

IDHM por Unidade da Federação



Classificação do IDHM por Unidade da Federação

Podemos aglomerar as unidades da federação de acordo com a classificação do IDHM, obtendo o seguinte resultado:

- ***IDHM Muito Alto:*** *Distrito Federal e São Paulo*
- ***IDHM Alto:*** *Santa Catarina, Minas Gerais, Rio Grande do Sul, Espírito Santo, Paraná, Rio de Janeiro, Mato Grosso do Sul, Goiás, Mato Grosso, Ceará, Tocantins, Rio Grande do Norte, Pernambuco, Acre, Sergipe, Rondônia, Amazonas*
- ***IDHM Médio:*** *Roraima, Paraíba, Bahia, Pará, Piauí, Amapá, Alagoas, Maranhão.*

Ainda assim a informação está muito ampla, precisamos de uma forma de sintetizá-la melhor, então podemos considerar o número de estados em cada faixa da classificação do IDHM:

- ***IDHM Muito Alto:*** *2*
- ***IDHM Alto:*** *17*
- ***IDHM Médio:*** *8*

O número de estados em cada faixa da classificação do IDHM é o que, em estatística, chamamos de **frequência absoluta**.

Podemos pensar em comparar cada faixa do IDHM em relação ao total, para isso basta calcular a razão entre a frequência absoluta da faixa pelo total de unidades da federação que temos, 27 no caso do Brasil, a esse número damos o nome de **frequência relativa**.

Se fizermos essa comparação em relação ao total obteremos:

- ***IDHM Muito Alto:*** $\frac{2}{27} \cong 0{,}07$
- ***IDHM Alto:*** $\frac{8}{27} \cong 0{,}30$
- ***IDHM Médio:*** $\frac{17}{27} \cong 0{,}63$

Podemos, ainda, organizar essas informações em uma tabela, chamada de tabela de frequências:

Classificação do IDHM	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
Muito alto	2	0,07
Alto	17	0,63
Médio	8	0,30
TOTAL	**27**	**1**

Observe que a soma das frequências relativas sempre resulta em 1.

Formalizando Conceitos

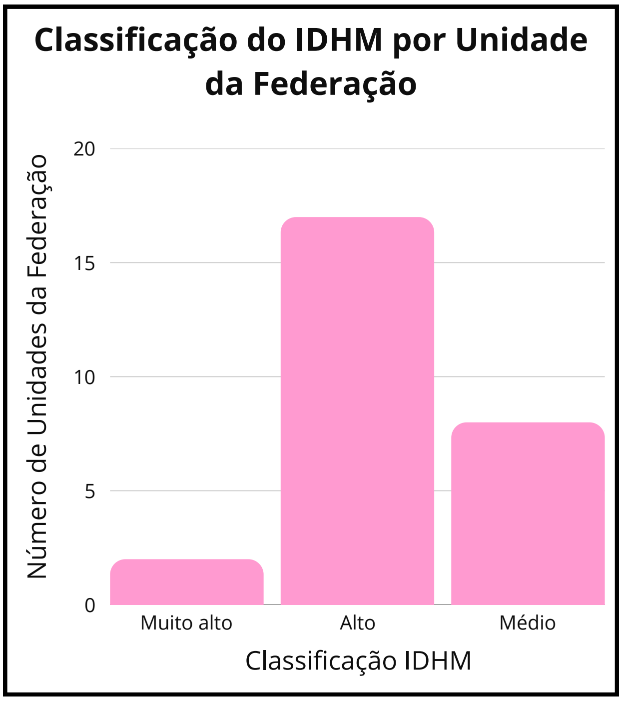
Frequência absoluta: número de vezes que ocorre cada um dos valores da variável em estudo (ou realizações), indicamos por $F_i = n_i$.

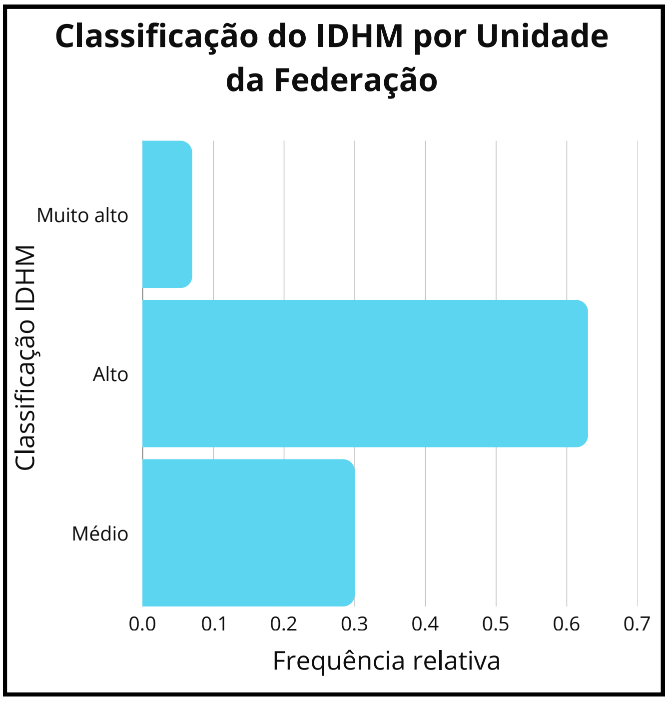
Frequência relativa: razão entre a frequência absoluta e o número total de dados: $f_i = \dfrac{n_i}{n}$. A essa forma de apresentação damos o nome forma decimal.

Como $0 \leq f_i \leq 1$ é comum encontrar a frequência relativa dada em porcentagem, para isso, basta multiplicar a f_i por 100. A essa forma de apresentação damos o nomes de forma percentual.

Gráficos de Frequências

Para representar a frequência absoluta e a frequência relativa de forma gráfica utilizamos, em geral, o gráfico de barras (ou gráfico de colunas). Vamos construir o gráfico de frequências dos nossos dados de IDHM a partir da nossa tabela de frequências acima:





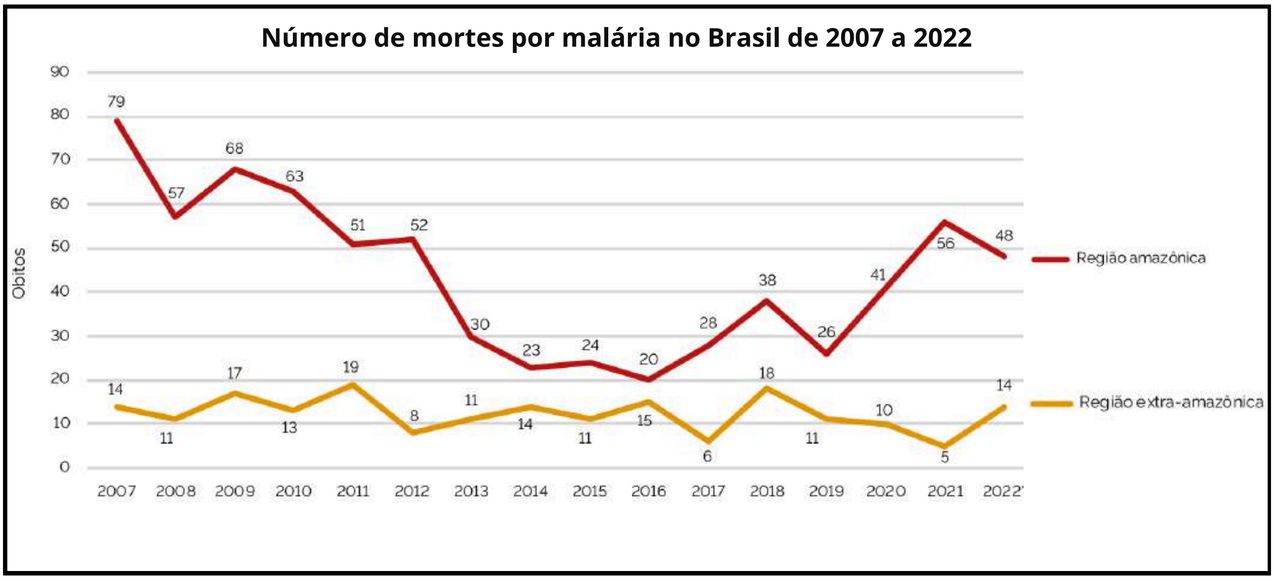
Para representar as frequências absoluta ou relativa uma outra possibilidade é o gráfico de setores. No entanto esse tipo de gráfico demanda de alguns cuidados, listamos alguns casos em que o gráfico de setores pode não ser o mais adequado:

- A variável possui muitas categorias;
- Existem frequências muito baixas ou muito próximas umas das outras;
- A variável for temporal (medida em dia, mês, ano etc.);

Caso a variável seja temporal o gráfico mais adequado é o gráfico de linha, no entanto, gráficos de barras e colunas não prejudicam a visualização.

É possível também fazer o caminho inverso, dado um gráfico de frequências é possível determinar a tabela de frequências, vejamos um exemplo a seguir.

O gráfico abaixo apresenta o número de óbitos por malária na região amazônica e extra-amazônica de 2007 a 2022:



Disponível em: www.gov.br/saude/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/boletins/epidemiologicos/edicoes/2024/boletim-epidemiologico-volume-55-no-01/. Acesso em 23 de Novembro de 2024.

Considerando o período de 2018 a 2022, podemos construir a tabela de frequências abaixo:

Ano	Região amazônica		Região extra-amazônica	
	Frequência absoluta	Frequência relativa (forma percentual)	Frequência absoluta	Frequência relativa (forma percentual)
2018	38	18%	18	31%
2019	26	12%	11	19%
2020	41	20%	10	17%
2021	56	27%	5	9%
2022	48	23%	14	24%
Total	**209**	**100**	**58**	**100**

Mas, como as frequências relativas foram obtidas?

Considere o ano de 2018 na região amazônica, temos, a partir do gráfico, que a frequência absoluta é igual a 38. Considerando os anos de 2018 a 2022 observamos um total de 209 óbitos por malária na região amazônica, portanto

$$frequência\ relativa\ de\ 2018 = \frac{38}{209} \approx 0,18.$$

Para obter este valor em porcentagem basta que multipliquemos ele por 100, assim

$$frequência\ relativa\ de\ 2018 \approx 0,18 \cdot 100 = 18\%$$

Que tal fazer os cálculos de algumas das demais frequências relativas da tabela e verificar como elas foram obtidas?

Até agora, vimos como montar as tabelas de frequência para variáveis medidas de forma discreta ou qualitativa (como a classificação do IDHM, o ano de referência e o artista mais escutado em cada estado). No entanto, nem todas as variáveis de interesse possuem essa natureza. Um exemplo disso é o próprio IDHM, a altura dos estudantes da sua sala, a nota obtida no ENEM, entre outras. Nesse caso, as variáveis assumem valores reais, e não apenas inteiros ou nomes, e isso tem uma consequência: os valores quase nunca se repetem!

Isso dificulta a montagem das tabelas de frequências do modo como vimos aqui. Por isso, precisamos de uma nova ferramenta e ela será vista na próxima semana.

HABILIDADE DA COMPUTAÇÃO

(EM13CO21) Comunicar ideias complexas de forma clara por meio de objetos digitais como mapas conceituais, infográficos, hipertextos e outros.

INFOGRÁFICOS

Ao longo deste material, aprendemos a organizar dados por meio de tabelas, calcular medidas como média, moda e mediana, e representá-los em diferentes tipos de gráficos. Esses recursos são fundamentais para compreender informações de forma clara.

Mas em muitas situações, não basta apresentar os números: é preciso **sintetizar ideias e estabelecer correlações**, comunicando a mensagem central de modo rápido e atrativo. Para isso, utilizamos os infográficos.

O que é um infográfico?

Um infográfico é uma forma de apresentação visual que une **texto curto, números, gráficos, ícones e imagens**. Seu objetivo é transformar dados em uma narrativa clara, permitindo ao leitor compreender o que os números significam e quais relações podem ser percebidas entre eles.

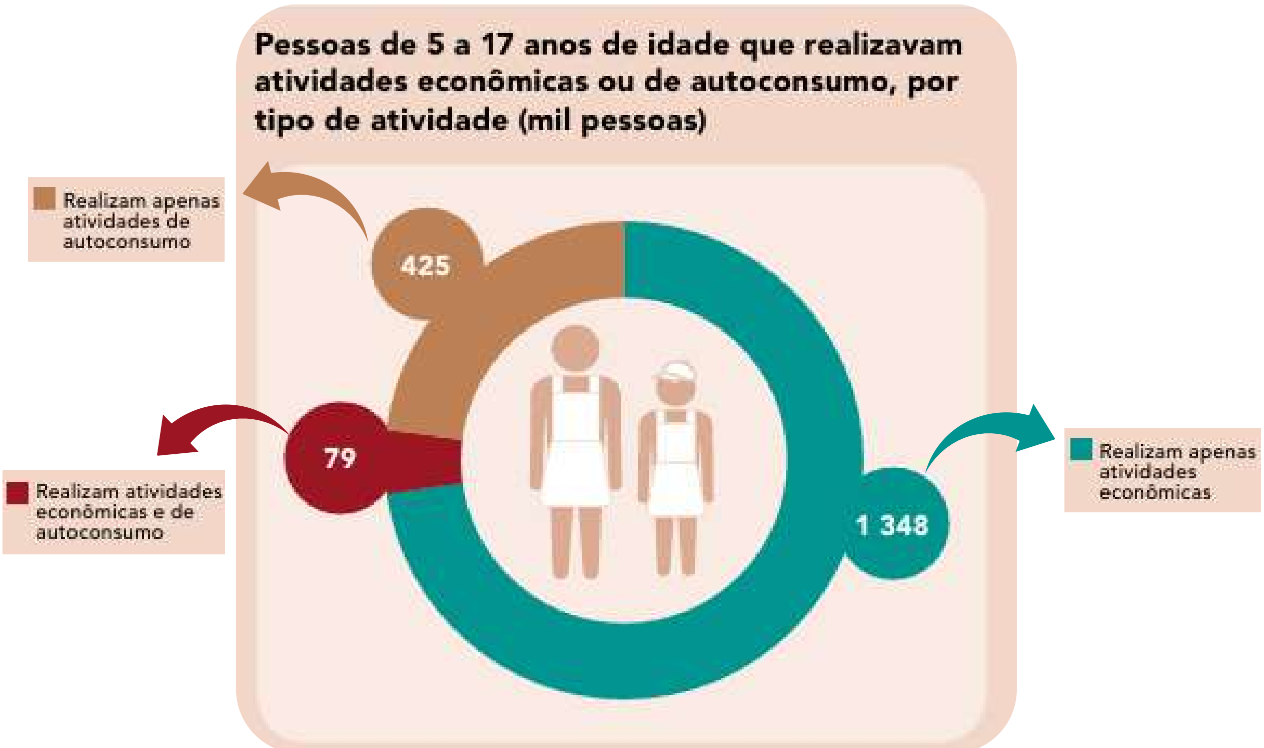
Infográficos do IBGE

Um bom exemplo de uso de infográficos está no material publicado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), órgão responsável pela produção e análise de dados estatísticos no Brasil. O IBGE organiza relatórios temáticos com linguagem acessível, voltados para o público em geral, combinando texto, números e imagens em formatos visuais que facilitam a compreensão.

O material que utilizamos aqui é o informativo Estatísticas do Trabalho Infantil 2023, disponível gratuitamente no site do IBGE. Nesse documento, diversos infográficos são empregados para apresentar dados complexos de forma clara e direta.

A seguir, alguns exemplos extraídos dessa publicação:

- *Quantitativo de pessoas de 5 a 17 anos por tipo de atividade*



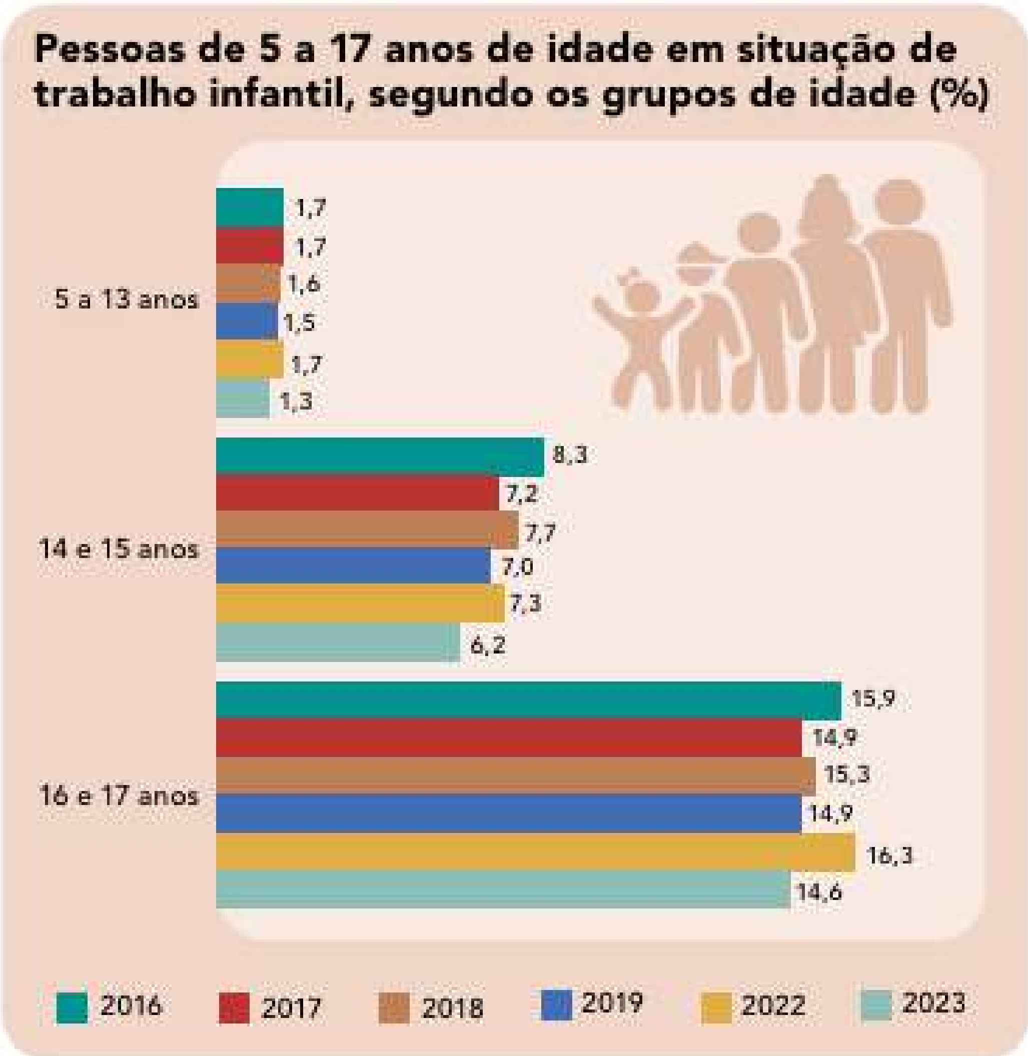
Fonte: IBGE, PNAD Contínua, 2024.

Este infográfico em formato de pizza mostra de forma imediata a proporção entre atividades econômicas e produção para autoconsumo, permitindo ao leitor perceber rapidamente qual grupo é predominante.

Além da disposição das fatias, o uso de cores, ícones e elementos gráficos reforça a estética e facilita a interpretação. Esses recursos visuais transformam o gráfico de pizza em um infográfico completo, tornando a informação mais acessível e atraente.

Dessa forma, o leitor consegue identificar intuitivamente que a maior parte dos jovens realiza atividades econômicas, enquanto uma parcela menor se dedica apenas à produção para o próprio consumo, sem precisar analisar números detalhados.

- *Pessoas de 5 a 17 anos em situação de trabalho infantil, por faixa etária*

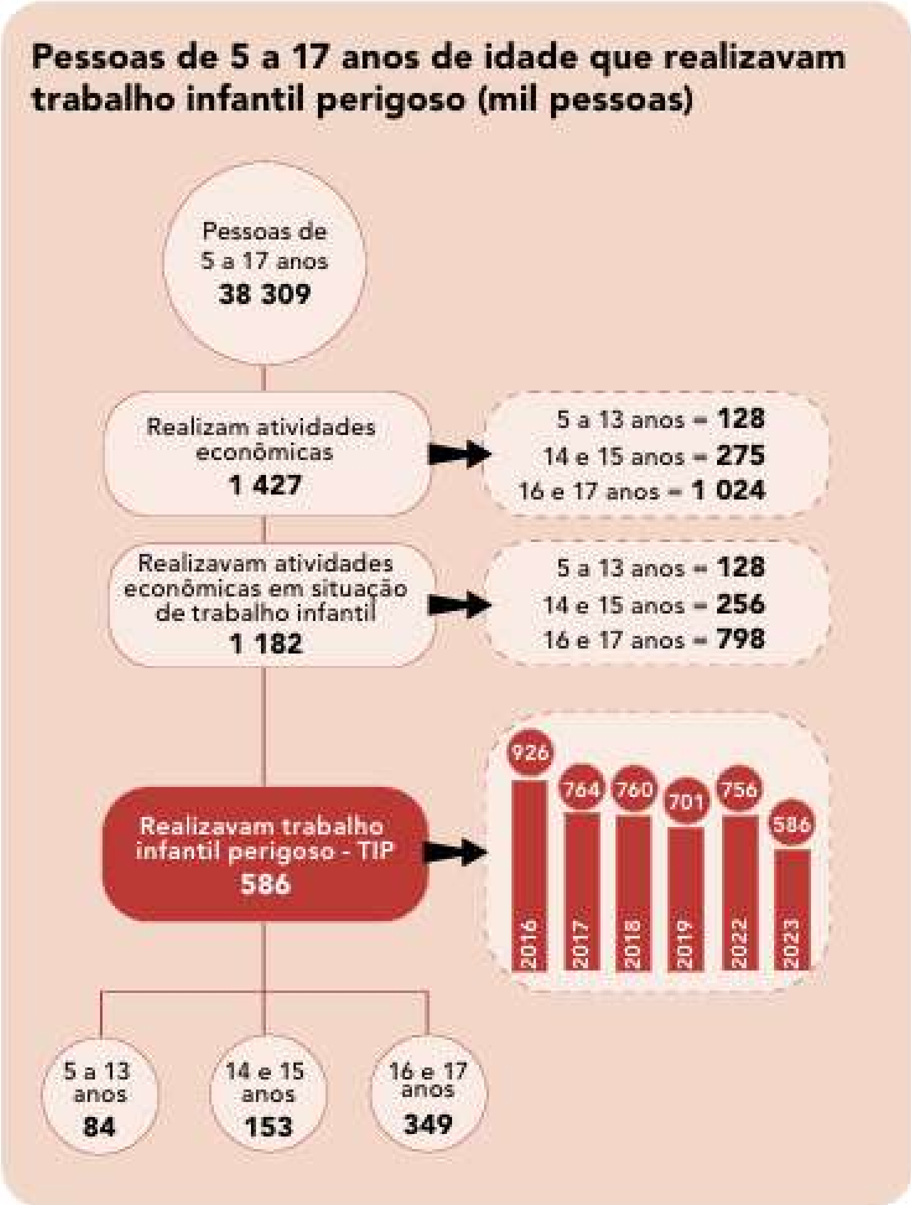


Fonte: IBGE, PNAD Contínua, 2024.

O gráfico de barras verticais destaca diferenças entre faixas etárias e permite acompanhar tendências ao longo do tempo. As barras lado a lado facilitam comparações rápidas entre anos e grupos etários.

A disposição visual permite perceber imediatamente que o trabalho infantil cresce com a idade e, ao mesmo tempo, identificar uma tendência de queda em todas as faixas etárias ao longo dos anos. O infográfico torna claras informações que poderiam passar despercebidas em uma tabela, como a diferença expressiva entre adolescentes mais velhos e crianças menores e a retração gradual dos percentuais nos últimos anos.

- *Pessoas de 5 a 17 anos em trabalho infantil perigoso*



Fonte: IBGE, PNAD Contínua, 2024.

Este infográfico utiliza blocos conectados por linhas e setas, organizando múltiplas informações de forma clara e sequencial. Ele permite visualizar facilmente a evolução do trabalho infantil perigoso e a distribuição dos jovens por faixa etária.

Podemos ver que do total de 38,309 milhões de jovens, 1,427 milhões realizavam atividades econômicas, 1,182 milhões estavam em trabalho infantil e 586 mil em ocupações perigosas (Lista TIP), distribuídos entre 84 mil (5-13 anos), 153 mil (14-15 anos) e 349 mil (16-17 anos). Também mostra a evolução ao longo dos anos: 926 mil em 2016 até 586 mil em 2023, permitindo perceber rapidamente tendências e relações entre os números sem recorrer a tabelas complexas.

Como criar seu próprio infográfico no Canva

Todos os alunos, professores e profissionais da educação vinculados à SEDU têm acesso gratuito a uma conta educacional no Canva, com as mesmas funcionalidades da versão Pro. Para utilizar, basta acessar com o e-mail institucional.

Passo a passo

1 Acesse o Canva

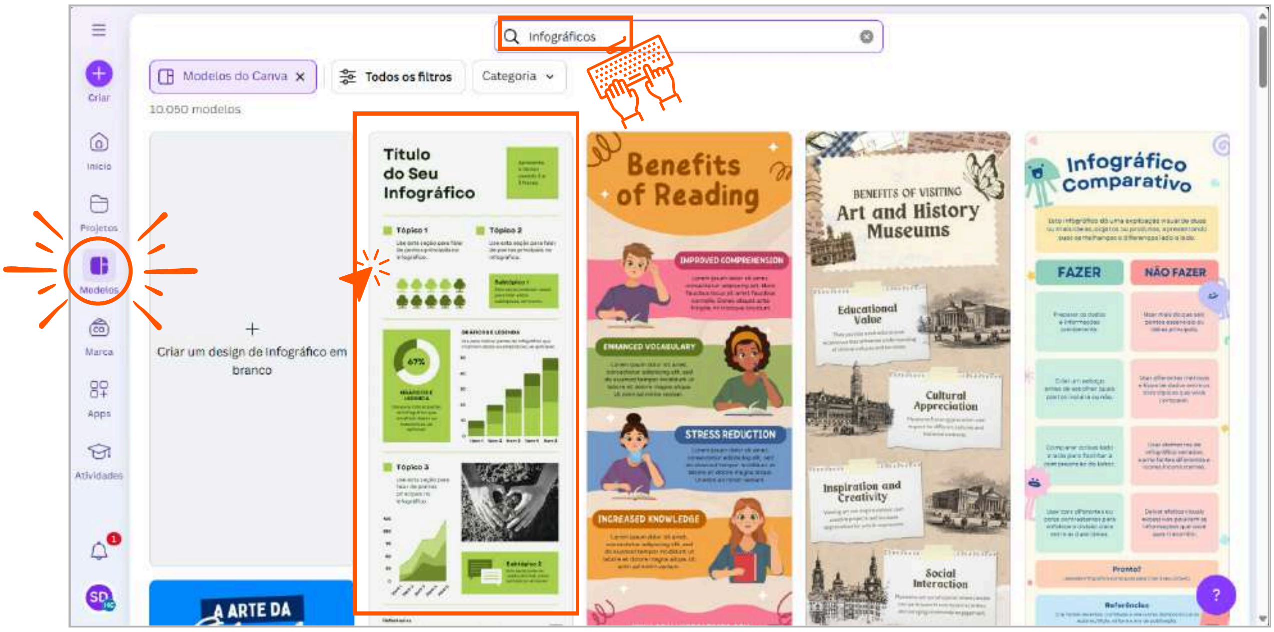
- Entre em www.canva.com e faça login com seu e-mail institucional.

2 Escolha um modelo

- Clique em "Modelos", no menu lateral esquerdo.
- Na barra de busca, digite "infográfico";
- Explore os modelos prontos e escolha um que se aproxime da sua ideia.

