SEDU 2026

Rotinas Pedagógicas Escolares

9º Ano

Primeiro Trimestre

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Gerência de Currículo
da Educação Básica

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Governador
JOSÉ RENATO CASAGRANDE

Secretário de Estado da Educação
VITOR AMORIM DE ANGELO

Subsecretária da Educação Básica e Profissional
ANDRÉA GUZZO PEREIRA

Gerente de Currículo da Educação Básica
ALEIDE CRISTINA DE CAMARGO

Subgerente de Desenvolvimento Curricular da Educação Básica
MARCOS VALÉRIO GUIMARÃES

Subgerente de Educação Ambiental
ALDETE MARIA XAVIER

2026

Coordenador-geral das Rotinas Pedagógicas Escolares
MARCOS VALÉRIO GUIMARÃES

Coordenadores do componente curricular
GABRIEL LUIZ SANTOS KACHEL
LAIANA MENEGUELLI
RAYANE SALVIANO DE OLIVEIRA SILVA
WELLINGTON ROSA DE AZEVEDO
WILLIAM MANTOVANI

Validadores das Rotinas Pedagógicas Escolares
JÉSSICA MONTEIRO FALQUETTO
THIAGO CÉZAR DE PÁDUA ROSA
ORGANDI MONGIN ROVETTA
CARLOS EDUARDO MORAES PIRES

Professores bolsistas responsáveis pela elaboração das Rotinas Pedagógicas Escolares

5º ano EF
FRANCIELY GOMES FAVERO FERREIRA
PAULA AVAREZ CABANÊZ
SILVANA COCCO DALVI

6º ano EF
KARLA SOUTO DE AMORIM
MAYARA DOS SANTOS ZANARDI

7º ano EF
DAVI MARCIO BERMUDES LINO
HELIONARDO THOMAZ ALVES LOURENÇO

8º ano EF
NAFTALY CRISTAL FÉLIX
FABIANA BUENO

9º ano EF
AMECKSON DE SOUZA FERREIRA
LILIAN CRISTINA RODRIGUES SARMENTO

1ª série EM
ANATIELLI LEILIANE PEREIRA SANTANA
FABRÍCIO OLIVEIRA SOUZA

2ª série EM
HAROLDO CABRAL MAYA
SEBASTIÃO ALMEIDA MOTA

3ª série EM
HIGOR SOARES MAJONI
MAURÍCIO DE OLIVEIRA CELERI

Sumário

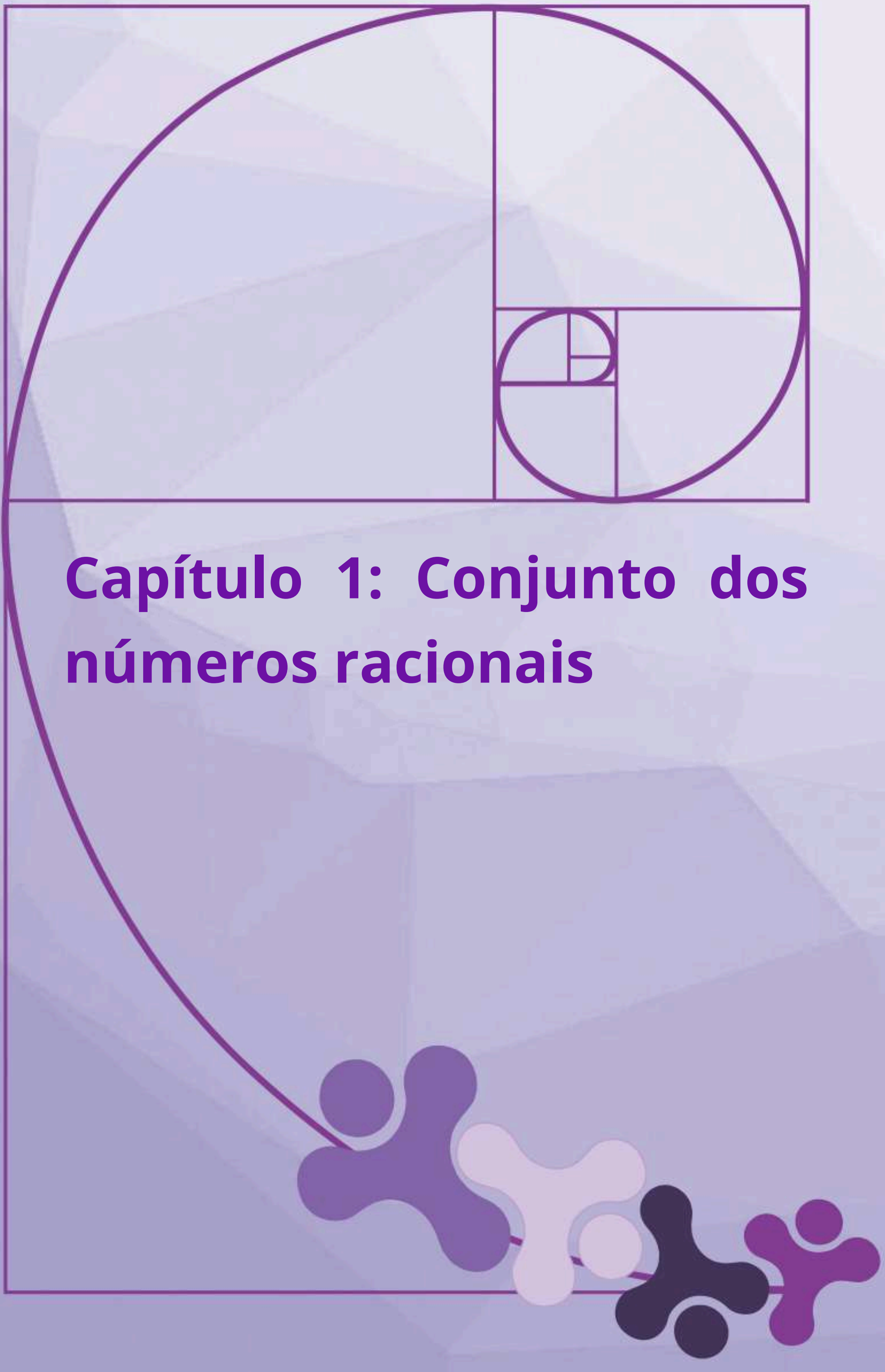
Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