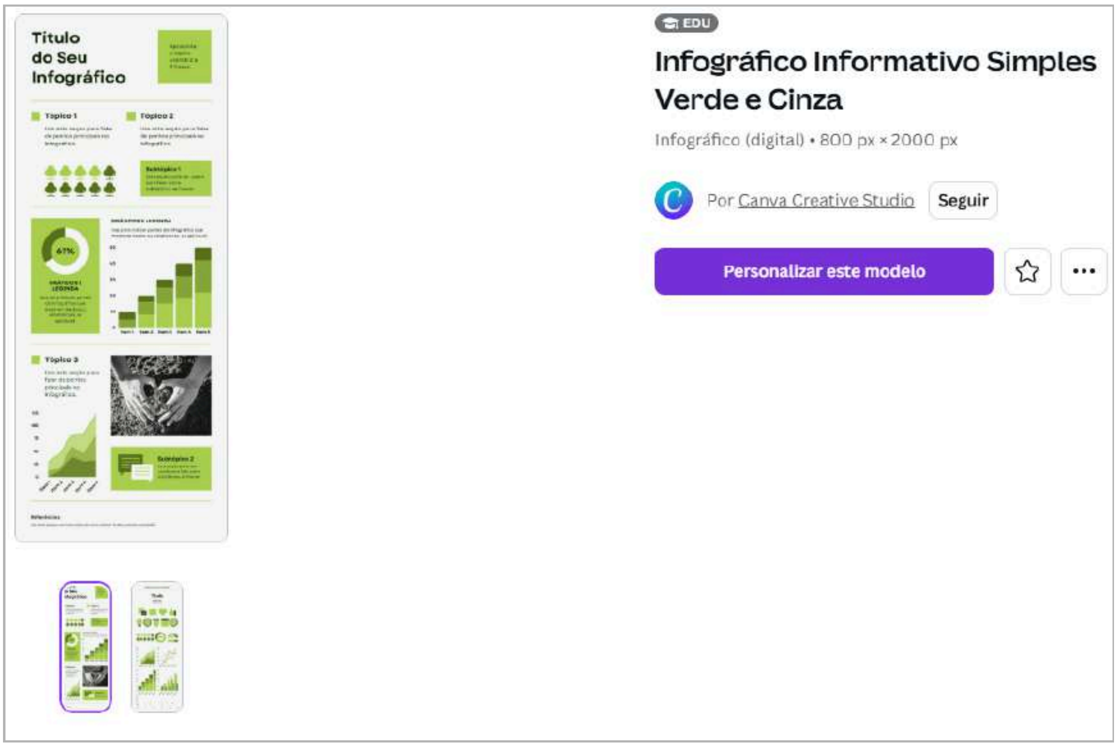
atenção

Abaixo, mostramos as etapas do segundo passo utilizando o primeiro modelo disponível. No entanto, recomendamos que você explore outras opções antes de decidir.



3 Copie o modelo para sua conta

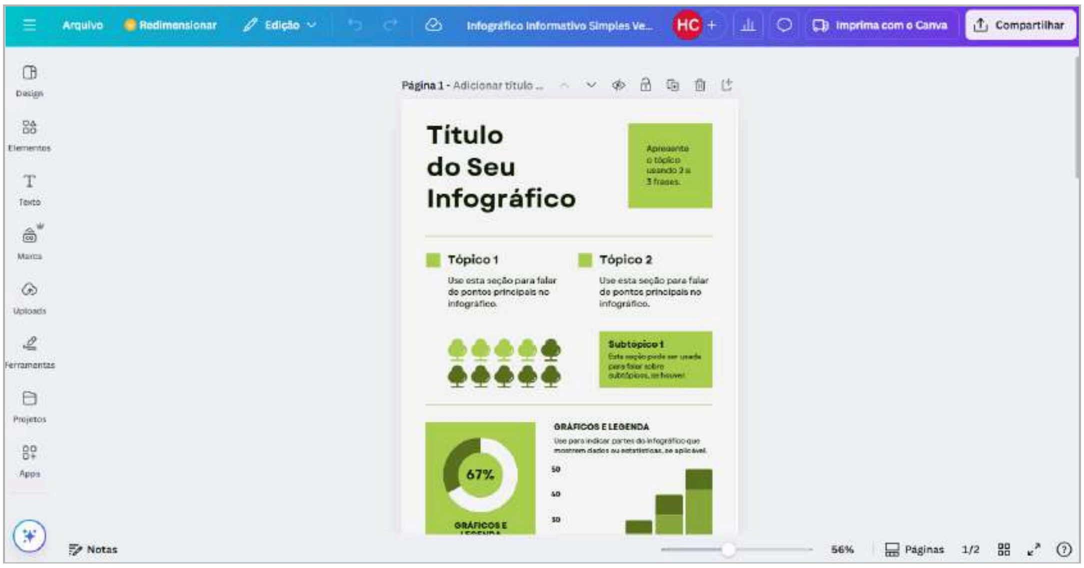
- Ao clicar em um modelo, abrirá uma tela com informações como título, autor e dimensões. Clique em "Personalizar este modelo". Assim, o modelo será copiado para a sua conta e ficará disponível para edição.



4 Ambiente de edição do projeto

Agora o modelo faz parte da sua conta e pode ser editado livremente.

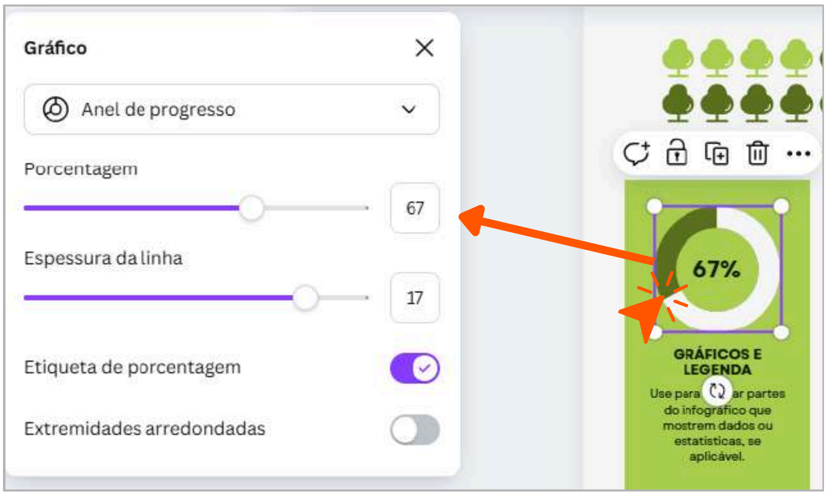
- Substitua os textos genéricos pelas informações da sua pesquisa.
- Prefira frases curtas e objetivas.



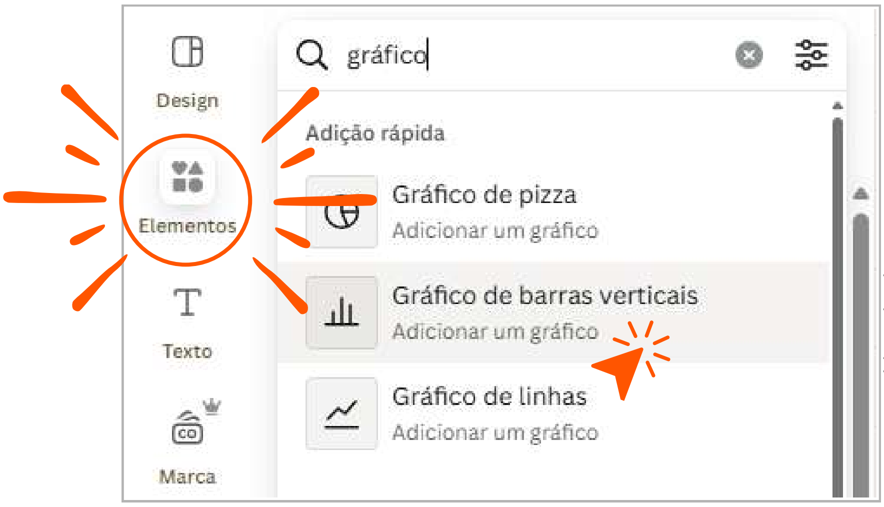
5 Elementos gráficos

Os modelos já vêm com elementos visuais (formas, linhas, gráficos, etc.). Você pode alterá-los ou acrescentar novos:

- Para editar, clique duas vezes sobre o elemento e explore as opções de personalização.

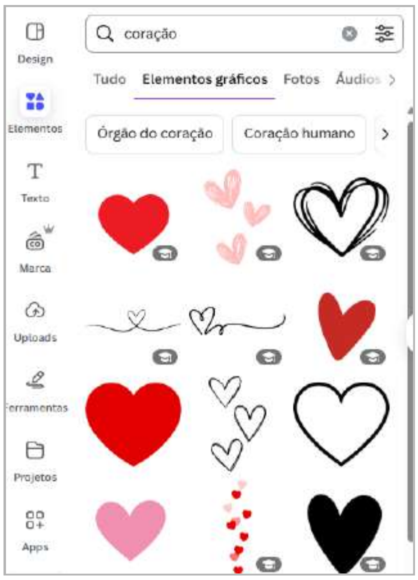


- Para inserir novos, clique em "Elementos" e pesquise o que deseja (ex.: gráfico de pizza). Depois, selecione o item desejado.



6 Ícones e imagens

- Além dos elementos gráficos, você pode inserir ícones e imagens para reforçar sua mensagem. Utilize os que já estão no modelo ou acesse "Elementos" e pesquise pelo tipo de imagem ou ícone que deseja adicionar.



EXERCÍCIO 1. (Iezzi, Hazzan, Degenszajn, 2013) Em uma pesquisa socioeconômica sobre itens de conforto, perguntou-se a cada um dos 800 entrevistados: Quantos aparelhos de TV há em sua casa? Os resultados aparecem na tabela abaixo.

Nº de aparelhos	Frequência absoluta	Frequência relativa	
		Forma decimal	Forma percentual
0	20		
1			
2		0,6	
3			7,5
4	30		

a) Complete a tabela.

b) Suponha que levantamentos posteriores mostraram que os resultados dessa amostra representam, em termos da frequência relativa, a distribuição do número de aparelhos de TV de toda a população. No universo de 680 000 domicílios, qual o número daqueles em que há exatamente 1 aparelho?

SOLUÇÃO.

a) Os primeiros valores a serem preenchido são os referentes à porcentagem na linha de 2 aparelhos, multiplicando a frequência relativa por 100, e frequência relativa na linha de 3 aparelhos, dividindo a porcentagem por 100:

Nº de aparelhos	Frequência absoluta	Frequência relativa	
		Forma decimal	Forma percentual
0	20		
1	210		
2	480	0,6	60
3	60	0,075	7,5
4	30		

Para obtermos a frequência absoluta, vamos recordar como foi definida a frequência relativa e fazer algumas manipulações:

$$f_i = \frac{n_i}{n} \Rightarrow n_i = f_i \cdot n.$$

onde f_i é a frequência relativa, n_i é a frequência absoluta e $n = 800$.

Portanto, para obtermos a frequência absoluta basta multiplicar o total de elementos pela frequência relativa. Assim, obtemos:

$$f_2 = 800 \cdot 0,6 = 480; f_3 = 800 \cdot 0,075 = 60.$$

Como o número de entrevistados é 800, temos que

$$n_3 = 800 - (20 + 480 + 60 + 30) = 210.$$

Com o valor da frequência absoluta, podemos determinar as frequências relativas e porcentagens faltantes:

$$f_0 = \frac{20}{800} = 0,025 \to 2,5\%$$

$$f_1 = \frac{210}{800} = 0,2625 \to 26,25\%$$

$$f_4 = \frac{30}{800} = 0,0375 \to 3,75\%$$

Assim, temos a tabela completa:

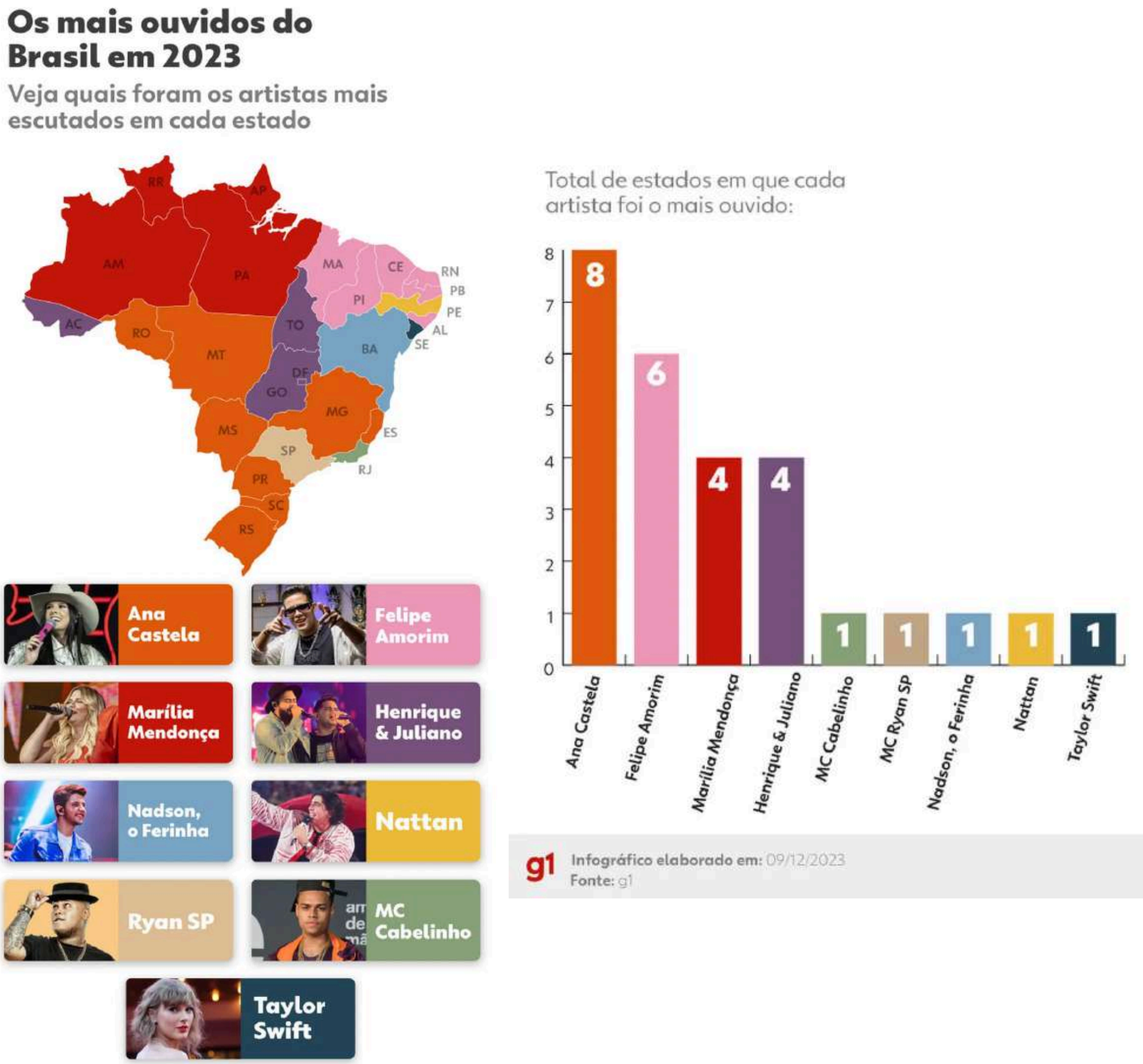
Nº de aparelhos	Frequência absoluta	Frequência relativa	
		Forma decimal	Forma percentual
0	20	0,025	2,5
1	210	0,2625	26,25
2	480	0,6	60
3	60	0,075	7,5
4	30	0,0375	3,75

b) Podemos pensar aqui na frequência relativa como porcentagem, daí o percentual de domicílio que possui 1 aparelho de TV é igual a 26,25%. Se nosso universo possui 680 000 domicílios, devemos determinar:

$$26,25\% \ \ de \ \ 680000 = 0,2625 \cdot 680000 = 178500.$$

Portanto, 178 500 domicílios possuem apenas 1 aparelho de TV.

EXERCÍCIO 2. Anualmente a plataforma spotify libera uma lista dos artistas mais escutados, segundo informações do G1 e da plataforma em 2023 os artistas mais escutados em cada estado do Brasil foi:



A partir das informações acima, construa uma tabela com as frequências.

SOLUÇÃO.

Inicialmente devemos notar que nossa variável é o artista e a frequência absoluta é o número de estados em que um determinado artista foi o mais escutado no ano de 2023. Dessa forma, temos uma primeira versão da nossa tabela de frequências:

Artista	Frequência absoluta	Frequência relativa
Ana Castela	8	
Felipe Amorim	6	
Marília Mendonça	4	
Henrique & juliano	4	
MC Cabelinho	1	
MC Ryan SP	1	
Nadson, o Ferinha	1	
Nattan	1	
Taylor Swift	1	
TOTAL	**27**	

Para obter a frequência relativa devemos determinar a razão entre a frequência absoluta e o total (27). Veja abaixo o cálculo completo para os artistas Ana Castela e Felipe Amorim:

$$f_{Ana\ Castela} = \frac{8}{27} = 0,296 \qquad f_{Felipe\ Amorim} = \frac{6}{27} = 0,222$$

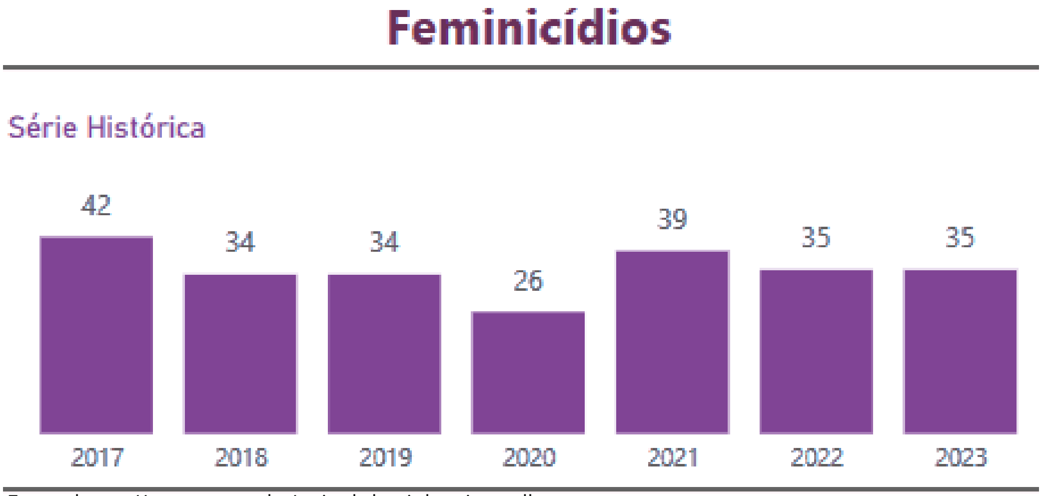
Seguindo o processo dessa forma, obtemos a seguinte tabela:

Artista	Frequência absoluta	Frequência relativa
Ana Castela	8	0,296
Felipe Amorim	6	0,222
Marília Mendonça	4	0,148
Henrique & juliano	4	0,148
MC Cabelinho	1	0,037
MC Ryan SP	1	0,037
Nadson, o Ferinha	1	0,037
Nattan	1	0,037
Taylor Swift	1	0,037
TOTAL	**27**	**1**

Atividades

ATIVIDADE 1

Um estudante estava coletando dados na internet sobre os números de casos de feminicídios no Espírito Santo. Ao acessar o site da Secretaria da Segurança Pública e Defesa Social (SESP/ES), ele encontrou um gráfico com a série histórica com o número de feminicídios ocorridos no estado entre 2017 e 2023. Veja a seguir:



Fonte: https://sesp.es.gov.br/painel-de-violencia-mulher

Tendo como base o gráfico apresentado, preencha, na tabela a seguir, os dados referentes as frequências absoluta e relativa dos casos de feminicídio.

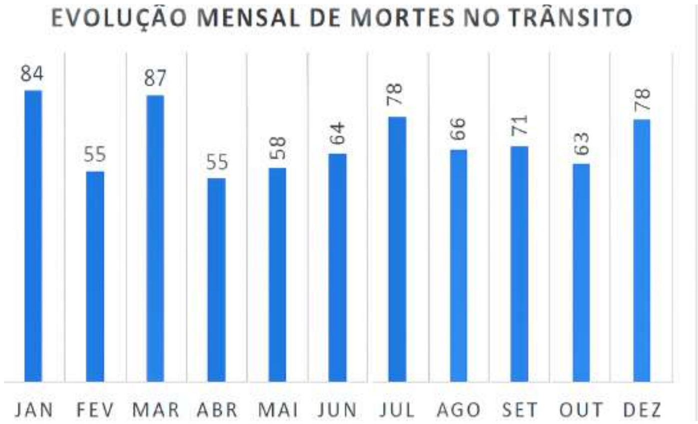
Utilize apenas 3 casas decimais para a frequência relativa

Série Histórica (2017 - 2023): Casos de Feminicídio

Ano	Frequência absoluta	Frequência relativa	
		Forma decimal	Forma percentual
2017			
2018			
2019			
2020			
2021			
2022			
2023			
Total			

ATIVIDADE 2

O gráfico a seguir destaca o quantitativo de vítimas fatais ocorridas por acidentes de trânsito em 2023, segundo dados do Observatório de Trânsito do Espírito Santo, em todo o estado.



Esta é uma questão em que a utilização da calculadora poderá ser importante, se optar por utilizar uma quantidade maior de casas decimais.

Fonte: https://analytics-detran.vert.com.br/ObservatorioTransito

A partir deste gráfico construa uma tabela de frequências absoluta e relativa (decimal e percentual) observando os meses de janeiro a dezembro.

ATIVIDADE 3

A transição energética global representa um desafio no sentido de propiciar desenvolvimento econômico e social a partir de menores emissões de carbono e com maior participação das fontes limpas e renováveis. Ao atingir a marca de 200 gigawatts (GW) de potência centralizada (março de 2024), o Brasil prova seu protagonismo e está sintonizado com a transição energética.

Disponível em: https://www.gov.br/aneel/pt-br/assuntos/noticias/2024/matriz-eletrica-brasileira-alcanca-200-gw. Acesso em: 29 nov.2024.

A tabela a seguir representa as fontes que compõe a matriz elétrica brasileira utilizadas para se alcançar tal marca. Observe que estão faltando algumas informações. A partir dos dados apresentados, preencha as informações que estão faltando para completar essa tabela.

Matriz Elétrica Brasileira

Fonte	Frequência absoluta	Frequência relativa	
		Forma decimal	Forma percentual
Hídrica	110		
Eólica		0,15	
Biomassa	16	0,08	8
Gás Natural			9
Petróleo	16		
Carvão Mineral	4	0,02	2
Nuclear		0,01	
Outros			
Total	200	1	100

ATIVIDADE 4

De acordo com os dados do Censo 2022, residem 1 693 535 indígenas no Brasil, o que corresponde a 0,83% do total de habitantes do país. A tabela abaixo identifica a quantidade de indígenas nas cinco regiões brasileiras.

Região	Quantidade
Norte	753 357
Nordeste	528 800
Centro-Oeste	199 912
Sudeste	123 369
Sul	88 097
Total	1 693 533

Fonte: https://educa.ibge.gov.br/jovens/conheca-o-brasil/populacao/22326-indigenas-2.html

A partir das informações contidas nessa tabela, construa um gráfico de colunas que ilustre essa situação.

ATIVIDADE 5

O time de basquete de uma escola pública estadual do Espírito Santo conta com 25 jovens com idade entre 15 e 17 anos. As alturas, em metros, desses atletas são dadas a seguir:

1,95 – 1,82 – 1,77 – 1,74 – 1,81
1,69 – 1,71 – 1,84 – 1,76 – 1,70
1,92 – 1,90 – 1,65 – 1,78 – 1,78
1,73 – 1,88 – 1,92 – 1,98 – 1,76
1,58 – 1,69 – 1,67 – 1,74 – 1,78

Para um treino específico, o professor agrupou tais atletas em três categorias de altura: alto (acima de 1,80), mediano (de 1,70 a 1,80), baixo (abaixo de 1,70). Preencha a tabela a seguir e construa um gráfico de colunas para representá-la.

Categoria	Quantidade de atletas
Alto	
Mediano	
Baixo	
Total	

ATIVIDADE 6

Segundo o portal de Imigração do Ministério da Justiça, foram emitidos 94 525 vistos de entradas no país. A tabela a seguir identifica o quantitativo de vistos concedidos (por sexo) em relação aos principais países de localização do posto consular (representação do Governo brasileiro perante as autoridades locais e a comunidade brasileira nela residente).

País	Homens	Mulheres	Total
Angola	5 637	4 981	10 618
Estados Unidos	6 511	2 394	8 905
China	4 184	1 666	5 850
Índia	4 558	1 057	5 615
irã	3 225	2 011	5 236
Cuba	1 653	2 072	3 725
Haiti	1 669	1 546	3 215
França	1 583	1 246	2 829
Moçambique	1 211	997	2 208
Paquistão	1 409	665	2 104
Outros	30 673	13 547	44 220
Total	62 313	32 212	94 525

Fonte:https://portaldeimigracao.mj.gov.br/images/Obmigra_2020/OBMIGRA_2023/Dados_Consolidados/dados_consolidados_2022_-_v_19_06.pdf

A partir desses dados é correto afirmar que:

A) A quantidade de vistos concedidos ao total de cubanos é inferior a quantidade concedidas a homens iranianos.

B) O número de vistos concedidos à mulheres angolanas é superior ao total de vistos condedidos a cidadãos cubanos.

C) O número de vistos concedidos aos homens haitianos é igual ao número concedidos às mulheres haitianas.

D) O total de vistos concedidos às mulheres de outros países é inferior ao total de vistos concedidos aos cidadãos angolanos.

E) Metade dos vistos concedidos aos homens foram emitidos em outros países.

ATIVIDADE 7

A tabela abaixo apresenta as Terras Indígenas com maior quantidade absoluta de pessoas indígenas no Brasil.

Terras Indígenas com maior quantidade de pessoas indígenas, no Brasil

Município	População residente	Pessoas indígenas
Yanomami	27 202	27 152
Raposa Serra do Sol	26 378	26 176
Évare I	21 210	20 177
Alto Rio Negro	18 171	18 042
Andirá-Marau	14 455	14 307
Dourados	13 673	13 473
Potiguara	11 698	10 960
Cana Brava/Guajajara	10 824	10 662
São Marcos (RR)	18 210	10 328
Araribóia	10 318	10 158

Fonte: https://educa.ibge.gov.br/jovens/conheca-o-brasil/populacao/22326-indigenas-2.html.

Com base nessas informações é correto afirmar que:

A) No município de Évare I residem 5 999 indígenas a mais do que em Raposa Serra do Sol.

B) A diferença de indígenas e não indígenas residentes em Potiguara é de 838 pessoas.

C) No município de Andirá-Marau, residem 148 pessoas não indígenas.

D) A população residente no município Yanomami é exatamente o dobro da população residente em Dourados.

E) O total de pessoas indígenas nessas terras é de 172 139.

ATIVIDADE 8

Nas Olímpiadas de Paris (2024), o Brasil alcançou a 20ª posição no quadro de medalhas, totalizando 20 conquistas (ouro, prata e bronze), conforme pode-se observar na imagem a seguir:

Ordem		O	P	B	
20	Brasil	3	7	10	20

Fonte: https://olympics.com/pt/paris-2024/medalhas

Observando somente o feito alcançado pelo Brasil, as frequências relativas (forma decimal) das medalhas de ouro, prata e bronze conquistadas são, respectivamente:

A) 0,015 - 0,035 - 0,050.

B) 0,03 - 0,07 - 0,10.

C) 0,06 - 0,2 - 0,2.

D) 0,15 - 0,35 - 0,5.

E) 0,3 - 0,7 - 0,10.

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 1

(ENEM 2012) Uma pesquisa realizada por estudantes da Faculdade de Estatística mostra, em horas por dia, como os jovens entre 12 e 18 anos gastam seu tempo, tanto durante a semana (de segunda-feira a sexta-feira), como no fim de semana (sábado e domingo). A tabela seguinte ilustra os resultados da pesquisa.

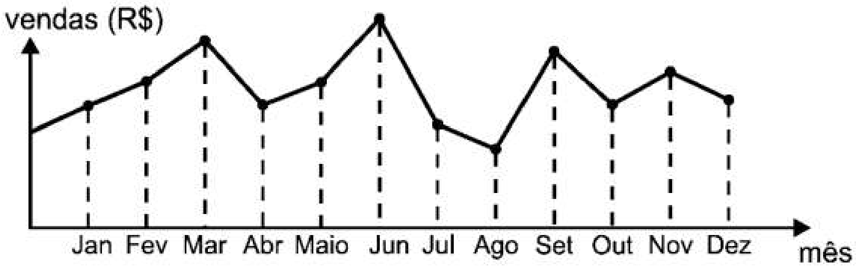
Rotina Juvenil	Durante a semana	No fim de semana
Assistir à televisão	3	3
Atividades domésticas	1	1
Atividades escolares	5	1
Atividades de lazer	2	4
Descanso, higiene e alimentação	10	12
Outras atividades	3	3

De acordo com esta pesquisa, quantas horas de seu tempo gasta um jovem entre 12 e 18 anos, na semana inteira (de segunda-feira a domingo), nas atividades escolares?

A) 20.
B) 21.
C) 24.
D) 25.
E) 27.

QUESTÃO 2

(ENEM 2012) O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011. De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absolutas em 2011 foram



a) março e abril.
b) março e agosto.
c) agosto e setembro.
d) junho e setembro.
e) junho e agosto.

DADOS AGRUPADOS EM CLASSE

Tabelas de Frequência e Histograma

Voltemos aos nossos dados do IDHM por unidade da Federação:

Unidade da Federação	IDHM
Distrito Federal	0.814
São Paulo	0.806
Santa Catarina	0.792
Minas Gerais	0.774
Rio Grande do Sul	0.771
Espírito Santo	0.771
Paraná	0.769
Rio de Janeiro	0.762
Mato Grosso do Sul	0.742
Goiás	0.737
Mato Grosso	0.736
Ceará	0.734
Tocantins	0.731
Rio Grande do Norte	0.728

Unidade da Federação	IDHM
Pernambuco	0.719
Acre	0.71
Sergipe	0.702
Rondônia	0.7
Amazonas	0.7
Roraima	0.699
Paraíba	0.698
Bahia	0.691
Pará	0.69
Piauí	0.69
Amapá	0.688
Alagoas	0.684
Maranhão	0.676

Para simplificar o processo de construção da tabela de frequências, visualização gráfica e interpretação dividimos os dados em intervalos ou classes, mas não o fazemos de qualquer forma. Na sequência, organizamos esse processo em alguns passos, para facilitar a compreensão:

PASSO 1: Calcula-se a diferença entre o maior e o menor valor observado:

$$d = x_{máx} - x_{mín}.$$

PASSO 2: Determinamos o número de classes ou intervalos:

$$k = \sqrt{n}.$$

É importante observar que o número de classe é sempre um valor natural, portanto, caso este valor seja um número real, deve-se aproximar para o inteiro mais próximo, porém superior ao número encontrado (arredondar para cima).

PASSO 3: Determinar o comprimento do intervalo: $c = \dfrac{d}{k}$.

PASSO 4: Determinar os intervalos

$$
\begin{aligned}
I_1 &= [x_{min}, x_{min} + c[\\
I_2 &= [x_{min} + c, x_{min} + 2c[\\
I_3 &= [x_{min} + 2c, x_{min} + 3c[\\
&\vdots\\
I_n &= [x_{max} - c, x_{max}]
\end{aligned}
$$

Os intervalos são obtidos da seguinte forma: para o primeiro tomamos o menor valor como limite inferior e, como limite superior, tomamos o menor valor somado com o comprimento do intervalo; para o segundo intervalo tomamos o limite superior do intervalo anterior como limite inferior e, como limite superior, tomamos seu limite inferior somado com o comprimento do intervalo; repetimos esse processo até chegarmos no maior valor e, portanto, o número de intervalos previamente estabelecido.

PASSO 5: Construir a tabela de frequências.

PASSO 6: Construir o gráfico – Histograma.

No nosso exemplo do IDHM temos:

Passo 1: Diferença entre o maior e o menor valor

- maior valor observado: 0,814
- menor valor observado: 0,676
- diferença: d=0,138

Passo 2: Número de classes

$$k = \sqrt{27} = 5,196 \rightarrow 6$$

Passo 3: Comprimento de classe

$$c = \frac{0,138}{6} = 0,023$$

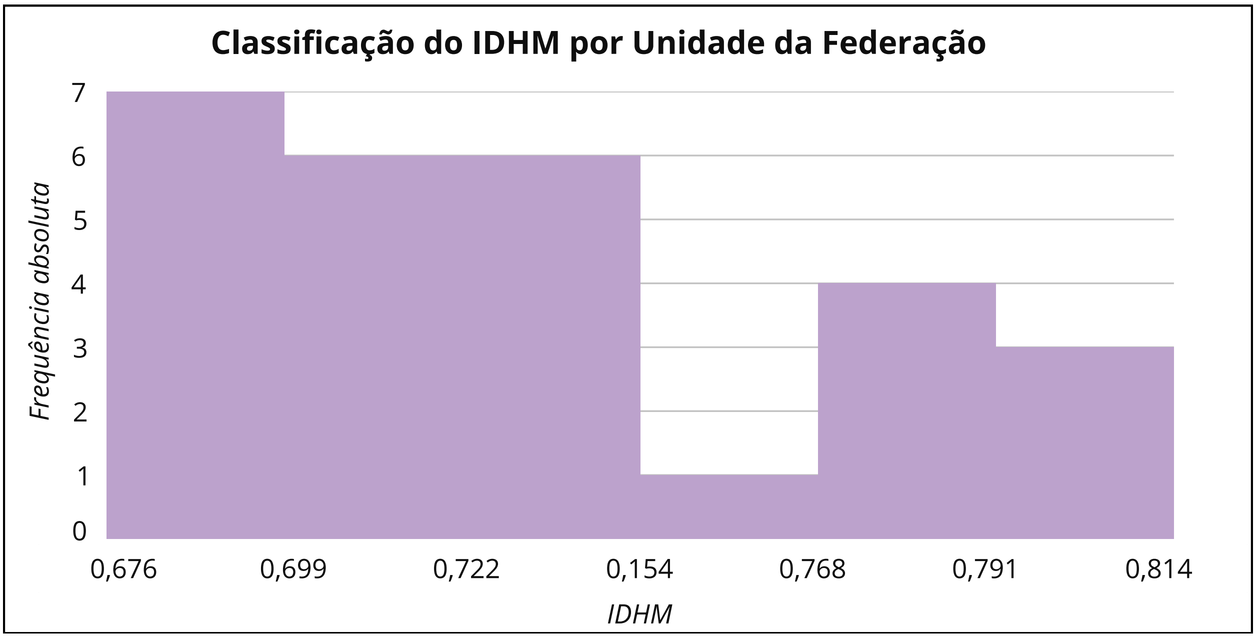
Passo 4: Determinar os intervalos

$$
\begin{array}{lll}
I_1 = [0,676; 0,699[& I_2 = [0,699; 0,722[& I_3 = [0,722; 0,745[\\
I_4 = [0,745; 0,768[& I_5 = [0,768; 0,791[& I_6 = [0,791; 0,814]
\end{array}
$$

Passo 5: Construir a tabela de frequências

Intervalo	Frequência absoluta	Frequência relativa
$[0,676; 0,699[$	7	26%
$[0,699; 0,722[$	6	22,2%
$[0,722; 0,745[$	6	22,2%
$[0,745; 0,768[$	1	3,7%
$[0,768; 0,791[$	4	14,8%
$[0,791; 0,814]$	3	11,1%
Total	**27**	**100**

PASSO 6: Construir o histograma



MEDIDAS RESUMO DE UMA AMOSTRA

Dividimos as medidas resumo em duas categorias: **medidas de tendência central** e **medidas de dispersão**. Enquanto as medidas de tendência central são usadas como um "ponto de equilíbrio" dos dados apresentados, as medidas de dispersão mostram como os dados se "espalham" no intervalo em que se encontram. Essas informações não devem ser tomadas isoladamente, pois uma interpretação geral dos dados só é feita agregando as informações de cada um dos dois tipos de medidas.

Medidas de Tendência Central

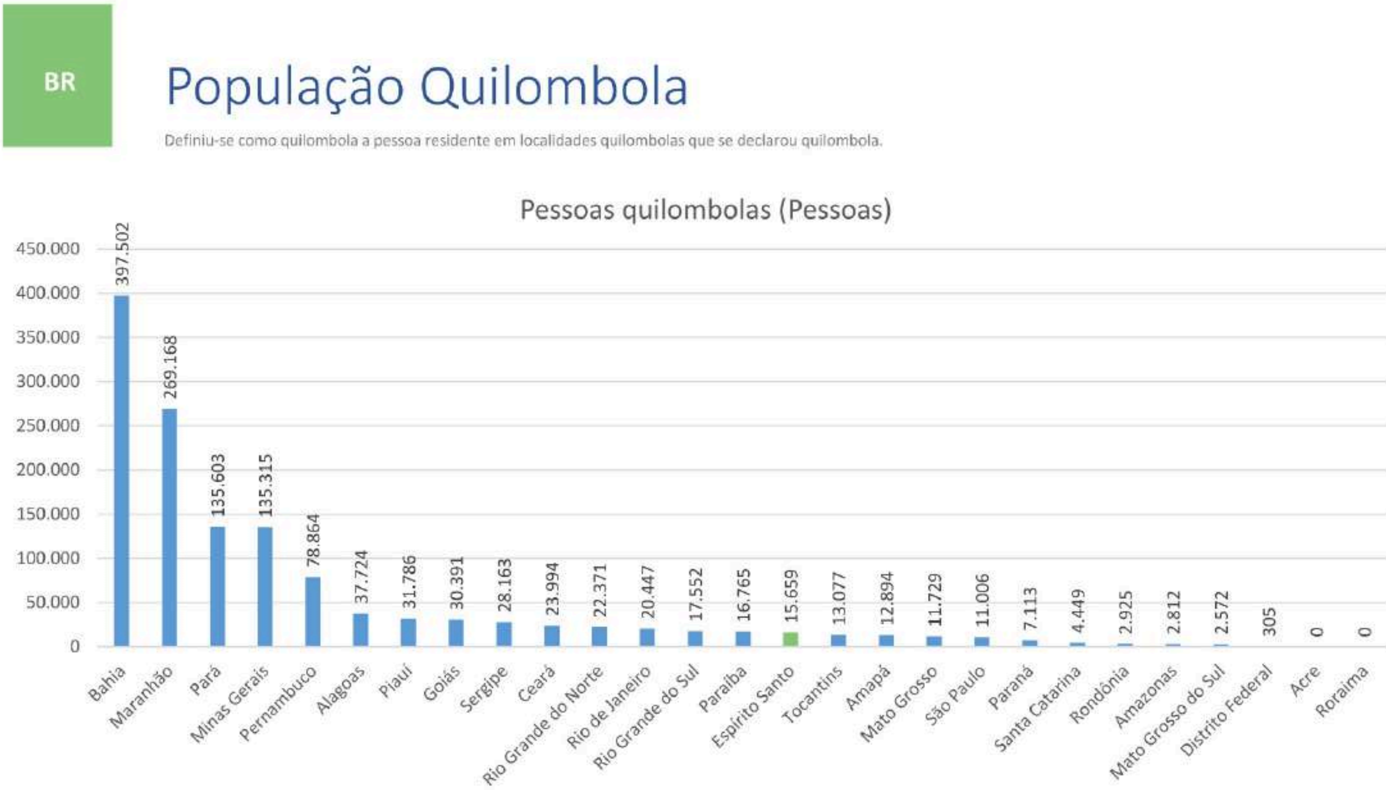
Para descrever a tendência central dos dados podemos usar três medidas principais: **média**, **mediana** e **moda**.

- *Média*

Existem diversos tipos de médias, dentre elas podemos citar a média aritmética, média geométrica e a média harmônica. Neste material vamos nos ater à média aritmética.

Observe a seguinte situação:

Segundo a série 'IJSN no Censo 2022', do Instituto Jones do Santos Neves, o Brasil possui 1 330 186 pessoas quilombolas. O gráfico a seguir mostra a distribuição da população quilombola no Brasil:



Disponível em: https://ijsn.es.gov.br/Media/IJSN/PublicacoesAnexos/S%C3%ADnteses/IJSN_Censo_2022-Quilombola.pdf. Acesso em 26 de Novembro de 2024.

Se todas as unidades da Federação (UF) contassem com a mesma população de pessoas quilombolas, podemos dizer que essa população por UF seria obtida fazendo o total da população quilombola no Brasil dividido pelo número de UF

$$\frac{1\,330\,186}{27}$$

O que nos retornaria um total de, aproximadamente, 48 267 pessoas quilombolas por UF. Este número é chamado de **média aritmética**.

Podemos definir a média aritmética como a razão entre a soma dos valores e a quantidade de valores. Portanto, se $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ *são* n *valores, então a média aritmética desse conjunto é calculada por:*

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}.$$

Uma outra possibilidade de cálculo de média aritmética é a **média aritmética ponderada**. Ela é determinada pela soma de todos os produtos de cada valor multiplicado pelo seu peso e dividido pela soma dos pesos.

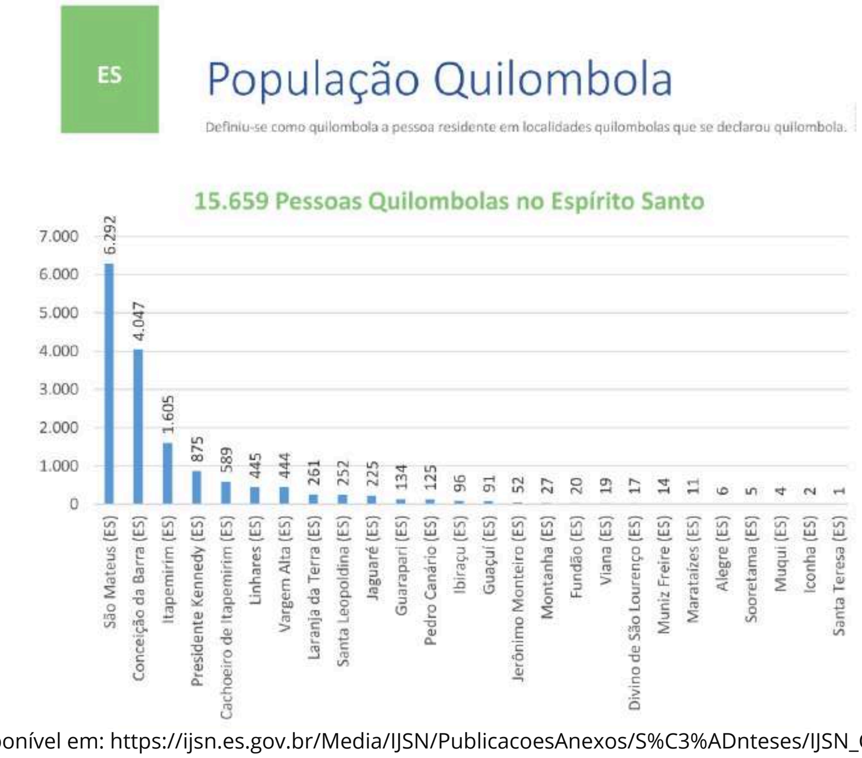
- *Mediana*

Considere, ainda, o gráfico da distribuição da população quilombola por unidades da Federação, apresentado no início da página.

Note que o número de pessoas quilombolas está organizado em ordem decrescente (em rol) e um valor interessante é o valor referente ao estado da Paraíba. Observe que ele divide o conjunto de dados em duas partes: estados que possuem pelo menos 16 765 pessoas quilombolas e estados que possuem no máximo 16 765 pessoas quilombolas, sendo que cada uma dessas partes contém o mesmo número de estado. Este valor, 16 765, é chamado de **mediana**.

Podemos definir a mediana (M_d) como o valor do elemento central de um conjunto numérico em rol quando esse conjunto tem uma quantidade ímpar de valores. Caso o conjunto tenha uma quantidade par de valores, então encontraremos dois valores centrais e, nesse caso, definimos a mediana como a média aritmética desses dois elementos.

Veja, por exemplo, a distribuição das pessoas quilombolas por município no Espírito Santo:



Disponível em: https://ijsn.es.gov.br/Media/IJSN/PublicacoesAnexos/S%C3%ADnteses/IJSN_Censo_2022-Quilombola.pdf. Acesso em 26 de Novembro de 2024.

Temos 26 municípios com a presença de pessoas quilombolas. Como o número de municípios é par, encontramos dois valores centrais: os valores das 13ª e 14ª posição, isto é, o número de pessoas quilombolas dos municípios de Ibiraçu e Guaçuí. Portanto, a mediana é

$$M_d = \frac{96 + 91}{2} = 93,5$$

Assim, 50% dos municípios que apresentam população quilombola possuem mais do que 93,5 pessoas quilombolas e 50% dos municípios que apresentam população quilombola possuem menos do que 93,5 pessoas quilombolas.

- *Moda*

Volte novamente ao gráfico que mostra o total de pessoas quilombolas por unidade da federação, observe que os valores quase não se repetem, exceto por um deles, o zero! Os estados do Acre e Roraima não possuem pessoas declaradas quilombolas. Esse valor é chamado de **moda**.

Podemos definir a moda (M_o) de um conjunto de valores como o valor que aparece em maior número de vezes, ou seja, é o valor de maior frequência absoluta.

Um conjunto de valores pode ter uma só moda, duas modas (bimodal), três modas (trimodal) e assim por diante, como também pode não ter nenhuma moda (amodal).
Um caso de conjunto de valores bimodal é o número de pessoas indígenas no Espírito Santo (mostrado na discussão sobre a média): cinco municípios apresentam 6 pessoas indígenas e cinco municípios apresentam 2 pessoas indígenas, portanto a moda desse conjunto de dados é 2 e 6.

- *Média, mediana e moda de dados agrupados em classe*

Quando se trata da distribuição de frequências com dados agrupados dizemos que as frequências são distribuídas uniformemente ao longo da classe e que, o ponto médio da classe é o valor representativo do conjunto.
Voltemos ao exemplo do IDHM:

Intervalo	Frequência absoluta	Frequência relativa
$[0,676; 0,699[$	7	26%
$[0,699; 0,722[$	6	22,2%
$[0,722; 0,745[$	6	22,2%
$[0,745; 0,768[$	1	3,7%
$[0,768; 0,791[$	4	14,8%
$[0,791; 0,814]$	3	11,1%
Total	**27**	**100**

Assim, o primeiro passo para determinar as medidas de tendência central de dados agrupados em classe é determinar o ponto médio da classe, que é a média aritmética dos limites inferior e superior da classe.
Para a primeira classe o ponto médio é:

$$P_1 = \frac{0,676 + 0,699}{2} = 0,6875$$

Fazendo esse cálculo para as demais classes, obtemos a seguinte tabela:

Intervalo	Ponto médio	Frequência absoluta	Frequência relativa
$[0,676; 0,699[$	0,6875	7	26%
$[0,699; 0,722[$	0,7105	6	22,2%
$[0,722; 0,745[$	0,7335	6	22,2%
$[0,745; 0,768[$	0,7565	1	3,7%
$[0,768; 0,791[$	0,7795	4	14,8%
$[0,791; 0,814]$	0,8025	3	11,1%
Total	**--------------------**	**27**	**100**

Vamos, agora, estudar o processo de cálculo da moda, mediana e média dos dados agrupados em classes:

- *A **moda** é o ponto médio referente à classe de maior maior frequência.*

Note que, como a maior frequência é 7, portanto, a moda é $M_o = 0,6875.$

- *A **mediana** é determinada observando o ponto médio da classe em que se encontra o termo central da amostra, por exemplo, se o termo central é 7º termo, devemos ir somando as frequências das classes, ordenadamente, até obtermos o 7º termo, ali encontramos a mediana.*

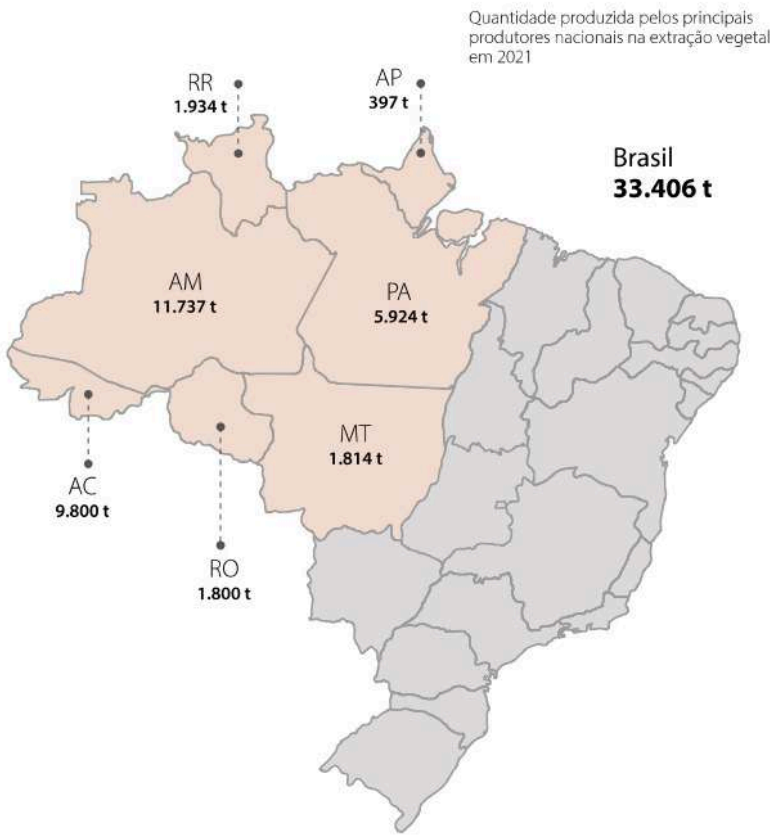
Como temos 27 elementos, a mediana se encontra na 14ª posição. Observe que a primeira classe acumula 7 elementos, a primeira e segunda classes acumulam 13 elementos e a primeira, segunda e terceira classe acumulam 19 elementos, portanto o 14º elemento se encontra na terceira classe, assim, a mediana é $M_d = 0,7335.$

- *A **média** é obtida fazendo a soma dos produtos do ponto médio da classe pela sua frequência e dividindo pelo total de elementos.*

Para determinar a média, devemos fazer:

$$\overline{IDHM} = \frac{0,6875 \cdot 7 + 0,7105 \cdot 6 + 0,7335 \cdot 6 + 0,7565 \cdot 1 + 0,7795 \cdot 4 + 0,8025 \cdot 3}{27} = \frac{19,7585}{27} \approx 0,732.$$

EXERCÍCIO 1. O mapa abaixo apresenta a quantidade de castanha produzida por extração vegetal em 2021 no Brasil nos principais estados produtores.



Disponível em: https://www.embrapa.br/busca-de-publicacoes/-/publicacao/1153294/brasil-em-50-alimentos. Acesso em 27 de Novembro de 2024.

Com base no mapa acima determine a média, mediana e moda da produção de castanhas no Brasil pelos principais estados produtores.

SOLUÇÃO. Primeiramente devemos ordenar os valores em ordem crescente (se organizar em ordem decrescente o resultado é o mesmo):

397 t, 1 800 t, 1 814 t, 1 934 t, 5 924 t, 9 800 t e 11 737 t.

Observe que nenhum valor se repete, portanto a amostra é amodal. Como existem 7 valores, a mediana se encontra na 4ª posição, logo, a mediana é igual a 1934 t. Para calcular a média devemos fazer:

$$\overline{x} = \frac{397 + 1800 + 1814 + 1934 + 5924 + 9800 + 11737}{7} = \frac{33406}{7} \approx 4772,29\, t.$$

EXERCÍCIO 2. O tempo necessário para um medicamento fazer efeito no organismo de uma pessoa depende de alguns fatores como, por exemplo, o tipo de revestimento da cápsula e a própria composição do medicamento. Para lançar um novo medicamento, um farmacêutico deve indicar o tempo mediano, em minutos, para que tal medicamento comece a fazer efeito, sendo que quanto menor esse tempo, melhor é o medicamento.

Uma médica dispõe de informações sobre o tempo necessário para efeito, em minutos, de cinco medicamentos com a mesma finalidade e de uma amostra de 10 pacientes, para cada medicamento, como pode ser observado abaixo:

Medicamento	**Tempo, em minutos, para que o medicamento comece a fazer efeito**									
A	50	51	27	34	28	56	48	50	25	26
B	41	34	32	51	59	43	33	47	44	47
C	27	39	25	52	32	39	50	33	56	22
D	41	33	57	53	55	27	29	36	32	21
E	46	46	48	23	38	42	44	39	51	54

Nesta situação, qual dos medicamentos a médica deverá indicar para seu paciente?

SOLUÇÃO. Como devemos calcular a mediana do tempo para que o medicamento faça efeito, devemos inicialmente organizar o dado do tempo em ordem para cada medicamento:

Medicamento	**Tempo, em minutos, para que o medicamento comece a fazer efeito**									
A	25	26	27	28	34	48	50	50	51	56
B	32	33	34	41	43	44	47	47	51	59
C	22	25	27	32	33	39	39	50	52	56
D	21	27	29	32	33	36	41	53	55	57
E	23	38	39	42	44	46	46	48	51	54

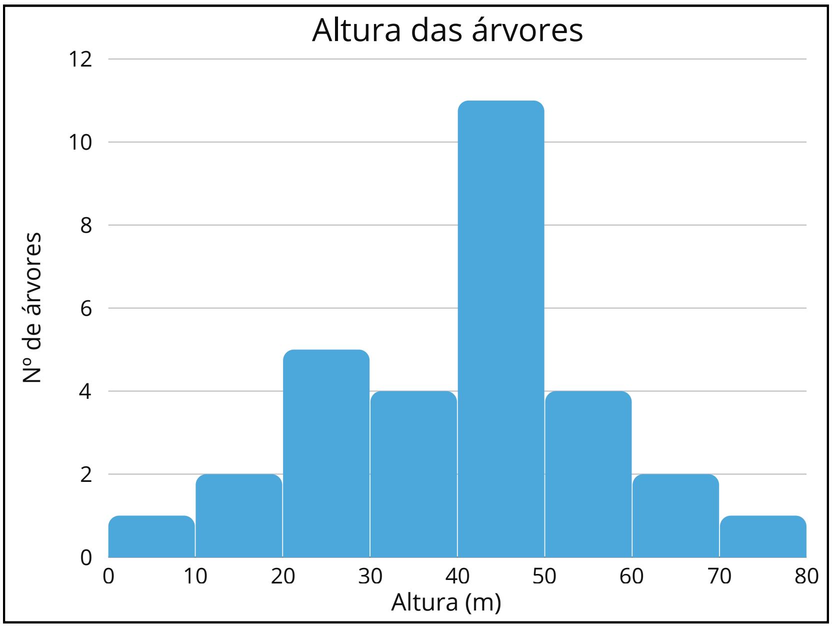
Como tempos 10 tempos para cada medicamento, a mediana é calculada como a média entre o 5º e 6º elementos da tabela:

$$M_{dA} = \frac{34+48}{2} = 41 \qquad M_{dC} = \frac{33+39}{2} = 36 \qquad M_{dE} = \frac{44+46}{2} = 45$$

$$M_{dB} = \frac{43+4}{2} = 43,5 \qquad M_{dD} = \frac{33+36}{2} = 34,5$$

Assim, o medicamento que apresentou o menor valor da mediana e, portanto, deve ser indicado pela médica, é o medicamento D.

EXERCÍCIO 3. Um engenheiro florestal ao fazer o inventário de uma área de mata coletou informação da altura de 30 árvores e construiu o histograma abaixo.



Em seu relatório final o engenheiro deve indicar o tamanho médio, mediano e modal da altura das árvores. Quais os valores que esse engenheiro deve indicar em seu relatório?

SOLUÇÃO. Inicialmente, como os dados estão agrupados em classes, devemos determinar os pontos médios de cada intervalo. Como os intervalos tem comprimento 10 essa tarefa é simples, basta somar 5 ao limite inferior de cada intervalo e obtemos:

INTERVALO	[0,10[	[10,20[	[20,30[	[30,40[	[40,50[	[50,60[	[60,70[	[70,80[
PONTO MÉDIO	5	15	25	35	45	55	65	75
FREQUÊNCIA	1	2	5	4	11	4	2	1

Dentre as três medidas solicitadas o valor modal (moda) é facilmente identificado no gráfico e vale 45m.
Como temos informações de 30 árvores a altura mediana se encontra entre a 15ª e a 16ª altura, ordenadas em rol. Perceba que ambos valores pertencem à classe “[40,50[”, portanto o valor mediano é 45m.
Para determinar a média devemos fazer a soma do produto entre o ponto médio e a frequência e dividir pela soma das frequências:

$$\overline{x} = \frac{5\cdot 1 + 15\cdot 2 + 25\cdot 5 + 35\cdot 4 + 45\cdot 11 + 55\cdot 4 + 65\cdot 2 + 75\cdot 1}{30} = \frac{1220}{30} \approx 40,67m.$$

Resumindo: Valor mediano = valor modal = 45m e valor médio = 40,67m.

EXERCÍCIO 4. No ano de 2023, para ingresso no curso de arquitetura e urbanismo da Universidade Federal do Espírito Santo, a nota do Sisu (Sistema de Seleção Unificada) era calculada dando pesos para as notas de cada área do conhecimento do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) de acordo com a tabela abaixo:

Área	Redação	Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Ciências Humanas e suas Tecnologias	Linguagens, Códigos e suas Tecnologias	Matemática e suas Tecnologias
Peso	4	2	4	2	3

Disponível em: https://sisu.ufes.br/sites/sisu.ufes.br/files/field/anexo/termo_de_adesao_2023.2.pdf. Acesso em 28 de novembro de 2024.

Um estudante obteve as seguintes notas no ENEM 2022:

Área	**Nota**
Redação	750
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	580
Ciências Humanas e suas Tecnologias	720
Linguagens, Códigos e suas Tecnologias	680
Matemática e suas Tecnologias	620

Determine a nota no Sisu desse estudante para o curso de Arquitetura e Urbanismo.

SOLUÇÃO. Devemos, neste caso, determinar a média ponderada das notas pelos pesos das respectivas áreas:

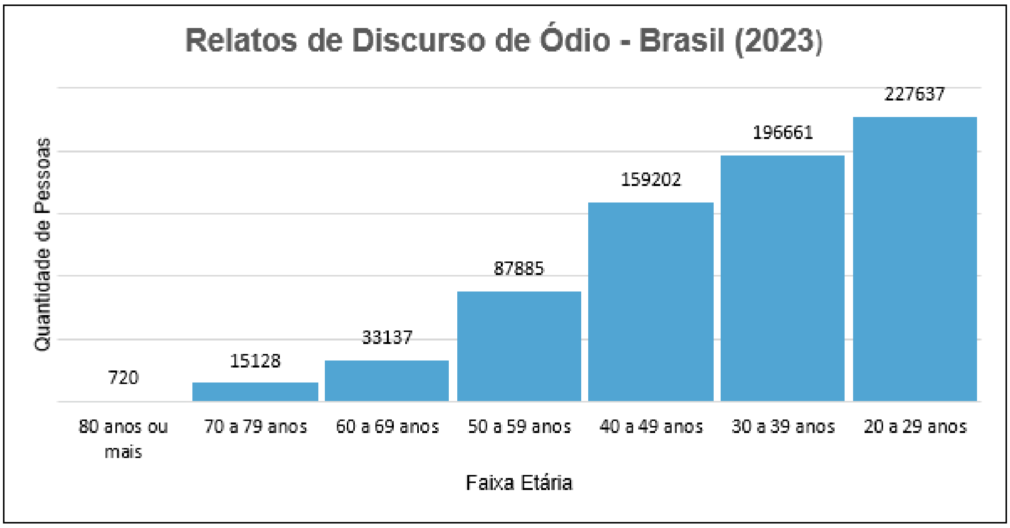
$$Nota = \frac{750 \cdot 4 + 580 \cdot 2 + 720 \cdot 4 + 680 \cdot 2 + 620 \cdot 3}{4 + 2 + 4 + 2 + 3}$$

$$= \frac{3000 + 1160 + 2880 + 1360 + 1860}{15} = \frac{10260}{15} = 684.$$

Atividades

ATIVIDADE 1

O gráfico a seguir indica a quantidade de pessoas com 20 anos ou mais que relatou ter sido ameaçada, ofendida, xingada ou ter suas imagens expostas sem consentimento.



Fonte: https://experience.arcgis.com/experience/54febd2948d54d68a1a462581f89d920/page/Enfrentamento-ao-Discurso-de-%C3%93dio/

Determine a quantidade média dos relatos feitos por pessoas na faixa etária de 20 a 49 anos.

ATIVIDADE 2

O time de basquete de uma escola pública estadual do Espírito Santo conta com 25 jovens com idade entre 15 e 17 anos. As alturas, em metros, desses atletas são dadas a seguir:

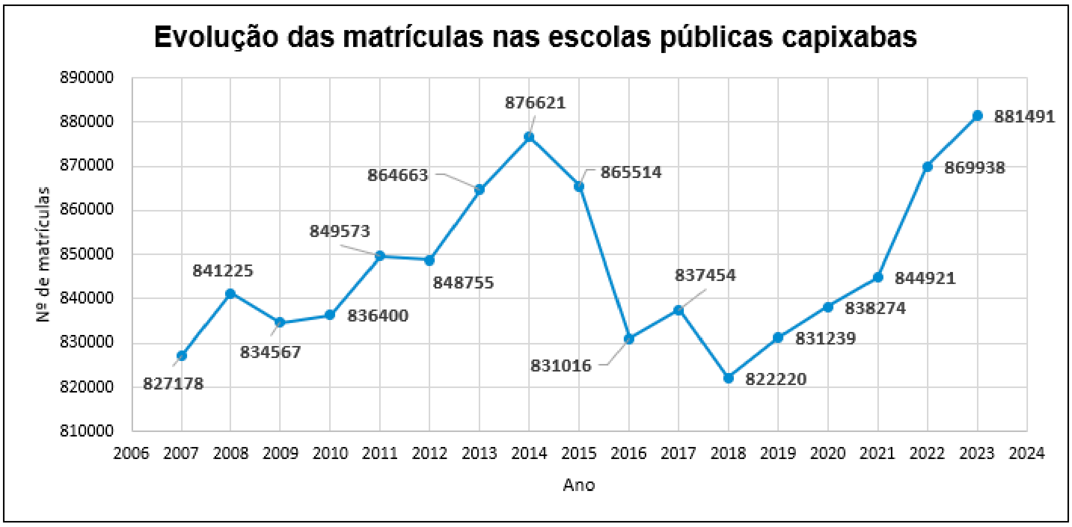
1,95 – 1,82 – 1,77 – 1,74 – 1,81 – 1,69 – 1,71 – 1,84 – 1,76 – 1,70 – 1,92 – 1,90 – 1,65
1,78 – 1,78 – 1,73 – 1,88 – 1,92 – 1,98 – 1,76 – 1,58 – 1,69 – 1,67 – 1,74 – 1,78

Preencha a tabela abaixo com os dados agrupados em **cinco** intervalos de frequência.

Alturas	Frequência absoluta	Frequência relativa (forma decimal)
⊢		
⊢		
⊢		
⊢		
⊢		
Total		

ATIVIDADE 3

O gráfico a seguir mostra a série histórica de evolução das matrículas na rede pública de ensino (municipal e estadual) do Espírito Santo durante os anos de 2007 a 2023. Esses dados são disponibilizados pelo Tribunal de Contas do Estado do Espírito Santo (TCEES).

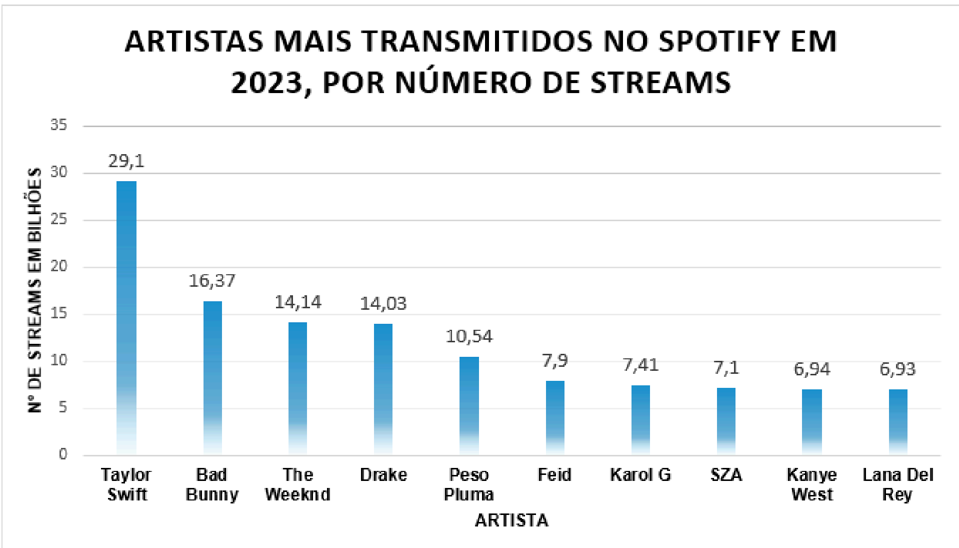


Fonte: https://paineldecontrole.tcees.tc.br/areasTematicas/Educacao-Escolas

Determine, durante esse período, a média de matrículas.

ATIVIDADE 4

O *site* statista.com monitorou durante o ano de 2023 os artistas mais transmitidos na plataforma de música *Spotify.* O top 10 desses artistas pode ser consultado no gráfico a seguir:



Fonte: https://www.statista.com/statistics/1450521/most-streamed-artist-spotify/

Calcule o número médio de streams e a mediana, a partir do top 10 da plataforma spotify do ano de 2023. Compare esses resultados e analise, para essa situação, qual seria a mais adequada, justificando a sua resposta.

ATIVIDADE 5

Priscilla é dona de uma empresa que presta serviços de vigilância. O total de funcionários dessa empresa é de 80, e a média salarial é de R$ 4 535,00. Se três novos funcionários forem contratados, com salários de R$ 2 430,00, R$ 3 425,00 e R$ 1 800,00, qual será a nova média salarial dessa empresa?

ATIVIDADE 6

Os funcionários de uma academia de musculação resolveram pedir ao dono do estabelecimento a compra de um segundo aparelho, chamado *leg press* 45º. Para efetuar a compra, o dono pediu aos funcionários que registrassem a frequência de utilização desse aparelho, bem como o tempo de duração de uso por cada um dos 100 alunos matriculados. Os dados coletados pelos funcionários foram organizados na tabela a seguir.

Frequência de utilização do *leg press 45°*

Alturas	Frequência de utilização
$1 \vdash 4$	15
$4 \vdash 7$	10
$7 \vdash 10$	24
$10 \vdash 13$	20
$13 \vdash 16$	28
$16 \vdash 19$	3
Total	100

Pode-se afirmar que o tempo médio de utilização do aparelho *leg press* 45º é de, aproximadamente:

A) 7,95 minutos.
B) 8,45 minutos.
C) 9,85 minutos.
D) 10,85 minutos.
E) 11,15 minutos.

ATIVIDADE 7

Um pediatra atendeu em seu consultório 5 crianças com idades entre 0 e 3 anos. Em suas anotações ele percebeu que registrou a idade de 3 delas, sendo de 2 anos, e que, as outras duas ele esqueceu de registrar. Sendo assim, pode-se afirmar que os valores da moda e da mediana das idades são:

A) 1 ano e 2 anos.
B) 2 anos e 1 ano.
C) 2 anos e 2 anos.
D) 2 anos e 3 anos.
E) 3 anos e 2 anos.

ATIVIDADE 8

Em 2023, o Espírito Santo registrou 4 474 casos de violência física contra a mulher, tornando-se o tipo de violência mais comum no estado. Este número representa um aumento significativo em relação aos 3 800 casos registrados em 2022, conforme dados da Secretaria Estadual de Segurança Pública (Sesp) e do Painel Capixaba de Violência, que foi lançado para monitorar e detalhar as ocorrências de violência contra mulheres no estado. O gráfico abaixo retrata a série histórica entre 2017 e 2023 dessas ocorrências.

Fonte: https://ijsn.es.gov.br/paineis-interativos/violencia-contra-a-mulher

Sobre esses dados, é correto afirmar que:

A) A média da quantidade de casos registrados é de 3 440.
B) A mediana da quantidade de casos registrados é de 3 783.
C) Em 2023, a quantidade de casos registrados supera a média em 1 029 casos.
D) A média dos casos registrados supera a mediana em aproximadamente 75 casos.
E) A mediana dos casos registrados supera a média em aproximadamente 70 casos.

ATIVIDADE 9

A participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aumenta a cada ano. O quadro indica o percentual de medalhistas de ouro, por região, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009:

Região	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	2%	2%	1%	2%	1%
Nordeste	18%	19%	21%	15%	19%
Centro-Oeste	5%	6%	7%	8%	9%
Sudeste	55%	61%	58%	66%	60%
Sul	21%	12%	13%	9%	11%

Em relação às edições de 2005 a 2009 da OBMEP, qual o percentual médio de medalhistas de ouro da região Sudeste?

A) 55,0%
B) 58,0%
C) 60,5%
D) 60,0%
E) 75,0%

ATIVIDADE 10

Uma empresa de telemarketing precisava contratar uma pessoa para ocupar uma vaga de assistente administrativo. Para concorrer a vaga, o candidato deveria ser observado por uma semana, sendo avaliado em quatro atributos, de pesos diferentes: “rapidez no atendimento” (peso 3); “clareza nas informações prestadas” (peso 5); “cortesia e gentileza no atendimento” (peso 2); e “pontualidade” (peso 1). O candidato contratado será aquele que obtiver a maior média ponderada das notas em relação aos atributos e seus pesos. Apenas 5 pessoas se candidataram à vaga e passaram pela semana de avaliação. As respectivas notas que receberam foram disponibilizadas na tabela a seguir:

Atributo	Peso	Notas				
		Candidato A	Candidato B	Candidato C	Candidato D	Candidato E
Rapidez no atendimento	3	5	1	4	3	4
Clareza nas informações prestadas	5	1	4	5	3	2
Cortesia e gentileza no atendimento	2	2	2	2	3	4
Pontualidade	1	5	2	4	4	5

Quem garantiu a vaga para assistente administrativo foi o:

A) candidato A.
B) candidato B.
C) candidato C.
D) candidato D.
E) candidato E.

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 1

(ENEM 2024) Ao calcular a média de suas notas em 4 provas, um estudante dividiu, por engano, a soma das notas por 5. Com isso, a média obtida foi 1 unidade menor do que deveria ser, caso fosse calculada corretamente. O valor correto da média das notas desse estudante é

A) 4.
B) 5.
C) 6.
D) 19.
E) 21.

QUESTÃO 2

(ENEM 2024) A umidade relativa do ar é um dos indicadores utilizados na meteorologia para fazer previsões sobre o clima. O quadro apresenta as médias mensais, em porcentagem, da umidade relativa do ar em um período de seis meses consecutivos em uma cidade.

Meses	Maio	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.
Média mensal da umidade relativa do ar (%)	66	64	54	46	60	64

Nessa cidade, a mediana desses dados, em porcentagem, da umidade relativa do ar no período considerado foi

A) 56.
B) 58.
C) 59.
D) 60.
E) 62.

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 3

(ENEM 2023) A nota final de um estudante em uma disciplina é dada pela mediana das notas de suas quatro provas. Cinco estudantes dessa disciplina obtiveram as notas apresentadas no quadro.

Estudante	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 4
I	85	45	90	45
II	80	70	70	75
III	75	75	75	55
IV	85	35	35	90
V	60	70	70	75

O professor dessa disciplina pediu a cada estudante que calculasse sua nota final e lhe apresentasse o resultado obtido. Os resultados informados pelos estudantes foram:

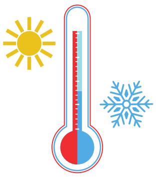
- estudante I: 77;
- estudante II: 70;
- estudante III: 70;
- estudante IV: 60;
- estudante V: 70.

Qual(is) estudante(s) acertou(aram) sua nota final?

A) I
B) III
C) II e III
D) II e V
E) IV e V

INVESTIGANDO A VARIABILIDADE DOS DADOS

Depois de aprendermos sobre média, mediana e moda, que nos ajudam a identificar um valor típico em um conjunto de dados, surge uma nova pergunta: será que todos os dados estão próximos desse valor típico ou eles variam bastante?



Imagine que três cidades registraram uma média de temperatura de 25°C ao longo de uma semana. À primeira vista, poderíamos pensar que o clima nessas cidades é parecido. No entanto, ao analisarmos os dados mais de perto, percebemos diferenças significativas.

A seguir, observe a tabela com as temperaturas registradas em cada cidade ao longo da semana:

Dia	Cidade A	Cidade B	Cidade C
1	25	10	22
2	25	15	23
3	25	20	25
4	25	25	26
5	25	30	27
6	25	35	29
7	25	40	30
Média	**25**	**25**	**25**

Note que, embora a média das três cidades seja a mesma (25°C), o comportamento das temperaturas é bem diferente.

- Na Cidade A temperatura se manteve estável todos os dias, sempre em 25°C.
- Na Cidade B, houve uma grande variação: em alguns dias, a temperatura chegou a 10°C, enquanto em outros ultrapassou 40°C, revelando um clima bastante instável.
- Na Cidade C, as temperaturas oscilaram suavemente entre 22°C e 30°C, permanecendo próximas da média.

Essas diferenças evidenciam que a média sozinha não é suficiente para descrever completamente um conjunto de dados, pois ela não mostra o quanto os valores se afastam ou se aproximam do valor central. Por isso, é necessário utilizar as **medidas de dispersão**, que permitem avaliar a variabilidade dos dados e compreender se eles estão concentrados ou espalhados em torno da média.

Medidas de Dispersão

As **medidas de dispersão** são ferramentas estatísticas que indicam o grau de variação ou de espalhamento dos dados em relação à média ou a outro valor central. Elas mostram o quanto os valores de um conjunto estão próximos ou distantes entre si, ajudando a compreender se os dados são homogêneos (sem muita variação) ou heterogêneos (com grande variação). Entre as principais medidas que estudaremos estão: amplitude, variância e desvio-padrão.

- *Amplitude*

A **amplitude** (A) corresponde à diferença entre o maior e o menor valor de um conjunto de dados.

A tabela abaixo apresenta o valor do salário de cada um dos funcionários do nosso problema inicial:

Funcionário	Salário no setor A (R$)	Salário no setor B (R$)
1	6 500	10 000
2	4 000	4 000
3	4 500	3 000
4	5 000	3 000

Desse modo podemos determinar a amplitude do salário de cada um dos dois setores fazendo a diferença entre o maior e o menor salário:

Setor A: $R\$\ 6\ 500{,}00 - R\$\ 4\ 000{,}00 = R\$\ 2\ 500{,}00$

Setor B: $R\$\ 10\ 000{,}00 - R\$\ 3\ 000{,}00 = R\$\ 7\ 000{,}00$

- *Variância*

A **variância** (σ^2) é uma medida usada para revelar o grau de variabilidade de um conjunto de dados. A variância é calculada da seguinte forma:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Cada termo do numerador corresponde ao quadrado da diferença entre um valor observado e o valor médio e n é o número total de elementos analisados. Essa diferença traduz o quanto um valor observado se distancia da média aritmética.

No nosso exemplo sabemos que a média é igual a R$ 5 000, portanto, podemos calcular a variância do salário de cada um dos dois setores:

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 &= \frac{(6\,500 - 5\,000)^2 + (4\,000 - 5\,000)^2 + (4\,500 - 5\,000)^2 + (5\,000 - 5\,000)^2}{4} \\ &= \frac{1\,500^2 + (-1\,000)^2 + (-500)^2 + 0^2}{4} = \frac{3\,500\,000}{4} = 875\,000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_B^2 &= \frac{(10\,000 - 5\,000)^2 + (4\,000 - 5\,000)^2 + (3\,000 - 5\,000)^2 + (3\,000 - 5\,000)^2}{4} \\ &= \frac{5\,000^2 + (-1\,000)^2 + (-2\,000)^2 + (-2\,000)^2}{4} = \frac{34\,000\,000}{4} = 8\,500\,000\end{aligned}$$

A unidade de variância é o quadrado da unidade dos dados, o que gera uma incompatibilidade. Para uniformizar as unidades, definiremos o desvio-padrão σ.

- *Desvio-Padrão*

Chamamos de **desvio-padrão** (σ) à raiz quadrada da variância.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

Para o exemplo inicial temos:

$$\sigma_A = \sqrt{875\,000} \approx 935,41.$$

$$\sigma_B = \sqrt{8\,500\,000} \approx 2\,915,48.$$

EXERCÍCIO 1. Segundo a série 'IJSN no Censo 2022', do Instituto Jones do Santos Neves, o Espírito Santo conta com 14410 pessoas indígenas. Os cinco municípios com as maiores populações indígenas do estado são relacionados na tabela abaixo com sua respectiva população indígena.

Município	População Indígena
Aracruz	7 425
Serra	1 326
Vila Velha	866
São Mateus	836
Vitória	642

Adaptado de IJSN. Disponível em: https://ijsn.es.gov.br/Media/IJSN/PublicacoesAnexos/S%C3%ADnteses/IJSN_Censo_2022-Populacao_Indigena.pdf. Acesso em 04 de dezembro de 2024.

Determine a amplitude, a variância e o desvio-padrão da população indígena nesses cinco municípios.

SOLUÇÃO. Para determinarmos a amplitude devemos calcular a diferença entre o maior e o menor valor, obtendo assim, $A = 7\,425 - 642 = 6\,783$.
Para o cálculo da variância e desvio-padrão devemos calcular a média aritmética da população indígena nesses municípios:

$$Média = \frac{7\,425 + 1\,326 + 866 + 836 + 642}{5} = \frac{11\,095}{5} = 2\,219.$$

Com a média calculada podemos seguir para o cálculo da variância. Vamos fazer de uma outra maneira, utilizando uma tabela. Observe, na sequência:

$$x_i - \bar{x} \qquad\qquad (x_i - \bar{x})^2$$

Município	População Indígena	Média	População Indígena - média	(População Indígena - média)²
Aracruz	7 425	2 219	5206	27102436
Serra	1 326	2 219	-893	797449
Vila Velha	866	2 219	-1353	1830609
São Mateus	836	2 219	-1383	1912689
Vitória	642	2 219	-1577	2486929
		Total		34130112

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_5 - \bar{x})^2$$

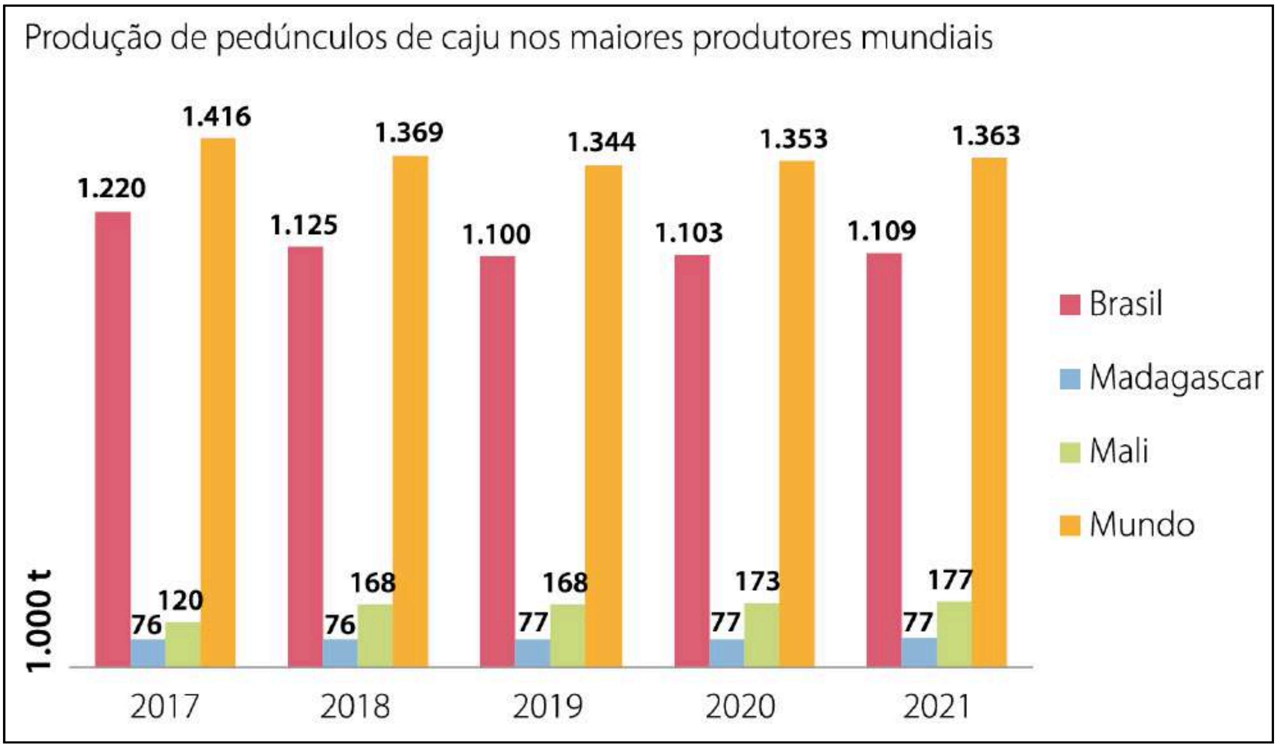
Portanto, a variância é igual a

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_5 - \bar{x})^2}{5} = \frac{34\,130\,112}{5} = 6\,826\,022,4.$$

Logo, o desvio-padrão é

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{6\,826\,022,4} \approx 2\,612,67.$$

EXERCÍCIO 2. O gráfico abaixo apresenta a produção de caju entre os maiores produtores do mundo.



Disponível em: https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/doc/1153294/1/BRASIL-50-ALIMENTOS.pdf. Acesso em 05 de dezembro de 2024.

Calcule o desvio padrão da produção de caju, entre os anos de 2017 e 2021, nos três países que são os maiores produtores do mundo.

SOLUÇÃO. O primeiro passo para solucionarmos a questão é determinar a média da produção de caju (x) nos três países:

$$\bar{x}_{Brasil} = \frac{1\,220 + +1\,125 + 1\,100 + 1\,103 + 1\,109}{5} = \frac{5\,657}{5} = 1\,131,4;$$

$$\bar{x}_{Madagascar} = \frac{76 + 76 + 77 + 77 + 77}{5} = \frac{383}{5} = 76,6;$$

$$\bar{x}_{Madagascar} = \frac{120 + 168 + 168 + 173 + 177}{5} = \frac{806}{5} = 161,2.$$

De posse das médias, prosseguimos para o cálculo da variância:

Brasil

x_i	$\bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1220	1131,4	88,6	7849,96
1125	1131,4	-6,4	40,96
1100	1131,4	-31,4	985,96
1103	1131,4	-28,4	806,56
1109	1131,4	-22,4	501,76
		Total:	*10 185,2*

Madagascar

x_i	$\bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
76	76,6	-0,6	0,36
76	76,6	-0,6	0,36
77	76,6	0,4	0,16
77	76,6	0,4	0,16
77	76,6	0,4	0,16
		Total:	*1,2*

Mali

x_i	$\bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
120	161,2	-41,2	1697,44
168	161,2	6,8	46,24
168	161,2	6,8	46,24
173	161,2	11,8	139,24
177	161,2	15,8	249,64
		Total:	*2 178,8*

Portanto,

$$\sigma^2_{Brasil} = \frac{10\,185,2}{5} = 2\,037,04 \Rightarrow \sigma_{Brasil} = \sqrt{2\,037,04} = 45,13.$$

$$\sigma^2_{Madagascar} = \frac{1,2}{5} = 0,24 \Rightarrow \sigma_{Madagascar} = \sqrt{0,24} = 0,49.$$

$$\sigma^2_{Mali} = \frac{2\,178,8}{5} = 435,76 \Rightarrow \sigma_{Mali} = \sqrt{435,76} = 20,87.$$

EXERCÍCIO 3. O ganho genético representa superioridade genética dos descendentes em relação à média da geração dos pais, sendo diretamente proporcional à variabilidade da característica que se tem interesse.

Disponível em: https://www.alice.cnptia.embrapa.br/alice/bitstream/doc/661781/1/22908.pdf.
Acesso em 10 de dezembro de 2024.

Um geneticista, estudando a altura de três espécies de flores, sendo cinco amostras de cada, observou os valores apresentados na tabela abaixo:

População	**Altura (cm)**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Espécie 1	24	24	30	20	22
Espécie 2	30	21	12	32	25
Espécie 3	16	23	18	27	36

Esse geneticista deseja escolher a(s) espécies que podem gerar o maior ganho genético, baseado apenas nas informações apresentadas na tabela acima. Nessas condições, qual(is) espécies ele deverá selecionar?

A) Espécie 1
B) Espécie 2
C) Espécie 3
D) Espécies 1 e 2
E) Espécies 2 e 3

SOLUÇÃO. A média da altura das três espécies são:

$$\overline{X}_1 = \frac{24+24+30+20+22}{5} = \frac{120}{5} = 24 \qquad \overline{X}_2 = \frac{30+21+12+32+25}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

$$\overline{X}_3 = \frac{16+23+18+27+36}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

Com essa informação podemos calcular a variância da altura de cada uma das três espécies:

$$\sigma_1^2 = \frac{(24-24)^2+(24-24)^2+(30-24)^2+(20-24)^2+(22-24)^2}{5} = \frac{0+0+36+16+4}{5} = \frac{56}{5} = 11,2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(30-24)^2+(21-24)^2+(12-24)^2+(32-24)^2+(25-24)^2}{5} = \frac{36+9+144+64+1}{5} = \frac{254}{5} = 50,8$$

$$\sigma_3^2 = \frac{(16-24)^2+(23-24)^2+(18-24)^2+(27-24)^2+(36-24)^2}{5} = \frac{64+1+36+9+144}{5} = \frac{254}{5} = 50,8$$

A espécie que apresentará maior ganho genético é aquela que apresentará maior desvio-padrão, consequentemente, a maior variância. Portanto, ele deverá selecionar as espécies 2 ou 3, assim, a alternativa correta é a letra **E**.

Atividades

ATIVIDADE 1

A Pesquisa Nacional da Cesta Básica de Alimentos (PNCBA) é um levantamento contínuo dos preços de um conjunto de produtos alimentícios considerados essenciais. A PNCBA foi implantada em São Paulo em 1959, a partir dos preços coletados para o cálculo do Índice de Custo de Vida (ICV) e, ao longo dos anos, foi ampliada para outras capitais. Hoje, é realizada em 17 Unidades da Federação e permite a comparação de custos dos principais alimentos básicos consumidos pelos brasileiros.

Dados do Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (DIEESE) evidenciaram a variação no preço da cesta básica no município de Vitória durante os meses de janeiro a novembro de 2024:

Preço da Cesta Básica - Vitória (JAN/NOV2024)

Mês	Preço
Janeiro	R$ 719,30
Fevereiro	R$ 731,83
Março	R$ 729,34
Abril	R$ 726,82
Maio	R$ 723,91
Junho	R$ 718,43
Julho	R$ 688,45
Agosto	R$ 684,21
Setembro	R$ 694,87
Outubro	R$ 708,06
Novembro	R$ 726,51

Fonte: https://www.dieese.org.br

Determine a amplitude dos preços da cesta básica no município de Vitória entre janeiro e novembro.

ATIVIDADE 2

Em 22 de outubro de 2024, o portal de notícias A Gazeta trouxe uma matéria intitulada “Saiba qual o salário dos prefeitos das cidades do Espírito Santo”. Nessa reportagem, são apresentados os salários dos 78 prefeitos do estado do Espírito Santo. O gráfico a seguir é um recorte dos cinco maiores salários dos prefeitos do Espírito Santo evidenciados nessa reportagem.

Cinco maiores salários - Prefeitos ES (2024)

Fonte: https://www.agazeta.com.br/es/politica/saiba-qual-o-salario-dos-prefeitos-das-cidades-do-espirito-santo-1024

Determine o grau de variabilidade (variância) e o desvio-padrão desses cinco salários.

ATIVIDADE 3

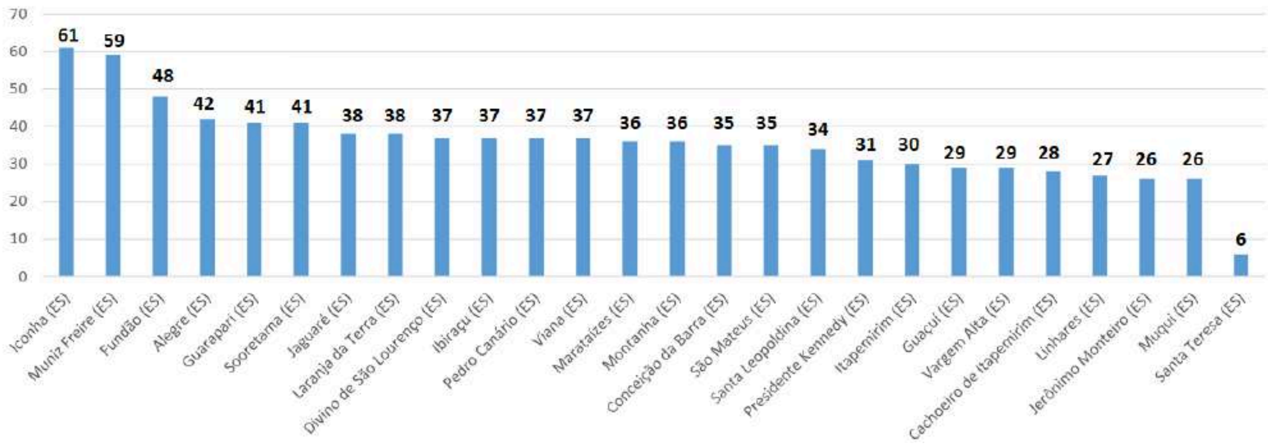
Sete candidatos foram classificados em um concurso. Para tal classificação o candidato deveria obter média aritmética da pontuação igual ou superior a 14. Seria aprovado no concurso aquele candidato que apresentasse a maior nota média e, em caso de empate, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. Na tabela a seguir estão apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos sete candidatos.

Candidato	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio-Padrão
Andreia	10	18	17	15	17	3,5590
Felipe	18	9	18	15	18	4,2426
Marcos	14	15	16	15	15	0,8165
Paulo	8	19	18	15	18	4,9666
Priscilla	17	15	13	15	15	1,6330
Valter	17	14	14	15	14	1,4142
Zilma	14	14	14	14	14	0,0000

Qual foi o candidato aprovado? Por quê?

ATIVIDADE 4

A idade mediana é um indicador que divide uma população entre os 50% mais jovens e os 50% mais velhos. O gráfico a seguir demonstra a idade mediana da população quilombola residente no Espírito Santo.



Fonte: https://ijsn.es.gov.br/Media/IJSN/PublicacoesAnexos/S%C3%ADnteses/IJSN_Censo_2022-Quilombola.pdf

Determine a média, a moda, a mediana e a amplitude desse conjunto de dados.

ATIVIDADE 5

A tabela a seguir representa os valores do salário mínimo dos últimos 5 anos, segundo o Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (DIEESE).

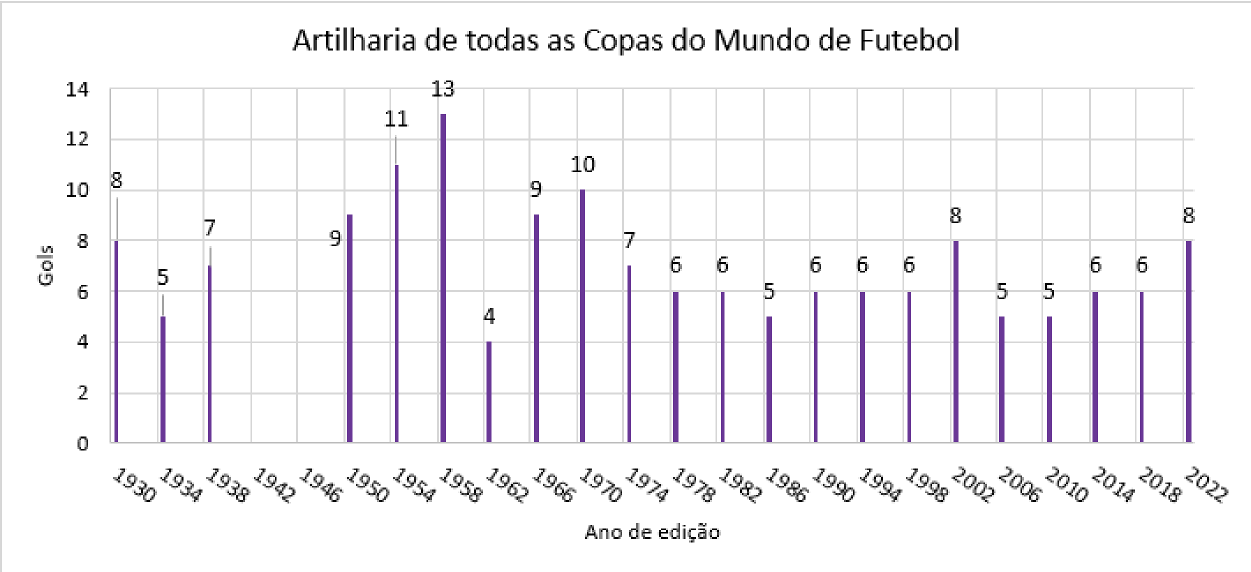
Ano	Salário mínimo nominal
2024	R$ 1 412,00
2023	R$ 1 320,00
2022	R$ 1 212,00
2021	R$ 1 100,00
2020	R$ 1 045,00

Fonte: https://www.dieese.org.br/analisecestabasica/salarioMinimo.html#2024

Determine o desvio-padrão dos salários observados.

ATIVIDADE 6

A Copa do Mundo de Futebol Masculino acontece de quatro em quatro anos desde 1930, tendo como exceções os anos de 1942 e 1946, cujo evento não pôde ser realizado devido à Segunda Guerra Mundial. O gráfico a seguir traz a artilharia de cada edição.



Fonte: https://www.lance.com.br/galerias/saiba-quem-foi-o-artilheiro-de-cada-edicao-de-copa-do-mundo/

Utilizando uma calculadora ou uma planilha eletrônica, descreva o desvio-padrão para demonstrar se a quantidade de gols em cada edição se comporta de uma forma mais homogênea ou heterogênea.

ATIVIDADE 7

Imagine um conjunto de dados referentes a determinadas notas de uma avaliação de matemática de uma turma da 3ª série do ensino médio. Não tendo nenhuma nota igual a zero, esse conjunto de dados apresenta uma variância igual a zero. Dessa forma, podemos afirmar que:

A) a média aritmética simples desse conjunto de dados também valerá zero.
B) a média aritmética ponderada desse conjunto de dados também valerá zero.
C) a moda desse conjunto de dados também valerá zero.
D) a media desse conjunto de dados também valerá zero.
E) o desvio-padrão desse conjunto de dados também valerá zero.

ATIVIDADE 8

Cinco conjuntos de dados apresentam os seguintes desvios-padrão:

- Conjunto A: 0,25400
- Conjunto B: 0,25000
- Conjunto C: 0,24950
- Conjunto D: 0,23478
- Conjunto E: 0,26100

É correto afirmar que, o conjunto que possui os dados mais heterogêneos é:

A) o conjunto A.
B) o conjunto B.
C) o conjunto C.
D) o conjunto D.
E) o conjunto E.

ATIVIDADE 9

Um meteorologista analisou o clima no município de Colatina durante uma determinada semana do mês de janeiro de 2024 e registrou os valores de máxima no quadro I. Já no quadro II, é possível observar a classificação para a variabilidade da temperatura de acordo com o desvio-padrão.

Quadro I

Data	14/01	15/01	16/01	17/01	18/01	19/01	20/01
Dia da semana	Domingo	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Sábado
Temperatura máxima	33 ºC	34 ºC	33 ºC	34 ºC	34 ºC	35 ºC	35 ºC

Quadro II

Variabilidade	Desvio-padrão da temperatura (ºC)
Extremamente baixa	$0 < \sigma \leq 2$
Baixa	$2 < \sigma \leq 4$
Moderada	$4 < \sigma \leq 6$
Alta	$6 < \sigma \leq 8$
Extremamente alta	$\sigma > 8$

Com base nas informações apresentadas, a variabilidade da temperatura durante aquela semana foi:

A) Extremamente baixa.
B) Baixa.
C) Moderada.
D) Alta.
E) Extremamente alta.

ATIVIDADE 10

Dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) evidenciaram que, no ano de 2022, a região Centro-Oeste contribuiu com 10,7% do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil, conforme pode-se apurar na tabela a seguir.

Participação no PIB Brasileiro - Região Centro-Oeste (2022)

Estado	Participação do PIB (%)
Mato Grosso do Sul	1,7
Mato Grosso	2,5
Goiás	3,2
Distrito Federal	3,3

Fonte: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/41893-em-2022-pib-cresce-em-24-unidades-da-federacao

É válido afirmar que, a média e o desvio padrão desses dados são, aproximadamente:

A) 2,68 e 1,34
B) 2,68 e 0,41
C) 2,68 e 0,64
D) 2,68 e 1,28
E) 2,68 e 2,68

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 1

(ENEM 2023) A amplitude é uma medida estatística que detecta a variabilidade dos dados de uma amostra. Ela pode ser utilizada como critério de qualidade da produção na indústria de peças, indicando, por exemplo, a necessidade do descarte de um lote defeituoso.

Uma fábrica analisou cinco unidades de cada um dos cinco lotes da produção de um tipo de peça que, por projeto, devem ter comprimento igual a 10 cm. As medidas, em centímetro, dessas unidades estão distribuídas a seguir:

- **lote I:** 9,80; 10,30; 10,30; 10,30 e 10,30;
- **lote II:** 10,55; 10,58; 10,58; 10,60 e 10,60;
- **lote III:** 9,80; 9,80; 10,00; 10,00 e 10,20;
- **lote IV:** 9,90; 9,90; 9,90; 10,20 e 10,20;
- **lote V:** 9,30; 9,30; 9,50; 9,50 e 9,50.

Foi determinado o descarte do lote que apresentasse a maior amplitude. De acordo com o critério adotado, a fábrica descartará o lote

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

A NATUREZA DA ESTATÍSTICA E CONCEITOS BÁSICOS DE ESTATÍSTICA DESCRITIVA

Em nosso dia a dia, frequentemente estamos fazendo observações de fenômenos e gerando dados. Os professores analisam dados de alunos, os médicos analisam resposta do paciente a tratamentos, e todos nós, ao lermos jornais e revistas, vemos resultados estatísticos provenientes do censo demográfico, de pesquisas eleitorais, da bolsa de valores etc.

Os dados podem provir de estudos observacionais ou de experimentos planejados. Ao acompanharmos o desempenho de um processo produtivo em sua forma natural, estamos fazendo um estudo observacional; ao alterar de forma proposital alguma variável do processo para verificar seus resultados, estamos realizando um experimento.

Atualmente, aceita-se, como definição de Estatística, “a arte de aprender com os dados”. Essa área diz respeito à coleta de dados, sua descrição e análise, que frequentemente conduz a tirar conclusões. Ronald Fisher foi o homem que instituiu o método estatístico (aqui chamado de pesquisa estatística) como método científico, confirmando a Estatística como uma ciência e inserindo-a entre todas as demais ciências, como administração, economia, agricultura, medicina, farmácia e psicologia.

Mas, antes de vermos como funciona uma pesquisa estatística devemos nos atentar a alguns conceitos básicos:

Estatística descritiva

A parte da Estatística que lida com a descrição e resumo dos dados.

Estatística inferencial

A parte da Estatística que se ocupa de tirar conclusões a partir dos dados.

População

Uma coleção de elementos de interesse.

Amostra

Um subgrupo da população que se pretende estudar.

Pesquisa censitária

É o tipo de levantamento que obtém informações de todas as pessoas de um grupo.

Pesquisa amostral

Para esse tipo de pesquisa escolhe-se algumas pessoas do grupo.

Variável
É alguma característica de interesse que é medida em cada elemento da amostra ou população.

As variáveis podem ser classificadas de 4 modos:

VARIÁVEIS

QUANTITATIVAS

DISCRETA	**CONTÍNUA**
Corresponde aos números naturais ou inteiros.	Corresponde aos números reais, representados por decimais.

QUALITATIVAS

NOMINAL	**ORDINAL**
Informa as características, mas não há ordem entre elas.	Informa as características e há ordem entre elas.

Vejamos alguns exemplos referentes a esses conceitos:

Exemplo 1 *(Dante e Viana, 2020) - A produção de uma vacina passa por várias etapas a fim de garantir a segurança de quem será vacinado e a eficácia do produto. Depois que toda a etapa laboratorial é realizada, é necessário testar a vacina em um pequeno grupo de pessoas voluntárias, a fim de avaliar sua eficácia e os efeitos colaterais, para, somente então, liberar o uso para toda a população. Suponha que 10% das pessoas de um grupo de pacientes composto de 200 mulheres e 300 homens se voluntariaram para o teste de uma vacina.*

Nesse caso a população do teste são 500 pessoas e a amostra são as 50 pessoas que se voluntariaram (10% de 500). Além disso, trata-se de uma pesquisa amostral, pois apenas parte população foi investigada.

Exemplo 2 *(Dante e Viana, 2020) - Em uma rodoviária, dois funcionários ficaram responsáveis por realizar uma pesquisa para entender melhor o perfil de quem utiliza ônibus para viajar. Veja o questionário:*

1. *Qual é o seu estado civil?*
2. *Você possui veículo próprio?*
3. *Quantas vezes por mês você utiliza este terminal rodoviário?*
4. *Qual é a principal razão desta viagem: lazer, negócios ou visita à família?*
5. *Qual é, aproximadamente, o tempo de viagem até o destino final?*
6. *Em relação aos serviços deste terminal, você está: satisfeito, parcialmente satisfeito ou insatisfeito?*
7. *Qual é a quantia mensal que você costuma gastar neste terminal, incluindo passagem, alimentação, entretenimento, etc.?*

Podemos classificar as variáveis mensuradas em cada pergunta da seguinte forma:

Variável Quantitativa Discreta	Variável Quantitativa Contínua	Variável Qualitativa Nominal	Variável Qualitativa Ordinal
Pergunta 3	Perguntas 5 e 7	Perguntas 1, 2 e 4	Pergunta 6

A pergunta 5 pode, também, ser classificada como uma Variável Quantitativa Discreta caso ela seja respondida em minutos, no entanto, como adotamos a hora como unidade mais usual para tempo, ela é classificada como Variável Quantitativa Contínua.

Exemplo 3 - *Santa Catarina é o estado do Brasil com mais pessoas que se declaram leitoras, segundo a 6ª edição da pesquisa Retratos da Leitura no Brasil, divulgada nesta quarta-feira (18). No território catarinense, 64% se declaram leitores. A média brasileira é de 47%. [...] É a primeira vez na série histórica que o levantamento conclui que a maioria dos brasileiros não leem livros. [...] Foram feita 5.504 entrevistas com pessoas com idade mínima de 5 anos, alfabetizadas ou não, em 208 municípios. A amostra permite a leitura para 21 estados e o Distrito Federal. A exceção são os estados de Rondônia, Acre, Roraima, Amapá e Tocantins, cujos resultados foram lidos de forma conjunta. A pesquisa foi feita entre 30 de abril e 31 de julho deste ano. Foram feitas entrevistas domiciliares face a face por meio de tablets com um questionário de 147 perguntas. O levantamento considera tanto a leitura de livros impressos quanto digitais, além de não restringir qualquer gênero, incluindo didáticos, bíblia e religiosos.*

Disponível em: https://g1.globo.com/sc/santa-catarina/noticia/2024/12/18/sc-tem-maior-numero-de-leitores-do-brasil-aponta-pesquisa.ghtml.Acesso em 18 de dezembro de 2024.

Essa pesquisa é amostral, pois foi realizada apenas com 5 504 habitantes de todo o Brasil e a população para a pesquisa são todos os habitantes do Brasil com pelo menos 5 anos de idade. O instrumento de coleta desta pesquisa foi um questionário com 147 perguntas.

O Método Estatístico

O método estatístico refere-se ao processo da pesquisa estatística, podendo ser aplicado nas mais diversas áreas do conhecimento. Veja abaixo as fases (passos) que o compõem:

Fase 1: Nesta fase ocorre o planejamento do estudo, define-se o problema a ser estudado, a população de interesse e se o estudo vai ser censitário ou amostral. Também devem ser escolhidas as variáveis que serão medidas e a forma como essas medidas serão feitas.

Fase 2: Neste momento é realizada a coleta dos dados por meio das variáveis. Essa fase é importante para a pesquisa, se não for bem executada todo o resultado é comprometido.

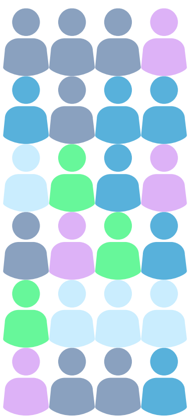
Fase 3: Após a coleta de dados, eles são conferidos e tabulados.

Fase 4: Os dados tabulados na fase anterior são, então, analisados para que seja possível tirar conclusões dos mesmos, são elaborados tabelas e gráficos nessa fase da pesquisa.

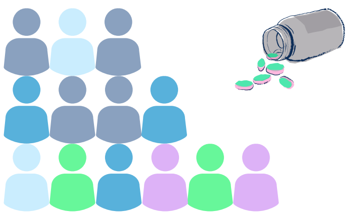
Fase 5: Esta fase final consiste na apresentação do relatório final da pesquisa. Aqui são apresentados os gráficos e tabelas juntamente com sua descrição e conclusões obtidas.

Considere a seguinte a situação: uma indústria farmacêutica está desenvolvendo um novo remédio que auxilia a cicatrização de feridas para pessoas diabéticas; já executou os procedimentos laboratoriais e chegou a fase de teste em humanos e, para essa etapa de testes, ela deve seguir os seguintes passos:

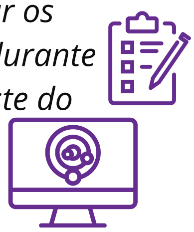
1. *Determinar a população da pesquisa: pessoas com diabetes.*



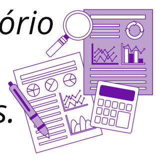
2. *Selecionar um grupo de pacientes que receberam o medicamento e serão acompanhados pela empresa.*



3. *Coletar e tabular os dados obtidos durante o período de teste do medicamento.*



4. *Os dados são analisados e é gerado um relatório interpretando os resultados obtidos.*



5. *Os resultados obtidos são comunicados para a equipe de desenvolvimento do medicamento e toma-se decisões sobre como serão as próximas etapas de teste e lançamento.*

Cuidados com a Representação Gráfica

Na seção anterior você teve contato com os mais diversos tipos de gráficos: gráfico de barras, linha, setores, histograma e diagrama de caixa. Todos esses instrumentos devem ser usados com muita cautela, de forma adequada e ética para passar a informação de modo correto e sem causar interpretações equivocadas.

Nesta seção, discutiremos alguns problemas relacionados com a apresentação de gráficos na mídia (jornal, televisão, redes sociais etc.) e como podemos tratar e resolver os problemas apresentados.

1

O gráfico, de acordo com a notícia veiculada, busca mostrar a quantidade de gás natural que é reinjetada nos poços durante a extração de petróleo.

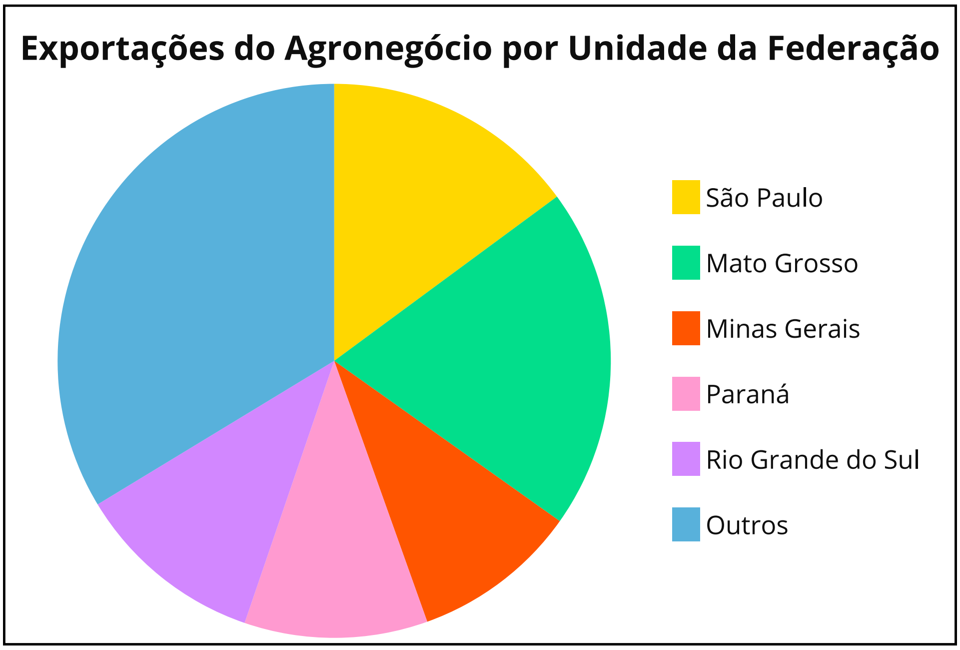
Disponível em: https://www.poder360.com.br/economia/brasil-reinjeta-50-da-producao-de-gas-natural-em-2022/. Acesso em 18 de dezembro de 2024.

Alguns problemas podem ser percebidos nesse gráfico:

1. Não há especificação de onde é o zero, isto é, de onde o gráfico se inicia no sentido vertical.
2. Como consequência do ponto 1, o gráfico apresenta um problema de escala: no ano de 2020 a altura do valor 13,3 é apenas o dobro do valor 2,7; no ano de 2010 a altura no valor 22,9 não parece ultrapassar três vezes a altura do valor 4,4 e, apenas no ano de 2022 o gráfico aparenta atender uma escala.
3. O gráfico de barras apresentado também contém um erro de aproximação para o ano de 2000, o correto seria 20% e não 21% como indicado, veja abaixo:

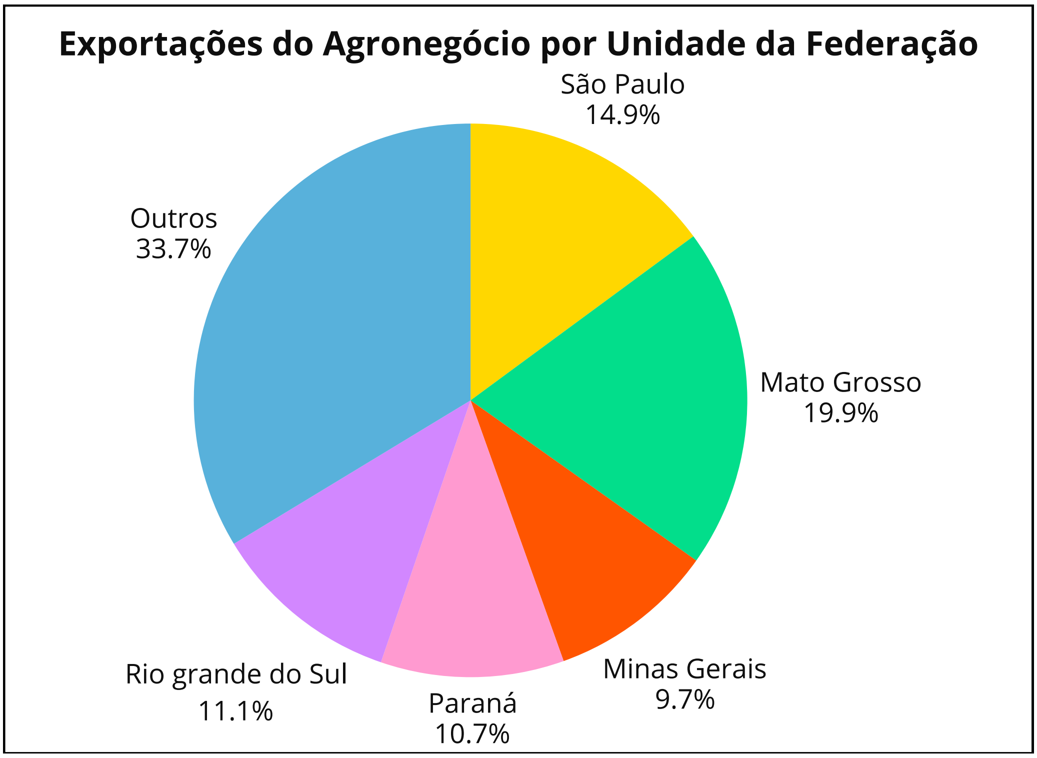
$$\frac{2,7}{13,3} \cdot 100\% = 0,20300 \cdot 100\% \approx 20\%.$$

2



Disponível em: https://www.gov.br/agricultura/pt-br/assuntos/politica-agricola/todas-publicacoes-de-politica-agricola/agropecuaria-brasileira-em-numeros/abn-04-2022.pdf. Acesso em 18 de dezembro de 2024.

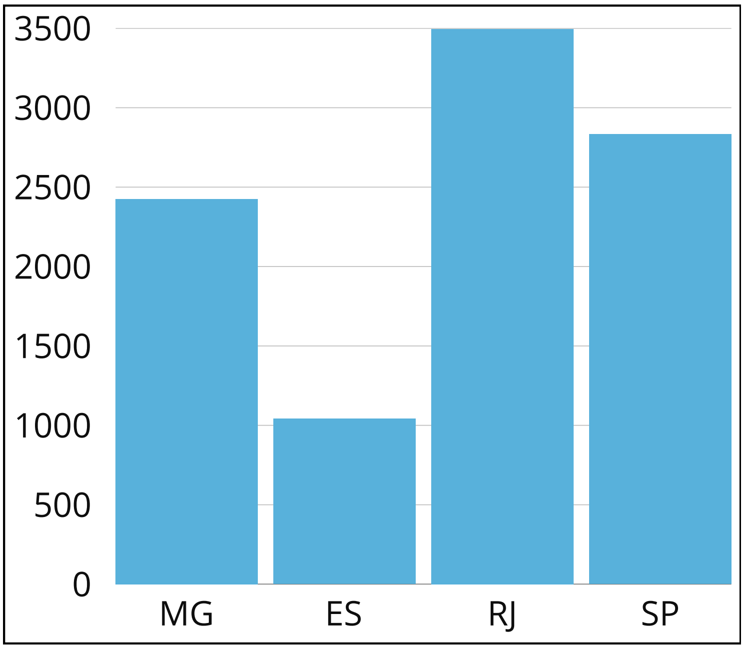
O gráfico de Setores deve ser utilizado com muito cuidado. No gráfico acima, que representa a exportação do Agronegócio no Brasil em 2022 temos um problema: como determinar a parcela que representa cada estado? Ao observar o gráfico poderíamos dizer que Mato Grosso é o maior exportador, mas entre Paraná, Rio Grande do Sul e Minas Gerais parece não haver diferença. Para solucionar o problema o ideal é fazer um ajuste para que o valor referente a cada estado seja mostrado no gráfico:

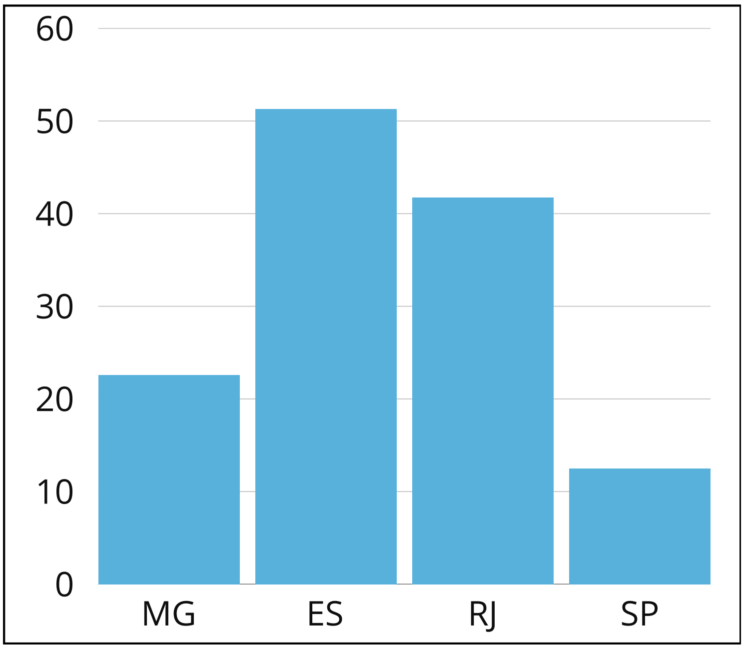


Disponível em: https://www.gov.br/agricultura/pt-br/assuntos/politica-agricola/todas-publicacoes-de-politica-agricola/agropecuaria-brasileira-em-numeros/abn-04-2022.pdf. Acesso em 18 de dezembro de 2024.

Outros Cuidados: quanto maior o número de categorias (Estados, no nosso exemplo) pior fica o gráfico e, se o intuito for a comparação, o ideal é não utilizar tal gráfico.

3





Gráficos do Atlas da Violência, realizado pelo Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada, sobre o número (primeiro gráfico) e taxa (segundo gráfico) de homicídio de homens na região Sudeste em 2022.

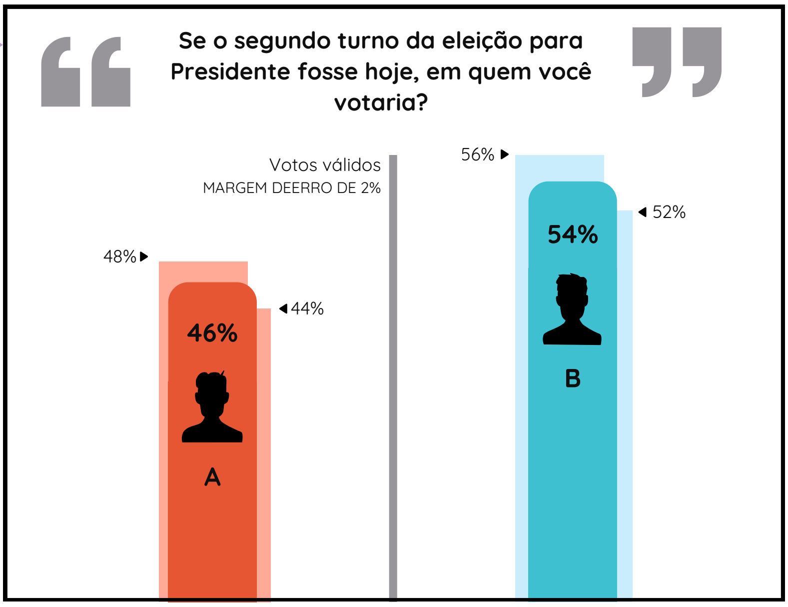
Disponível em: https://www.ipea.gov.br/atlasviolencia/filtros-series. Acesso em 18 de dezembro de 2024.

Ambos os gráficos apresentam os mesmos erros: não existe título para identificar sobre o que se fala e não existe legenda no eixo vertical para identificar o que representam esses números. Também não existe fonte. A única coisa que sabemos ao olhar o gráfico é que são valores referentes aos estados da região sudeste.

De posse da legenda lateral podemos destacar um segundo erro induzido na interpretação dos resultados: olhando apenas para o primeiro gráfico podemos ser levados a interpretar os estados do Rio de Janeiro e São Paulo como mais violentos, pois apresentam maior número de homicídios de homens, mas essa conclusão não pode ser dada tão rapidamente já que esses estados tem uma população muito superior ao estado do Espírito Santo. O correto é interpretar pelo segundo gráfico.

Nesse momento, nossa conclusão muda e o estado do Espírito Santo passa a ser o estado mais violento, apesar de apresentar o menor número absoluto de homicídios de homens em 2022.

4



O gráfico mostra o resultado da pesquisa de intenção de votos para o segundo turno da eleição presidencial.

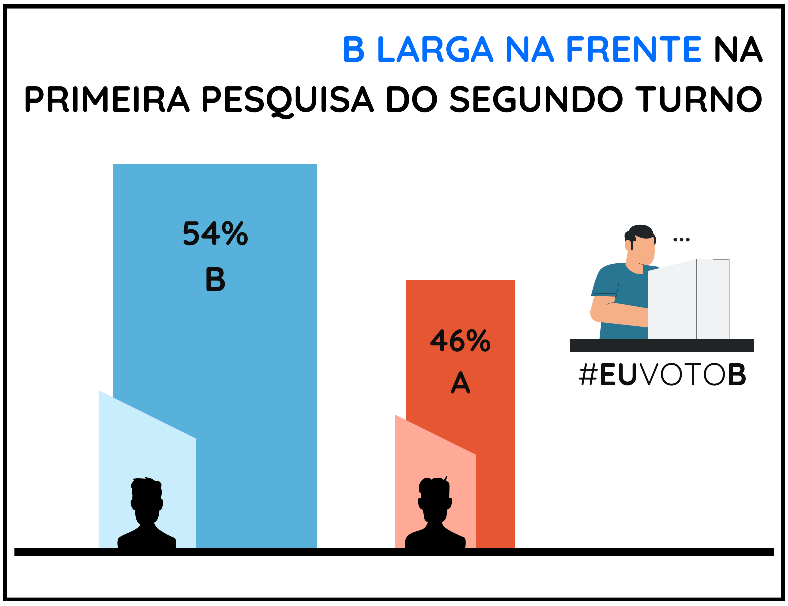


Gráfico postado na rede social do candidato B comemorando o resultado da pesquisa.

O primeiro gráfico apresentado comete dois erros: não apresentar a linha horizontal demarcando o valor zero e não apresentar a o eixo vertical com sua respectiva legenda, no entanto, nenhuma das ausências prejudica a interpretação e intuito da comunicação.

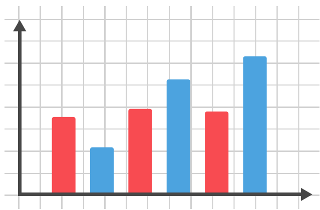
Já o segundo gráfico, apresentado em um cenário de rede social de um dos candidatos, utiliza de modificações do gráfico de barras para incorporar uma mensagem de vitória, mas erra estatisticamente ao fazê-lo. Do ponto de vista estatístico falta o eixo vertical com sua respectiva legenda e as barras devem, obrigatoriamente, sempre ter a mesma largura, diferindo apenas em altura.

Tipos de gráficos e seus usos

A importância dos gráficos está ligada, sobretudo, à facilidade e rapidez na absorção e interpretação das informações por parte do leitor e, também, às inúmeras possibilidades de ilustração e resumo dos dados apresentados. Mas nem todo gráfico se adequa a todas as situações, por isso é importante se atentar a quais tipos de gráficos podemos usar para extrair o máximo da informação.

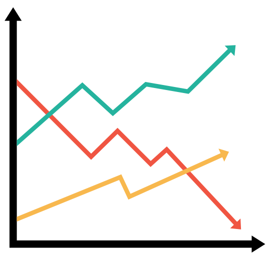
Abaixo, apresentamos os três principais tipos de gráficos, quando usar e algumas recomendações.

- *Barras/Colunas*



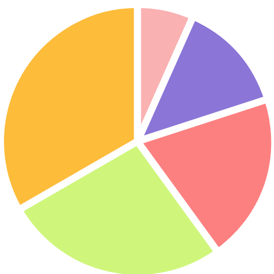
Quando uma variável assume k valores distintos, desenhamos barras cujos comprimentos são proporcionais às frequências correspondentes a cada um desses valores. As colunas devem sempre possuir a mesma largura e a distância entre elas deve ser constante.

- *Linhas*



Esse tipo de gráfico é muito usado quando se quer representar o comportamento de uma variável no decorrer do tempo de maneira contínua.

- *Setores*



Quando uma variável assume k valores distintos, dividimos um círculo em k setores circulares cujas medidas dos ângulos são proporcionais às frequências correspondentes a cada um desses valores. Os valores são expressos em números ou em percentuais (%). Não é recomendado o uso em três dimensões.

EXERCÍCIO 1. Para cada notícia abaixo identifique a população do estudo e a amostra utilizada.

Estilo de vida saudável contribui para combater a demência, diz pesquisa

Estudo mostra que, mesmo em pessoas com sinais de Alzheimer, uma boa alimentação e exercícios físicos podem ajudar a combater a doença

Viver um estilo de vida com foco em uma dieta nutritiva, exercícios regulares, consumo mínimo de álcool e outros hábitos saudáveis pode ajudar a manter seu cérebro afiado na velhice, dizem os médicos.

Para o estudo, foram realizadas autópsias em 586 pessoas que viviam em comunidades de aposentados, residências para idosos e residências individuais na área de Chicago e que participaram do *Rush Memory and Aging Project* entre 1997 e 2022. Os participantes, que viveram até uma idade média de 91 anos, passaram por testes cognitivos e físicos regulares e preencheram questionários anuais sobre seus estilos de vida por mais de duas décadas antes de morrerem.

Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/saude/estilo-de-vida-saudavel-contribui-para-combater-a-demencia-diz-pesquisa/. Acesso em 19 de dezembro de 2024.

Descubra por que 7 provavelmente é seu número da sorte

O escritor Alex Bellos resolveu descobrir os números da sorte favoritos das pessoas. O 7 ganhou em disparada! Descubra o porquê disso.

O escritor Alex Bellos resolveu descobrir os números da sorte favoritos das pessoas. Sua pesquisa na internet logo recebeu mais de 30 mil votos de numerófilos do mundo inteiro. Os eleitores citaram muitas razões para elegerem suas escolhas: em geral, uma data ou idade importante ou alguma outra associação positiva.

Em geral, os números ímpares venceram os pares. E Bellos acha que os números terminados em zero são, digamos, redondos demais para o gosto da maioria. “Quando dizemos 100, em geral não queremos dizer 100 exatamente, e sim por volta de 100”, disse ele à revista Nautilus. “Por que escolher como favorito um número tão vago?”

Disponível em: https://selecoes.ig.com.br/curiosidades/numero-da-sorte/. Acesso em 19 de dezembro de 2024.

SOLUÇÃO.

Estilo de vida saudável contribui para combater a demência, diz pesquisa

Estudo mostra que, mesmo em pessoas com sinais de Alzheimer, uma boa alimentação e exercícios físicos podem ajudar a combater a doença

Viver um estilo de vida com foco em uma dieta nutritiva, exercícios regulares, consumo mínimo de álcool e outros hábitos saudáveis pode ajudar a manter seu cérebro afiado na velhice, dizem os médicos.

Para o estudo, **foram realizadas autópsias em 586 pessoas que viviam em comunidades de aposentados, residências para idosos e residências individuais na área de Chicago e que participaram do *Rush Memory and Aging Project* entre 1997 e 2022**. Os participantes, que viveram até uma idade média de 91 anos, passaram por testes cognitivos e físicos regulares e preencheram questionários anuais sobre seus estilos de vida por mais de duas décadas antes de morrerem.

Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/saude/estilo-de-vida-saudavel-contribui-para-combater-a-demencia-diz-pesquisa/. Acesso em 19 de dezembro de 2024.

População: Pessoas que viviam em comunidades de aposentados, residências para idosos e residências individuais na área de Chicago e que participaram do Rush Memory and Aging Project entre 1997 e 2022;
Amostra: 586 dessas pessoas.

Descubra por que 7 provavelmente é seu número da sorte

O escritor Alex Bellos resolveu descobrir os números da sorte favoritos das pessoas. O 7 ganhou em disparada! Descubra o porquê disso.

O escritor Alex Bellos resolveu descobrir os números da sorte favoritos das pessoas. **Sua pesquisa na internet logo recebeu mais de 30 mil votos** de numerófilos do **mundo inteiro**. Os eleitores citaram muitas razões para elegerem suas escolhas: em geral, uma data ou idade importante ou alguma outra associação positiva.

Em geral, os números ímpares venceram os pares. E Bellos acha que os números terminados em zero são, digamos, redondos demais para o gosto da maioria. “Quando dizemos 100, em geral não queremos dizer 100 exatamente, e sim por volta de 100”, disse ele à revista Nautilus. “Por que escolher como favorito um número tão vago?”

Disponível em: https://selecoes.ig.com.br/curiosidades/numero-da-sorte/. Acesso em 19 de dezembro de 2024.

População: População mundial;
Amostra: Cerca de 30 mil pessoas.

EXERCÍCIO 2. O funcionário da bilheteria de um estádio de futebol classificou durante quinze minutos os torcedores que compareceram ao jogo segundo o critério: pagante (P), convidado (C) e menor com acompanhante (M). Os dados brutos são apresentados a seguir:

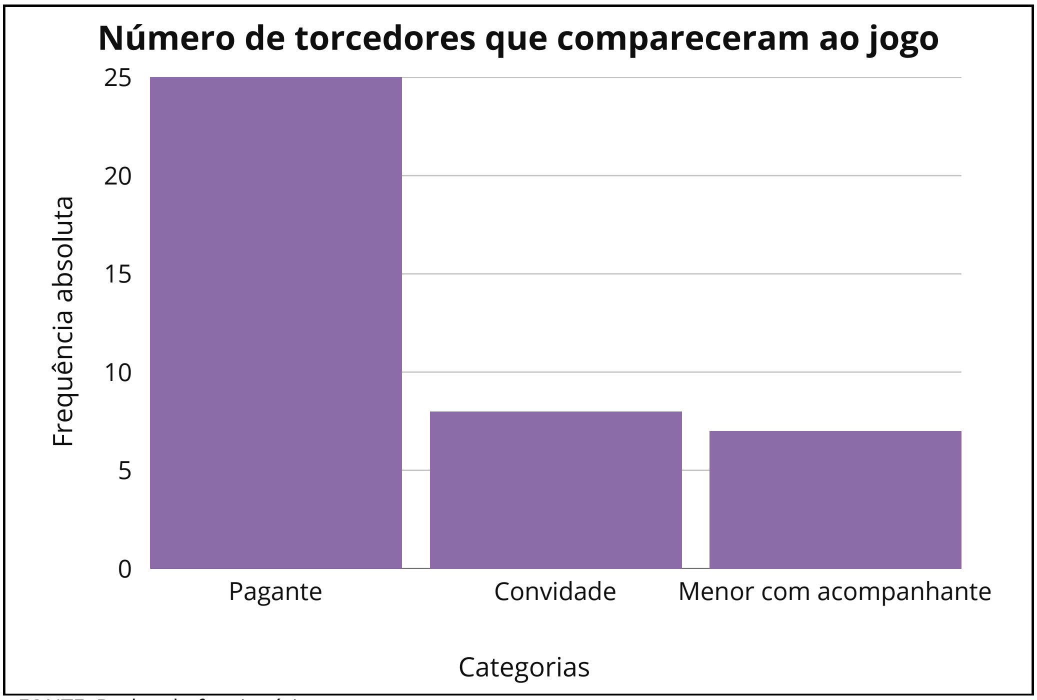
P — P — P — P — C — P — M — M — M — P — P — P — P — P — C — P — P — P
M — M — C — M — P — P — P — P — C — P — C — C — P — P — P — P — M
C — C — P — P — P

Qual o tipo de gráfico que você julga mais adequado para representar a distribuição do público registrado pelo funcionário? E se seu intuito fosse a comparação entre as três categorias criadas pelo funcionário? Construa este último gráfico.

SOLUÇÃO. Para representar a distribuição do público registrado pelo funcionário pode-se utilizar os gráficos de barras/colunas ou o gráfico de setores. Já com o intuito de comparar as três categorias criadas pelo funcionário (pagante, convidado e menor com acompanhante) o ideal seria o gráfico de barras. Para construir este último gráfico devemos determinar inicialmente a tabela de frequências:

Categoria	Frequência
Pagante (P)	25
Convidado (C)	8
Menor com acompanhante (M)	7

Assim, o gráfico é



FONTE: Dados do funcionário.

EXERCÍCIO 3. Ao se cadastrar em um site de comércio eletrônico, o usuário deve preencher um questionário com estas oito perguntas:

1. Você tem computador em casa?
2. Quantas vezes por semana você acessa a Internet?
3. Numa escala de zero a 10, qual seu índice de confiança na segurança do comércio eletrônico?
4. Quantos cartões de crédito você possui?
5. A residência em que vive é própria ou alugada?
6. Qual é o provedor que você utiliza para acessar a rede?
7. Qual é o tempo médio diário de acesso à Internet?
8. Já comprou algum produto via Internet?

Cada uma das questões anteriores define uma variável. Classifique-as como qualitativas ou quantitativas.

SOLUÇÃO. Para cada uma das perguntas vamos definir se a variável em questão é quantitativa ou qualitativa, caso quantitativa se é discreta ou contínua e, caso qualitativa, se é nominal ou ordinal:

1. Você tem computador em casa? **Qualitativa nominal**
2. Quantas vezes por semana você acessa a Internet? **Quantitativa discreta**
3. Numa escala de zero a 10, qual seu índice de confiança na segurança do comércio eletrônico? **Quantitativa discreta**
4. Quantos cartões de crédito você possui? **Quantitativa discreta**
5. A residência em que vive é própria ou alugada? **Qualitativa nominal**
6. Qual é o provedor que você utiliza para acessar a rede? **Qualitativa nominal**
7. Qual é o tempo médio diário de acesso à Internet? **Quantitativa contínua ou discreta (lembre-se da discussão do exemplo 2)**
8. Já comprou algum produto via Internet? **Qualitativa nominal**

ATIVIDADE 1

Leia o trecho da notícia abaixo:

Censo 2022

Censo 2022: mais da metade da população indígena vive nas cidades

Editoria: IBGE | Luiz Bello | Arte: Claudia Ferreira

19/12/2024 10h00 | Atualizado em 19/12/2024 10h31

A população indígena residindo em áreas urbanas em 2022 chegou a 914.746 pessoas, ou 53,97% do total de indígenas no país. Em 2010, esta população era de 324.834 pessoas, ou 36,22% do total de indígenas. De 2010 para 2022, a população indígena em áreas urbanas aumentou 181,6%, ou mais 589.912 pessoas frente a 2010. Já a população indígena em situação rural chegou a 780 090 pessoas, ou 46,03% das pessoas indígena do país, crescendo 36,36% desde 2010, o equivalente a mais 208.007 pessoas indígenas.

Para Marta Antunes, coordenadora do Censo de Povos e Comunidades Tradicionais do IIBGE, "as variações da população indígena de 2010 para 2022 não se devem exclusivamente a componentes demográficas ou a deslocamentos populacionais entre áreas urbanas e rurais, mas também aos aprimoramentos metodológicos do Censo 2022, que permitiram uma melhor captação da população indígena, inclusive em áreas urbanas".

Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/42277-censo-2022-mais-da-metade-da-populacao-indigena-vive-nas-cidades
Acesso em: 19 dez. 2024.

A partir dessas informações, construa um gráfico de barras evidenciando onde residem os indígenas no brasil (área urbana e área rural) nos anos de 2010 e 2022.

ATIVIDADE 2

Escolha um tema relevante para uma pesquisa amostral (por exemplo: preferências alimentares, hábitos de estudo, uso de tecnologia, atividades extracurriculares, ambiente escolar, etc). Elabore pelo menos cinco itens para compor o questionário de sua pesquisa. Entreviste todos os seus colegas de sala para garantir diversidade nas respostas. Registre as respostas em um caderno de anotações ou em um formulário on-line (google forms, por exemplo). A partir daí:

A) Organize os dados coletados em uma tabela utilizando, se possível, recursos tecnológicos.
B) Escolha o tipo mais adequado de gráfico (barras, setores, linhas, histogramas, etc) e represente os dados coletados utilizando, se possível, recursos tecnológicos.
C) Prepare um relatório contendo as interpretações sobre sua pesquisa.

ATIVIDADE 3

Uma aluna da 3ª série do ensino médio de uma escola estadual, localizada no Espírito Santo, resolveu criar uma pesquisa para analisar quem torcia para algum time de futebol profissional do Espírito Santo. Após entrevistar os 300 alunos do turno matutino através de um formulário eletrônico, ela representou sua pesquisa com o gráfico a seguir:

Fonte: Dados da pesquisa

Com base nas informações apresentada pela aluna no gráfico, responda:

A) O tipo de gráfico escolhido é adequado para representar essa pesquisa? Por quê?

B) Qual interpretação inadequada pode ser extraída desse gráfico?

ATIVIDADE 4

Após uma série de pesquisas, o Departamento Estadual de Trânsito do Espírito Santo (Detran-ES) divulgou no portal do Observatório de Trânsito do Espírito Santo o quantitativo mensal de vítimas fatais decorridas de acidentes de trânsito no ano de 2023:

- Janeiro: 84
- Fevereiro: 55
- Março: 87
- Abril: 55
- Maio: 58
- Junho: 64
- Julho: 78
- Agosto: 66
- Setembro: 71
- Outubro: 58
- Novembro: 63
- Dezembro: 78

Disponível em: https://analytics-detran.vert.com.br/ObservatorioTransito. Acesso em: 19 dez. 2024.

A partir desses dados, represente-os em dois gráficos, um de barras e outro de linhas e responda os questionamentos a seguir:

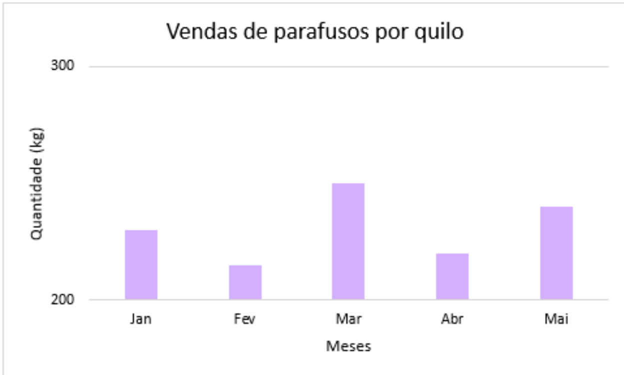
A) Para verificar os meses com o maior número de acidentes com vítimas fatais, qual gráfico seria mais adequado? Explique sua resposta.

B) Para observar as variações no número de acidentes com vítimas fatais, qual gráfico seria mais adequado? Explique sua resposta.

ATIVIDADE 5

Uma empresa registrou suas vendas mensais de parafusos (por quilo) ao longo de cinco meses numa planilha eletrônica. O gerente de vendas compartilhou a planilha com os dois estagiários da empresa e solicitou que cada um elaborasse um gráfico para representar tais vendas. Os gráficos elaborados foram os seguintes:

Fonte: Pesquisa realizada pelo estagiário A

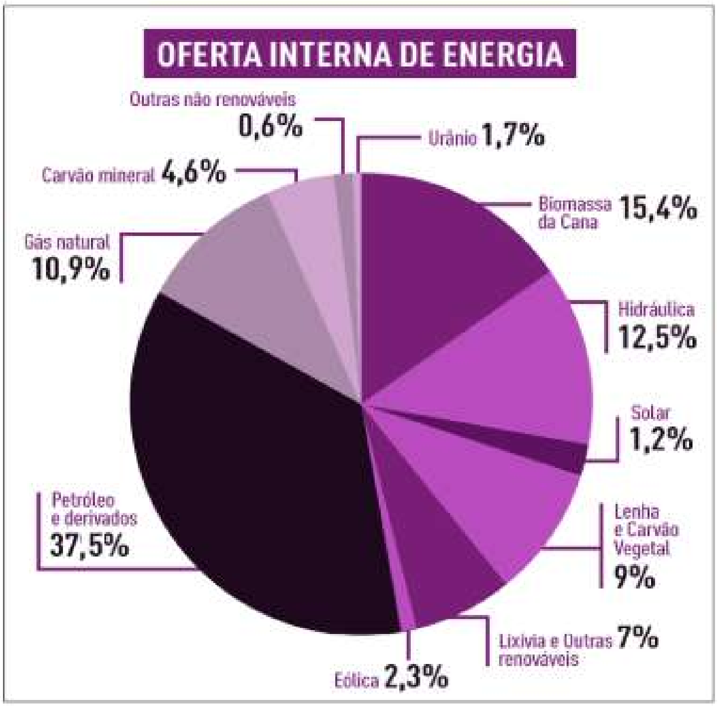


Fonte: Pesquisa realizada pelo estagiário B

Comparando os dois gráficos, quais possíveis equívocos podem ser apontados durante uma análise?

ATIVIDADE 6

Um gráfico de oferta interna de energia indica a quantidade total de energia disponível em um país, considerando todas as fontes de geração, como petróleo, gás natural, energia elétrica, e energias renováveis. O gráfico a seguir demonstra a oferta interna de energia do Brasil no ano de 2023. Aponte algumas inadequações contidas nesse gráfico.

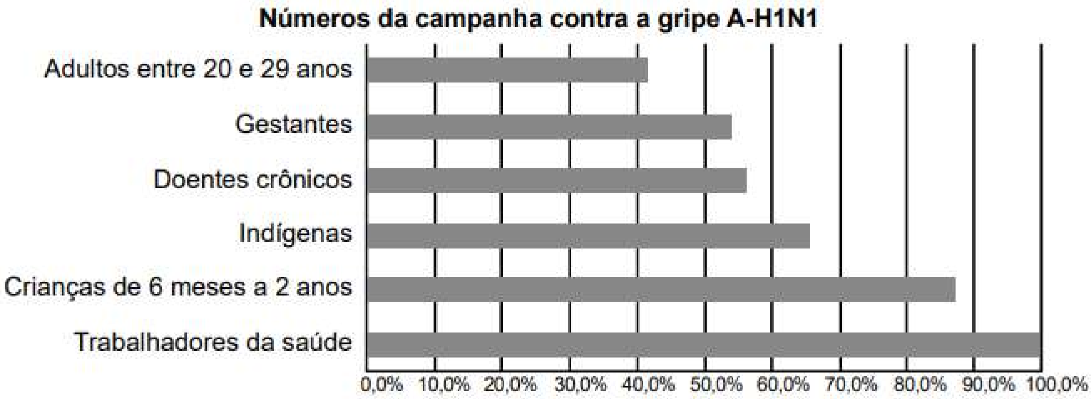


Fonte: https://www.raizen.com.br/blog/matriz-energetica-brasileira (adaptado)

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 1

(ENEM 2023) O gráfico expõe alguns números da gripe A-H1N1. Entre as categorias que estão em processo de imunização, uma já está completamente imunizada, a dos trabalhadores da saúde.



Época, 26 abr. 2010 (adaptado).

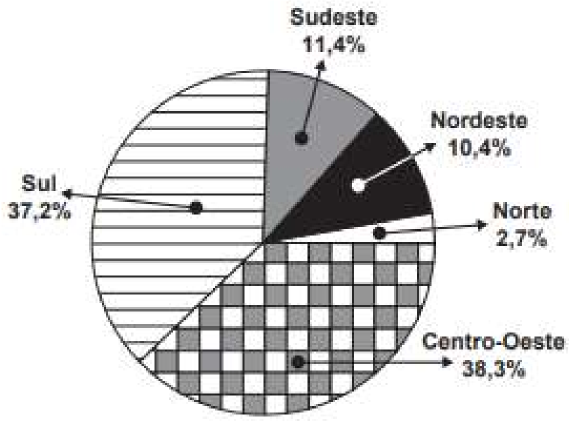
De acordo com o gráfico, entre as demais categorias, a que está mais exposta ao vírus da gripe A-H1N1 é a categoria de

A) indígenas.
B) gestantes.
C) doentes crônicos.
D) adultos entre 20 e 29 anos.
E) crianças de 6 meses a 2 anos.

QUESTÃO 2

(ENEM 2019) Considere que a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, aponte uma participação por região conforme indicado no gráfico.

Em valores absolutos, essas estimativas indicam que as duas regiões maiores produtoras deveriam produzir juntas um total de 119,8 milhões de toneladas em 2012.

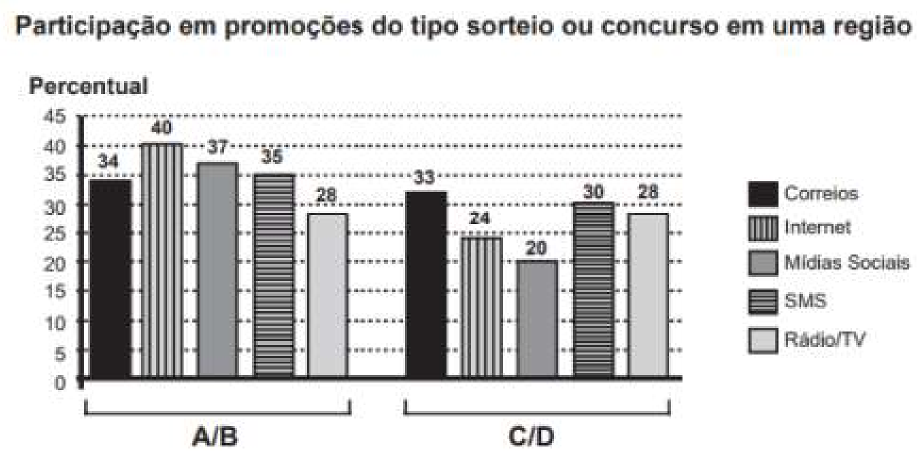


De acordo com esses dados, a produção estimada, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país, foi um valor mais aproximado de

A) 11,4. B) 13,6. C) 15,7. D) 18,1. E) 35,6.

QUESTÃO 3

(ENEM 2015) Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no site da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.



Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D). De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

A) Correios e SMS.
B) internet e Correios.
C) internet e internet.
D) internet e mídias sociais.
E) rádio/TV e rádio/TV.

Material Extra

SITE

A seção “**Medidas de Posição**” traz vídeos sobre os conteúdos tratados neste material estruturado. Além dos vídeos, é possível acessar o material teórico que apresenta alguns exemplos extras. Para ter acesso, basta clicar aqui ou via QR-Code (ao lado).

A seção “**Medidas de Dispersão**” traz vídeos sobre os conteúdos tratados neste material estruturado. Além dos vídeos, é possível acessar o material teórico que apresenta alguns exemplos extras. Para ter acesso, basta clicar aqui ou via QR-Code (ao lado).

SUGESTÃO DE LEITURA

O artigo “**Problemas identificados em gráficos estatísticos publicados nos meios de comunicação**” é um estudo que oferece diversas análises de gráficos com erros de confecção publicados na mídia. Para ter acesso, basta clicar aqui ou via QR-Code (ao lado).

“Quando foi publicado pela primeira vez, em 1954, o livro de Darrell Huff foi saudado como pioneiro em conjugar linguagem simples e ilustrações para tratar de um tema polêmico e controverso: o mau uso da estatística para maquiar dados e abalizar opiniões.”

Apesar de alguns exemplos não serem tão atuais, a linguagem do livro se destaca como um de seus principais pontos fortes. O capítulo 2, “Uma média bem escolhida”, apresenta uma discussão instigante sobre o uso das medidas de tendência central. Já o capítulo 5, “Os gráficos malucos”, explora de forma crítica o (mau) uso dos gráficos, contribuindo para uma reflexão importante sobre a interpretação de dados.

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo sobre **Organização de dados, medidas de tendência central, medidas de dispersão** e **análise de gráficos e tabelas**. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?

Reflita sobre sua aprendizagem

- Consegui organizar e representar conjuntos de dados por meio de tabelas e gráficos de diferentes tipos (colunas, setores, linhas etc.)?
- Sou capaz de identificar e interpretar informações em gráficos e tabelas, compreendendo o que eles revelam sobre uma determinada situação?
- Consegui calcular e compreender o significado das medidas de tendência central (média, mediana e moda) em diferentes contextos?
- Consegui compreender a importância das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio-padrão) para analisar a variabilidade dos dados?
- Sou capaz de reconhecer quando um gráfico ou resumo estatístico pode induzir a interpretações equivocadas e de analisar criticamente informações apresentadas em notícias ou redes sociais?
- Percebo como o uso da Estatística pode me ajudar a tomar decisões mais conscientes, tanto na escola quanto fora dela?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Organização e representação de dados (tabelas e gráficos).			
Leitura e interpretação e informações expressas em tabelas e gráficos.			
Medidas de tendência central (média, mediana e moda).			

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio-padrão).			
Análise crítica de informações			
Aplicações da estatística			

Dica: Revise os tópicos que você marcou como "**preciso revisar**" e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências

BRASIL. Ministério de Minas e Energia. **Matriz elétrica brasileira alcança 200 GW.** Brasília: Agência Nacional de Energia Elétrica, 2024. Disponível em: https://www.gov.br/aneel/pt-br/assuntos/noticias/2024/matriz-eletrica-brasileira-alcanca-200-gw. Acesso em: 29 nov. 2024.

BRASIL. Ministério dos Direitos Humanos e da Cidadania. **ObservaDH:** Pessoas Idosas. Brasília: ObservaDH, 2024. Disponível em: https://experience.arcgis.com/experience/54febd2948d54d68a1a462581f89d920/page/Pessoas-Idosas/. Acesso em: 29 nov. 2024.

BELLO, Luiz. Censo 2022: mais da metade da população indígena vive nas cidades. **Agência de Notícias IBGE**. Rio de Janeiro, 2024. Censo 2022. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/42277-censo-2022-mais-da-metade-da-populacao-indigena-vive-nas-cidades. Acesso em: 19 dez. 2024.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JUNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática : estatística, combinatória e probabilidade**. 1. ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

CAVALCANTI, Leonardo; OLIVEIRA, Tadeu de; LEMOS, Sarah F. **Dados Consolidados da Imigração no Brasil 2023:** Série Migrações. Brasília: Observatório das Migrações Internacionais, 2023. Disponível em: https://portaldeimigracao.mj.gov.br/images/Obmigra_2020/OBMIGRA_2023/Dados_Consolidados/dados_consolidados_2022_-_v_19_06.pdf. Acesso em: 29 nov. 2024.

CEPEA - CENTRO DE ESTUDOS AVANÇADOS EM ECONOMIA APLICADA. Indicadores. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2024. Disponível em:https://www.cepea.esalq.usp.br/br/indicador/ovos.aspx. Acesso em: 29 nov. 2024.

CNN. **Estilo de vida saudável contribui para combater a demência, diz pesquisa**. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/saude/estilo-de-vida-saudavel-contribui-para-combater-a-demencia-diz-pesquisa/. Acesso em 19 de dezembro de 2024.

COI - COMITÊ OLÍMPICO INTERNACIONAL. **Quadro de Medalhas -** Paris 2024. Suíça: COI, 2024. Disponível em: https://olympics.com/pt/paris-2024/medalhas. Acesso em: 29 nov. 2024.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos: Estatística e Matemática Financeira**. 1. ed. São Paulo: Editora Ática, 2020.

Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos. **Pesquisa nacional da Cesta Básica de Alimentos:** Salário mínimo nominal e necessário. São Paulo, 2024. Disponível em: https://www.dieese.org.br/analisecestabasica/salarioMinimo.html#2024. Acesso em: 09 dez. 2024.

ESPÍRITO SANTO. Departa,mento Estadual de Trânsito do Espírito Santo (Detran-ES). **Observatório de Trânsito do Estado do Espírito Santo.** Vitória: Detran-ES, 2024. Disponível em: https://analytics-detran.vert.com.br/ObservatorioTransito. Acesso em: 29 nov. 2024.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria de Segurança Pública e Defesa Social (SESP). **Painel de Monitoramento da Violência Contra a Mulher.** Vitória: SESP, 2024. Disponível em: https://sesp.es.gov.br/painel-de-violencia-mulher. Acesso em: 29 nov. 2024.

ESPÍRITO SANTO. Tribunal de Contas do Estado do Espírito Santo (TCEES). **Painel de Controle.** Vitória: TCEES, 2024. Disponível em: https://paineldecontrole.tcees.tc.br/areasTematicas/Educacao-Escolas. Acesso em: 29 nov. 2024.

EMBRAPA. **Brasil em 50 alimentos**. Brasília: Embrapa, 2023. Disponível em: https://www.embrapa.br/busca-de-publicacoes/-/publicacao/1153294/brasil-em-50-alimentos. Acesso em 28 de novembro de 2023.

FAU USP. **Gráfico de Setores**. Disponível em: http://infovisparasaude.fau.usp.br/ds-sage/graficos/relacionais/setores.php. Acesso em 24 de novembro de 2024.

G1. **De Taylor Swift a Ana Castela: os artistas mais ouvidos no Spotify em cada estado do Brasil em 2023**. Disponível em: https://g1.globo.com/pop-arte/musica/noticia/2023/12/11/de-taylor-swift-a-ana-castela-os-artistas-mais-ouvidos-no-spotify-em-cada-estado-do-brasil-em-2023.ghtml#saopaulo. Acesso em 23 de novembro de 2024.

G1. **SC é o estado com a maior proporção de leitores do Brasil, aponta pesquisa**. Disponível em: https://g1.globo.com/sc/santa-catarina/noticia/2024/12/18/sc-tem-maior-numero-de-leitores-do-brasil-aponta-pesquisa.ghtml.Acesso em 18 de dezembro de 2024.

GOMES, Irene. Em 2022, PIB cresce em 24 unidades da federação. **Agência IBGE Notícias**, Rio de Janeiro, 14 nov. 2024. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/41893-em-2022-pib-cresce-em-24-unidades-da-federacao. Acesso em: 09 dez. 2024.

IBGE. INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **IBGE educa.** Brasília: 2024. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/jovens/conheca-o-brasil/populacao/22326-indigenas-2.html. Acesso em: 29 nov. 2024.

IBGE. INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Principais tipos de gráficos para a educação básica**. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/professores/educa-recursos/20773-tipos-de-graficos-no-ensino.html#texto--single__section--1. Acesso em 18 de dezembro de 2024.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. M. **Fundamentos de matemática elementar: matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva.** 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

Instituto Jones dos Santos Neves. **IJSN Especial Censo Demográfico 2022:** Primeiros Resultados - População Quilombola no Brasil e no Espírito Santo. Vitória, 2024. Disponível em: https://ijsn.es.gov.br/Media/IJSN/PublicacoesAnexos/S%C3%ADnteses/IJSN_Censo_2022-Quilombola.pdf. Acesso em: 09 dez. 2024.

Instituto Jones dos Santos Neves. **IJSN no Censo 2022**. Disponível em: https://ijsn.es.gov.br/sinteses/ijsn-no-censo-2022. Acesso em 26 de nov. de 2024.

IPEA. **Atlas da Violência**. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/atlasviolencia/filtros-series. Acesso em 18 de dezembro de 2024.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Ministério da Educação. **Enem 2012- Exame Nacional do Ensino Médio 2012:** 2º dia. Brasília: INEP, 2012. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2012/dia2_caderno5_amarelo.pdf. Acesso em: 29 nov. 2024.

MAPA. **Agropecuária brasileira em números**. Disponível em: https://www.gov.br/agricultura/pt-br/assuntos/politica-agricola/todas-publicacoes-de-politica-agricola/agropecuaria-brasileira-em-numeros/abn-04-2022.pdf. Acesso em 18 de dezembro de 2024.

MINISTÉRIO DA SAÚDE. **Boletim epidemiológico: Dia da Malária nas Américas – um panorama da malária no Brasil em 2022 e no primeiro semestre de 2023**. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/boletins/epidemiologicos/edicoes/2024/boletim-epidemiologico-volume-55-no-01/. Acesso em 24 de novembro de 2024.

Matriz energética brasileira: o que é e do que é composta. **Raizen,** 2023. Disponível em: https://www.raizen.com.br/blog/matriz-energetica-brasileira. Acesso em: 19 dez. 2024.

ORLANDI, Leticia. Saiba qual o salário dos prefeitos das cidades do Espírito Santo. **A Gazeta**, Vitória, 22 out. 2024. Seção Eleições. Disponível em: https://www.agazeta.com.br/es/politica/saiba-qual-o-salario-dos-prefeitos-das-cidades-do-espirito-santo-1024. Acesso em: 09 dez. 2024.

PINHONI, Marina; PETRÓ, Gustavo. Monitor da Violência: assassinatos caem 4% no Brasil em 2023, mostra edição final do levantamento periódico. **Globo**, São Paulo, 2023. G1. Disponível em: https://g1.globo.com/monitor-da-violencia/noticia/2024/03/12/monitor-da-violencia-2023.ghtml. Acesso em: 19 dez. 2024.

PODER360. **Brasil reinjeta 50% da produção de gás natural em 2022**. Disponível em: https://www.poder360.com.br/economia/brasil-reinjeta-50-da-producao-de-gas-natural-em-2022/. Acesso em 18 de dezembro de 2024.

RAMÍREZ, M. M. O.; GUTIÉRREZ, R. B.; CINTAS, P. G. **Statistics as a discipline:** A brief look to the past, the present and the future. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo. 2022. doi: https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1059.

ROSS, S. M. **Introductory statistics**. Academic Press, 2017.

Saiba quem foi o artilheiro de cada edição de Copa do Mundo. **Lance!**, 12 nov. 2022. Seção Galeria de Fotos. Disponível em: https://www.lance.com.br/galerias/saiba-quem-foi-o-artilheiro-de-cada-edicao-de-copa-do-mundo/. Acesso em: 09 dez. 2024.

Seleções. **Descubra por que 7 provavelmente é seu número da sorte**. Disponível em: https://selecoes.ig.com.br/curiosidades/numero-da-sorte/. Acesso em 19 de dezembro de 2024.

UFES. **Termo de Adesão 2ª edição de 2023** . Disponível em: https://sisu.ufes.br/sites/sisu.ufes.br/files/field/anexo/termo_de_adesao_2023.2.pdf. Acesso em 28 de novembro de 2024.

VEJA. **Aécio sai na frente: 54% contra 46% de Dilma no segundo turno. Baixaria petista vai aumentar ainda mais?** Disponível em: https://veja.abril.com.br/coluna/felipe-moura-brasil/aecio-sai-na-frente-54-contra-46-de-dilma-no-segundo-turno-baixaria-petista-vai-aumentar-ainda-mais. Acesso em 18 de dezembro de 2024.

Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

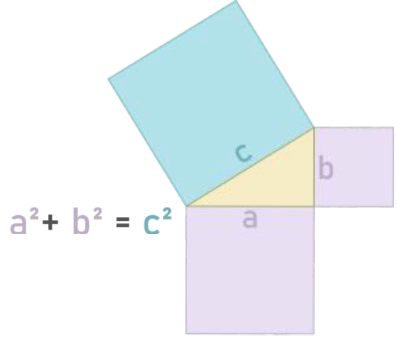
GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

SEDU 2026

Gerência de Currículo
da Educação Básica

Capítulo 3: Semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo

Apresentação



Prezado(a) estudante,

Você já parou para pensar como é possível descobrir a altura de um prédio apenas observando sua sombra? Ou como engenheiros, arquitetos e topógrafos conseguem realizar medições sem precisar acessar diretamente determinados locais?

Essas situações envolvem conceitos fundamentais da Geometria, em especial a semelhança entre triângulos, que permite compreender e resolver problemas reais utilizando raciocínio proporcional e medidas indiretas, presentes em diferentes contextos do cotidiano e em diversas áreas do conhecimento.

O que você vai estudar neste capítulo

Primeiro, vamos explorar o conceito de semelhança entre polígonos, reconhecendo quando duas figuras mantêm a mesma forma, mas possuem tamanhos diferentes. Em seguida, estudaremos a semelhança entre triângulos, observando critérios que permitem identificar quando dois triângulos são semelhantes. Depois, aprofundaremos os conhecimentos sobre os elementos do triângulo retângulo e aprenderemos as relações métricas que envolvem seus lados e alturas, chegando à dedução e à aplicação prática do Teorema de Pitágoras, um dos mais importantes da Matemática.

Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- Reconhecer relações de semelhança entre triângulos, usando critérios como a congruência de ângulos correspondentes nos dois triângulos ou a proporcionalidade entre medidas de lados correspondentes.
- Deduzir experimentalmente as relações métricas no triângulo retângulo (inclusive o Teorema de Pitágoras) a partir de relações de semelhança de triângulos.
- Utilizar as relações métricas no triângulo retângulo (inclusive o Teorema de Pitágoras) na resolução de problemas.

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

SEMELHANÇA ENTRE POLÍGONOS

Definição

Dois polígonos são ditos semelhantes se, e somente se:

1. Possuem ângulos ordenadamente congruentes; e
2. Os lados opostos aos ângulos congruentes são proporcionais.

Utilizamos o símbolo "$\sim$" para denotar semelhança entre polígonos. Por exemplo, considerando os triângulos abaixo:

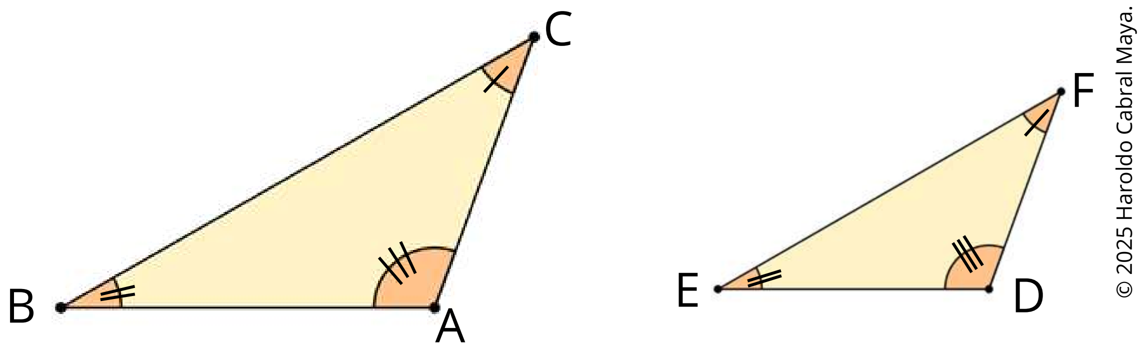


Figura 1: Dois triângulos semelhantes.

Podemos expressar a semelhança entre eles da seguinte forma:

$$ABC \sim DEF \iff \begin{cases} \widehat{A} \equiv \widehat{D} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{E} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{F} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \end{cases}$$

Essa relação indica que os ângulos correspondentes possuem medidas iguais, e os lados opostos a esses ângulos são proporcionais, garantindo a semelhança entre estes polígonos.

SEMELHANÇA ENTRE TRIÂNGULOS

Apesar de dois polígonos serem semelhantes apenas quando possuem ângulos correspondentes congruentes e lados homólogos proporcionais, os triângulos constituem um caso especial. É possível estabelecer critérios mínimos que garantem sua semelhança sem a necessidade de verificar todas essas condições simultaneamente. Esses critérios, conhecidos como **casos de semelhança de triângulos**, podem ser demonstrados matematicamente. A seguir, apresentamos três desses casos.

Caso AA (ângulo, ângulo)

Se dois triângulos possuem dois ângulos internos ordenadamente congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

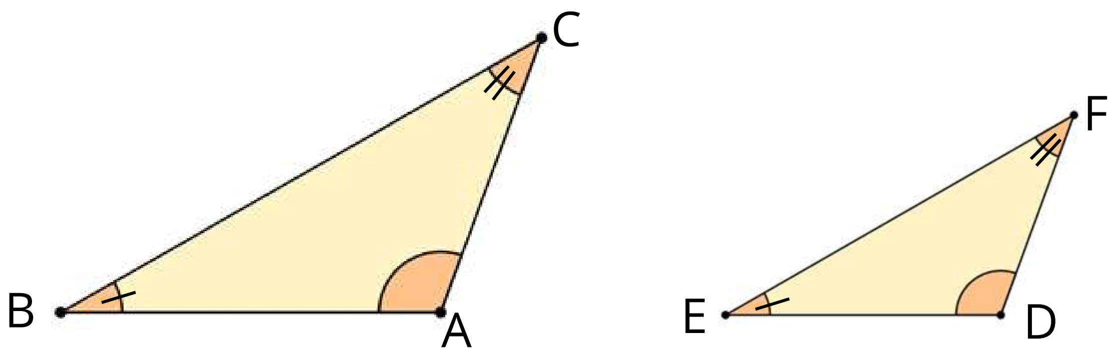


Figura 2: Dois triângulos semelhantes segundo o critério AA.

$$\left.\begin{aligned} \widehat{C} \equiv \widehat{F} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{E} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

VOCÊ SABIA?

Um exemplo de aplicação prática da semelhança de triângulos é a **paralaxe estelar**. Esse é um método utilizado por astrônomos para medir a distância de estrelas próximas com base no deslocamento aparente da estrela em relação ao fundo estelar quando observada de diferentes pontos da órbita da Terra.

Caso LAL (lado, ângulo, lado)

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

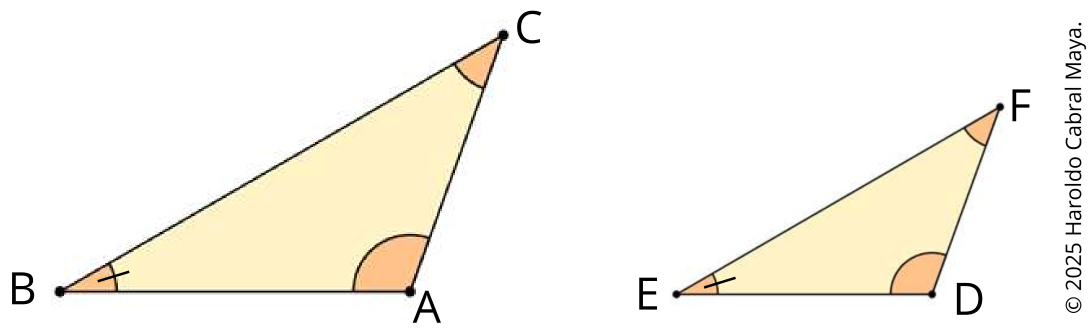


Figura 3: Dois triângulos semelhantes segundo o critério LAL.

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{B} \equiv \widehat{E} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Caso LLL (lado, lado, lado)

Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

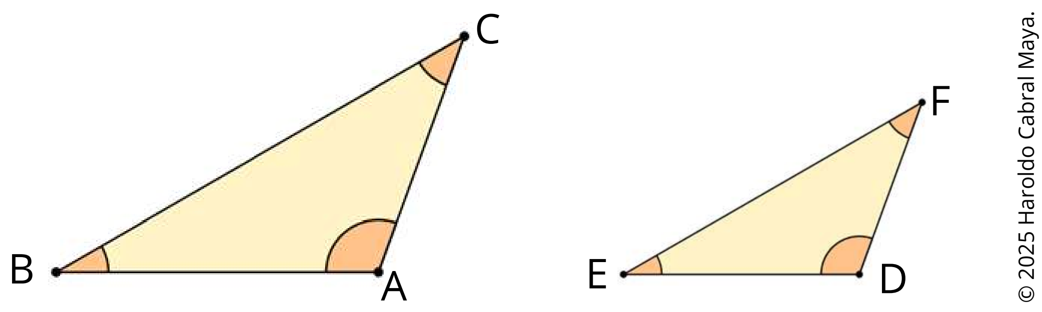


Figura 4: Dois triângulos semelhantes segundo o critério LAL.

$$\left.\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

VOCÊ SABIA?

Topógrafos usam a semelhança de triângulos para calcular a altura de edifícios, torres e montanhas sem precisar medi-los diretamente. Um método comum envolve a projeção de sombras e ângulos de visão.

ELEMENTOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Consideremos um triângulo ABC, retângulo em A, e tracemos a altura AD perpendicular a BC, com D pertencente a BC.

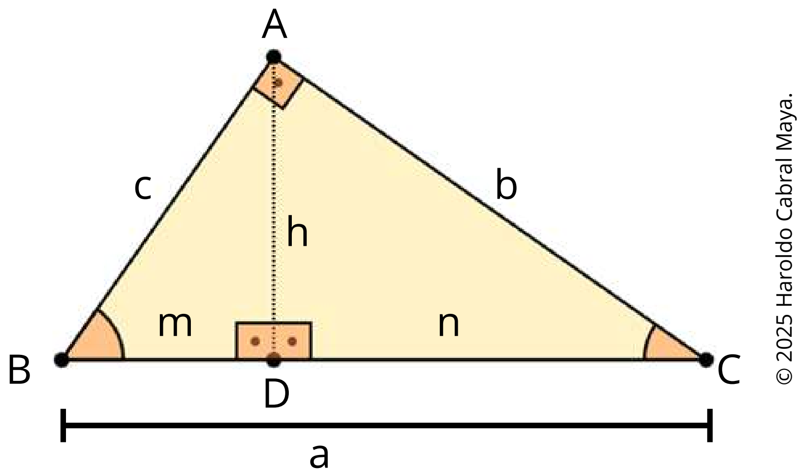


Figura 5: Triângulo retângulo com cota de altura perpendicular ao lado oposto ao ângulo reto.

Definimos os seguintes elementos:

$a = \overline{BC}$: *hipotenusa*

$b = \overline{AC}$: *cateto*

$c = \overline{AB}$: *cateto*

$m = \overline{BD}$: *projeção do cateto c sobre a hipotenusa*

$n = \overline{CD}$: *projeção do cateto b sobre a hipotenusa*

$h = \overline{AD}$: *altura relativa à hipotenusa*

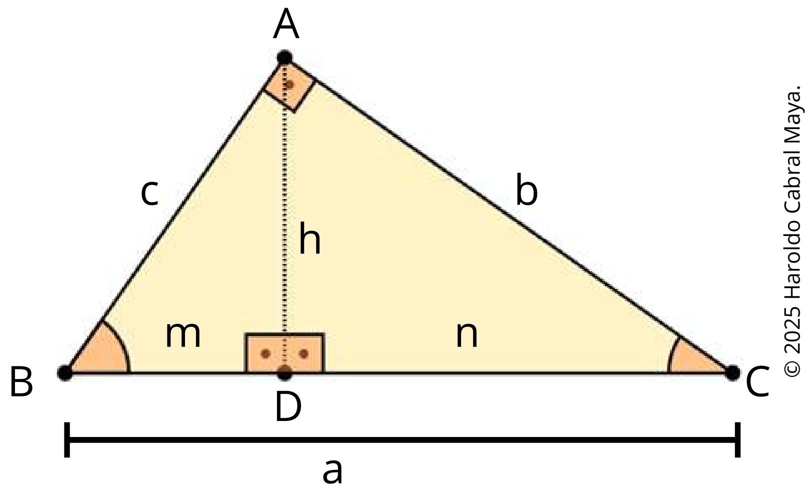
A altura AD divide o triângulo original em dois triângulos retângulos menores, ambos semelhantes ao triângulo $\triangle$ABC e entre si (veja na figura 5). Isso ocorre porque os três triângulos possuem os mesmos ângulos internos, garantindo a semelhança pelo critério AA.

Assim, temos a seguinte relação:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$$

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Podemos explorar a proporcionalidade entre polígonos semelhantes para obter algumas das relações métricas notáveis do triângulo retângulo da figura abaixo. Vejamos:



$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Longrightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c \\ \frac{b}{c} = \frac{h}{m} \Rightarrow b \cdot m = c \cdot h \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Longrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n \\ \frac{b}{c} = \frac{n}{h} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot n \end{cases}$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Longrightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

VOCÊ SABIA?

O funcionamento das lentes em câmeras e telescópios utiliza a semelhança de triângulos para calcular a ampliação da imagem e a posição do foco.

DEDUÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Somando as expressões obtidas para os quadrados dos catetos, $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$:

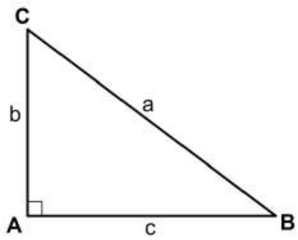
$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$$

Como $m + n = a$, substituímos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot \left(\underbrace{m + n}_{a}\right) \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Portanto, concluímos que, em qualquer **triângulo retângulo**:

$$\text{Hipotenusa}^2 = (\text{Cateto 1})^2 + (\text{Cateto 2})^2$$



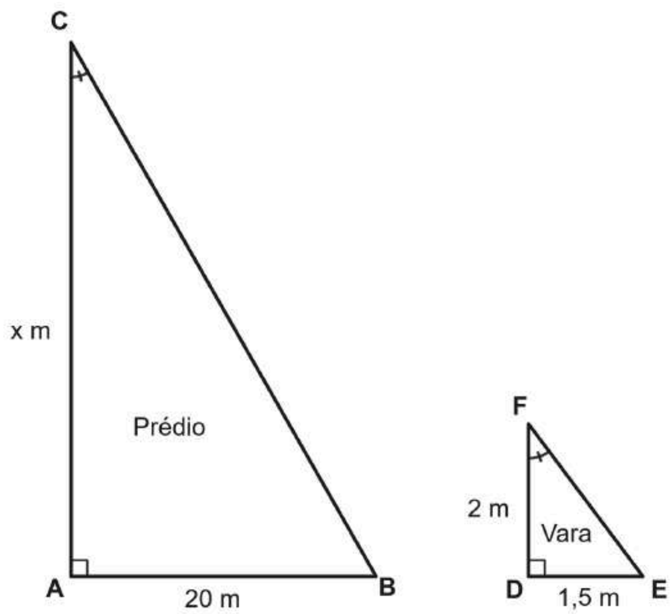
Teorema de Pitágoras

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma do quadrado das medidas dos catetos: $a^2 = b^2 + c^2$.

O vídeo "Teorema de Pitágoras: Diferentes Demonstrações" apresenta algumas possibilidades de demonstração visual do teorema de Pitágoras. O vídeo pode ser acessado pelo QR Code ao lado.

EXERCÍCIO 1. Carlos, um menino curioso deseja saber a altura de um prédio e para determiná-la ele teve uma ideia: mediu o comprimento da sombra do prédio, obtendo 20 metros, e mediu a sombra de uma vara de ferro de 2 m de altura, posicionada perpendicularmente ao solo, chegando ao resultado de 1,5 m de comprimento da sombra. No momento da medição o ângulo de incidência do sol no topo do prédio e na vara era o mesmo. Considerando que Carlos efetuou todos os cálculos de forma correta, qual o resultado que ele encontrou para a altura do prédio?

SOLUÇÃO. Para facilitar o processo, podemos fazer um esquema que representa a situação. Observe abaixo:



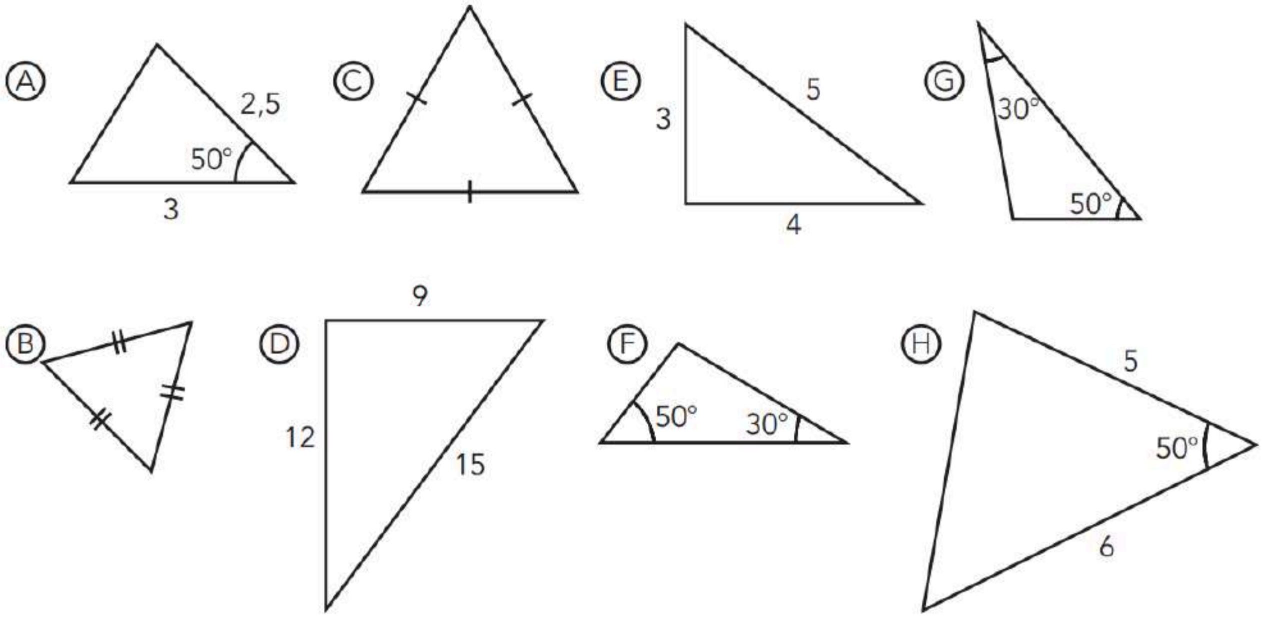
Pelo caso AA de semelhança de triângulos ABC~DEF, portanto,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{20}{1,5} = \frac{x}{2} \Rightarrow 1,5x = 40$$

$$\Rightarrow x = \frac{40}{1,5} \approx 26,67.$$

Logo, se Carlos efetuou todos os cálculos corretamente, ele chegou à altura de, aproximadamente, 26,67 m para o prédio.

EXERCÍCIO 2. (Adaptada de Iezzi et al., 2016) São dados oito triângulos. Indique os pares de triângulos semelhantes e o critério de semelhança correspondente:



SOLUÇÃO. De imediato pode-se identificar os seguintes pares:

- **B~C pois são dois triângulos equiláteros, caso LLL;**

- **F~G pois apresentam dois ângulos correspondentes congruentes, caso AA.**

- **A~H, caso LAL.**

Observando os triângulos A e H podemos notar que existe um ângulo congruente e a medida dos lados que formam esse ângulo são proporcionais:

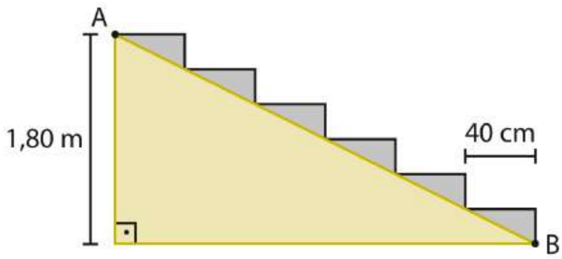
$$\frac{6}{3} = \frac{5}{2,5} = 2.$$

- **D~E, caso LLL.**

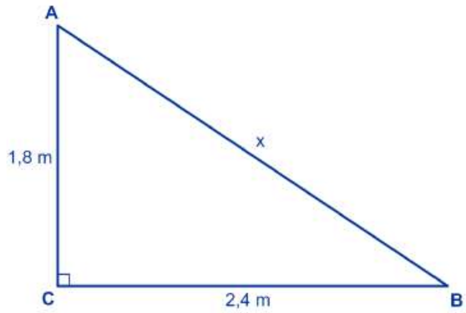
Tomando os triângulos D e E, temos que seus lados homólogos são proporcionais:

$$\frac{15}{5} = \frac{12}{4} = \frac{9}{3} = 3.$$

EXERCÍCIO 3. (adaptada de Iezzi et al., 2016) A figura mostra o perfil de uma escada, formada por seis degraus idênticos, cada um com 40 cm de largura. A distância do ponto mais alto da escada ao solo é 1,80 m. Qual é a medida do segmento AB?



SOLUÇÃO. Inicialmente, note que a escada tem a forma de um triângulo retângulo cuja base tem medida igual igual a 6·40 cm = 240 cm = 2,4 m (6 degraus de de 40 cm de largura). Podemos representar a visão lateral da escada pelo triângulo abaixo:

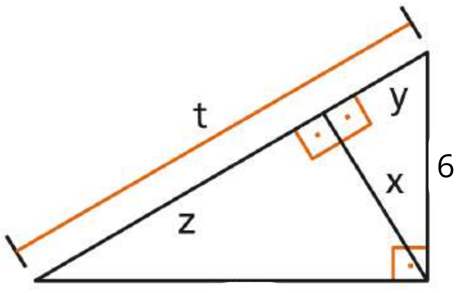


Agora, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras, já que os dois lados que sabemos as medidas são os catetos e precisamos determinar a medida da hipotenusa:

$$x^2 = 1,8^2 + 2,4^2 = 3,24 + 5,76 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = 3.$$

Assim, a medida do segmento AB é igual a 3 m.

EXERCÍCIO 4. (Dolce e Pompeo, 2013) Na figura, determine os elementos x, y, z e t.



SOLUÇÃO. Inicialmente, vamos utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrar o valor de t:

$$t^2 = 6^2+8^2 = 36+64 = 100 \Rightarrow t = \sqrt{100} = 10.$$

De posse do valor de t, vamos determinar z:

$$8^2 = 10 \cdot z \Rightarrow z = \frac{64}{10} = 6,4.$$

Como t=z+y, temos

$$10 = 6,4 + y \Rightarrow y = 10 - 6,4 = 3,6.$$

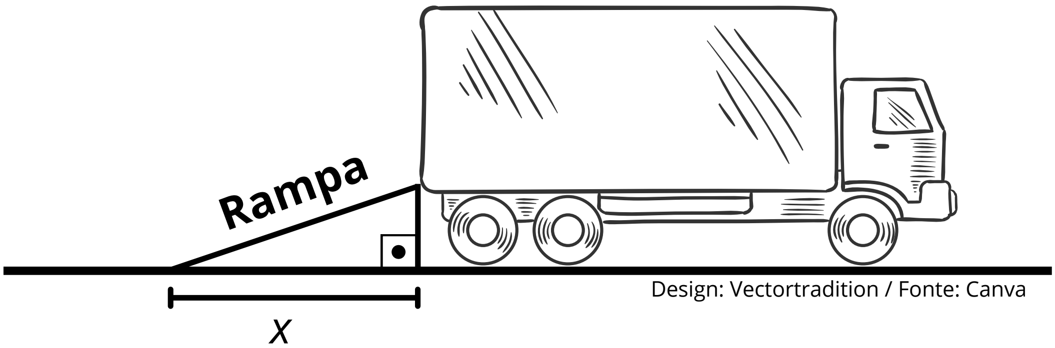
Por fim, determinaremos o valor de x:

$$x^2 = z{\cdot}y = 6,4{\cdot}3,6 = 23,04 \Rightarrow x = \sqrt{23,04} = 4,8.$$

Atividades

ATIVIDADE 1

(SAEPE - 2009) Um caminhão estaciona em frente a uma rampa para facilitar o carregamento de mercadoria. Essa rampa tem 2,5 m de comprimento e atinge uma altura de 1,5 m do solo, como mostra a figura abaixo, onde a forma da rampa está representada por um triângulo.



Design: Vectortradition / Fonte: Canva

A distância entre o caminhão e o ponto de início de subida da rampa está representado na figura por x. Quanto mede essa distância?

A) 1 m
B) 2 m
C) 3 m
D) 4 m
E) 8 m

ATIVIDADE 2

Um agricultor deseja construir um cercado retangular para suas ovelhas, utilizando uma cerca de arame. Ele planeja que um dos lados do cercado tenha 12 metros e o outro lado tenha 16 metros. Para garantir que o cercado seja retangular, ele quer verificar se as medidas formam um triângulo retângulo ao usar a diagonal como a hipotenusa. Qual deverá ser o valor da diagonal do cercado para que ele seja retangular?

A) 18 metros
B) 20 metros
C) 22 metros
D) 24 metros
E) 25 metros

ATIVIDADE 3

Em relação à semelhança de triângulos, assinale a alternativa correta:

A) Triângulos com ângulos correspondentes iguais são sempre congruentes.
B) A semelhança de triângulos pode ser estabelecida apenas pela comparação de dois lados.
C) Dois triângulos são semelhantes se os comprimentos de seus lados são iguais, independente dos seus ângulos correspondentes serem congruentes.
D) Dois triângulos são semelhantes se têm lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes iguais.
E) A semelhança de triângulos não pode ser determinada por meio da razão entre os lados.

ATIVIDADE 4

Em uma expedição, um grupo de pesquisadores pretende determinar a altura de uma árvore em uma floresta. Para isso, utilizam um bastão de 2 metros, posicionado verticalmente em relação ao solo, e medem sua sombra, que possui 1 metro de comprimento. Simultaneamente, observam que a sombra da árvore mede 5 metros. Qual é a altura da árvore?

A) 6 metros
B) 8 metros
C) 10 metros
D) 12 metros
E) 15 metros

ATIVIDADE 5

Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é de 6 cm. Uma das projeções mede o dobro da outra. Determine o comprimento da hipotenusa.

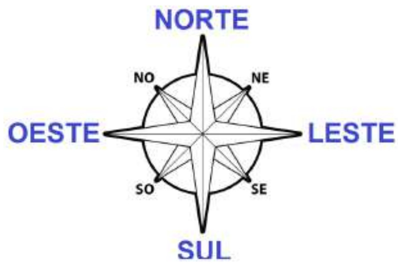
ATIVIDADE 6

Maria está planejando construir uma rampa para facilitar o acesso ao seu jardim, que está a 3 metros de altura em relação à calçada. Para isso, ela quer que a visão lateral da rampa forme um triângulo retângulo, onde um dos catetos está representado pela altura da rampa em relação à calçada e, a rampa representa a hipotenusa. Se Maria deseja que a rampa tenha um comprimento total de 5 metros, qual será a medida da base da rampa?

A) 2 metros
B) 4 metros
C) 5 metros
D) 6 metros
E) 7 metros

ATIVIDADE 7

Dois motoboys partem de Cariacica e seguem em direções retilíneas: um em direção ao leste e o outro em direção ao norte. A velocidade do motoboy que vai para o leste é de 60 km/h, e a do motoboy que vai para o norte é de 80 km/h. Determine a distância, em linha reta, que os separa após 30 minutos.



ATIVIDADE 8

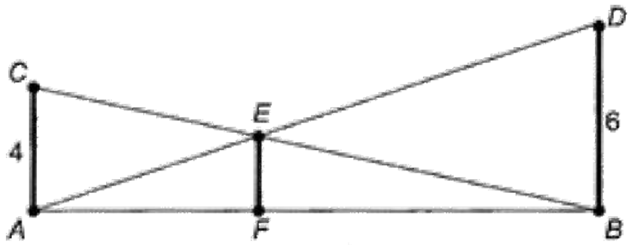
Embora o Teorema de Pitágoras seja tradicionalmente associado ao matemático grego Pitágoras de Samos, há evidências de que os babilônios já utilizavam esse conhecimento muito antes, por volta de 1800 a.C. Tabletes (tabuletas) como o famoso Plimpton 322 mostram que eles empregavam trios de números inteiros, conhecidos como ternos (como 3, 4 e 5), para formar triângulos retângulos. Esses ternos eram usados na prática para construir ângulos retos, essenciais em projetos arquitetônicos.

Demonstre que o terno 97 - 65 - 72, encontrado no tablete *Plimpton 322* pode ser escrito como os lados de um triângulo retângulo.

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 1

(Enem 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6m e 4m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.

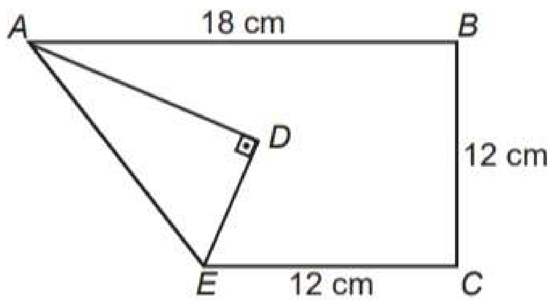


Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

A) 1 m
B) 2 m
C) 2,4 m
D) 3 m
E) $2\sqrt{6}$ m

QUESTÃO 2

(Enem 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura. Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é

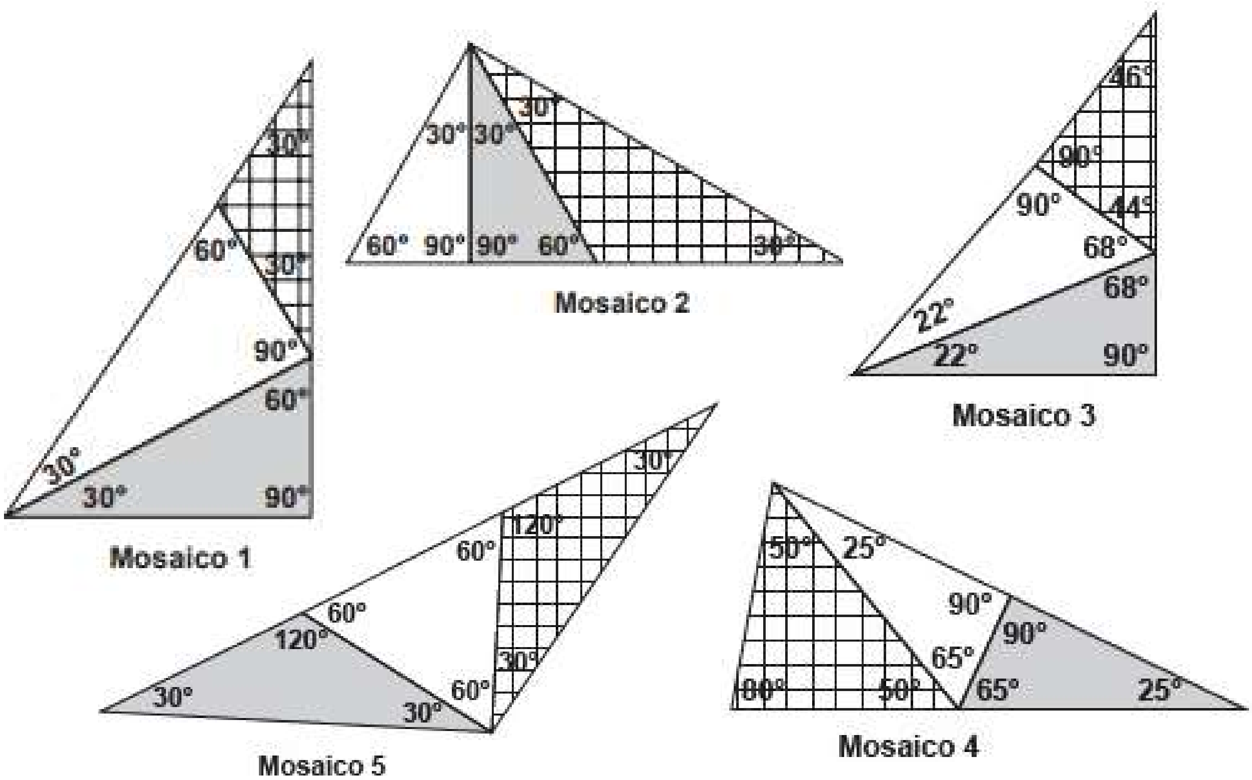


A) $2\sqrt{22}$ cm.
B) $6\sqrt{3}$ cm.
C) 12 cm.
D) $6\sqrt{5}$ cm.
E) $12\sqrt{2}$ cm.

CONEXÃO ENEM

QUESTÃO 3

(Enem 2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.



Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Material Extra

SITE

Portal da Matemática - OBMEP

A seção “Semelhança entre Figuras e Polígonos” apresenta vídeos sobre semelhança de triângulos e pode ser utilizada para aprofundamento do tema.. Para ter acesso, basta clicar aqui ou via QR-Code (ao lado).

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo sobre **Semelhança de triângulos** e **Relações métricas no triângulo retângulo**. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?

Reflita sobre sua aprendizagem

- Sou capaz de reconhecer quando dois triângulos são semelhantes, utilizando critérios como a congruência de ângulos correspondentes e a proporcionalidade entre lados correspondentes?
- Consigo deduzir as relações métricas que envolvem elementos de um triângulo retângulo, a partir das relações de semelhança?
- Sou capaz de deduzir e compreender o Teorema de Pitágoras, identificando sua relação com a semelhança de triângulos?
- Sei utilizar as relações métricas e o Teorema de Pitágoras na resolução de problemas do cotidiano e em diferentes contextos?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Semelhança entre triângulos	○	○	○
Relações métricas no triângulo retângulo	○	○	○
Teorema de Pitágoras	○	○	○
Aplicação das relações métricas e do Teorema de Pitágoras em problemas	○	○	○

Dica: Revise os tópicos que você marcou como “**preciso revisar**” e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências

BONJORNO, José Roberto; JÚNIOR, Ruy Giovanni Júnior; SOUZA, Paulo Roberto Câmara. **Prisma matemática: geometria e trigonometria.** ensino médio - área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante matemática, 1o ano : ensino médio.** 1ª ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contexto: trigonometria e sistemas lineares.** 1ª ed. São Paulo: Ática, 2020.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

GOV.BR. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Inep. **Provas e Gabaritos**. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acessado em: 25/03/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico da Escola. SAEPE – 2009** /Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2009/BOLETIM_SAEPE_VOL3_3EM_MAT_2009.pdf>. Acessado em: 04/04/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Boletim Pedagógico da Escola. SAEPE – 2018** /Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2019/PE%20SAEPE%202019%20RP%20MT%20WEB.pdf>. Acessado em: 28/03/2025.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco. **Revista do Professor – Matemática. SAEPE – 2019** / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. V. 1 (2019), Juiz de Fora – Anual. Disponível em: <https://prototipos.caeddigital.net/arquivos/pe/colecoes/2019/PE%20SAEPE%202019%20RP%20MT%20WEB.pdf>. Acessado em: 04/04/2025.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiverso Matemática: Sequências e trigonometria.** Ensino Médio. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2020.