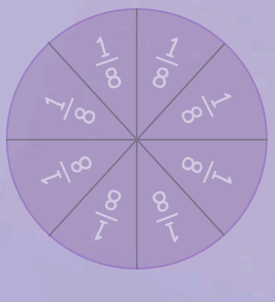
GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Gerência de Currículo
da Educação Básica

SEDU 2026



Capítulo 1: Conjunto dos números racionais



Apresentação

Prezado(a) estudante,

Você já pensou como conseguimos representar partes de um todo, como metade de uma pizza, um desconto de 25% ou a temperatura de –3 °C? Todas essas situações envolvem os números racionais, que podem ser expressos por frações, decimais ou porcentagens e localizados na reta numérica.

Compreender os números racionais é essencial para realizar operações como somar, subtrair, multiplicar e dividir, interpretando seus resultados em diferentes contextos.

O que você vai estudar neste capítulo

Neste capítulo, você será convidado(a) a resolver problemas envolvendo números racionais, percebendo como eles estão presentes nas mais diversas situações do cotidiano, por exemplo, em receitas, finanças, medições e até nas previsões do tempo.

Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- ✓ Reconhecer as diferentes representações de um número racional;
- ✓ Representar números racionais na reta numérica;
- ✓ Efetuar adição de números racionais;
- ✓ Efetuar subtração de números racionais;
- ✓ Efetuar multiplicação de números racionais;
- ✓ Efetuar divisão de números racionais;
- ✓ Efetuar potenciação de base racional e expoente inteiro.

- ✓ Conhecer e aplicar propriedades da potenciação.
- ✓ Efetuar radiciação de número racional.
- ✓ Conhecer e aplicar propriedades da radiciação.
- ✓ Efetuar potenciação de base racional e expoente fracionário ou decimal.
- ✓ Resolver problemas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou radiciação envolvendo números racionais.
- ✓ Elaborar problemas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou radiciação envolvendo números racionais.

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Todo número que pode ser escrito na forma fracionária, com denominador (b) e numerador (a) inteiros e denominador (b) diferente de zero, pertence ao conjunto dos números racionais, que indicamos por Q.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b},\ sendo\, a\, e\, b\, números\, inteiros\, e\, b \neq 0 \right\}$$

Exemplos de números racionais:

$A) -5 \qquad B) -0,75 \qquad C)\ 3,2$

$D)\ \frac{9}{2} \qquad E) -\frac{1}{3} \qquad F) -\frac{20}{5}$

$G) 1,333...$

Alguns desses números já estão representados por **frações**: $\frac{9}{2}, -\frac{1}{3}$ e $-\frac{20}{5}$

Também podemos escrever os demais na forma de fração:

$$-5 = -\frac{5}{1} \qquad -0,75 = -\frac{75}{100} \qquad 3,2 = \frac{32}{10}$$

No exemplo G), temos o número decimal 1,333..., que é um exemplo de uma **dízima periódica**. Mas o que isso significa?

Uma dízima periódica é um número decimal periódico, ou seja, apresenta um ou mais algarismos que se repetem na mesma ordem infinitamente. No caso de 1,333..., o algarismo 3 continua se repetindo para sempre. Para representar isso de forma simplificada, usamos o símbolo de repetição, que é uma barra sobre o número que se repete. Exemplo: $1,\overline{3}$. Esse número pode ser representado na forma de fração e, portanto, é um número racional:

$$\frac{4}{3} = 1,333\ldots$$

Verifique se essa igualdade é verdadeira dividindo 4 por 3.

NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA DECIMAL E NA FORMA FRACIONÁRIA

A forma decimal é uma das representações dos números racionais. Criada para facilitar os cálculos envolvendo frações, a forma decimal está relacionada com as frações decimais: frações que possuem como denominador uma potência de 10 (10, 100, 1000, ...).

Na forma decimal, uma vírgula separa a parte inteira da parte decimal.

Parte inteira | , | Parte decimal

2 , 5

Dois inteiros — Cinco décimos

Veja alguns exemplos da relação entre forma decimal e forma fracionária:

$0,1 = \frac{1}{10}$

Lê-se "um décimo".

$0,01 = \frac{1}{100}$

Lê-se "um centésimo".

$0,001 = \frac{1}{1000}$

Lê-se "um milésimo".

Para **converter um número decimal em uma fração**, podemos utilizar o seguinte método prático:

1. Transformar o decimal em um número inteiro. Para isso, passe a vírgula para a direita a quantidade de vezes que forem necessárias (garantindo que o algarismo da parte decimal seja zero). O número inteiro obtido será o numerador da fração.
2. O denominador terá que começar com o algarismo 1 (será uma potência de 10). A quantidade de zeros que seguirão esse algarismo 1 é a mesma quantidade de vezes que a vírgula foi movida para transformar o decimal em inteiro no primeiro passo do método.

Exemplo 1: $3,\overset{\curvearrowright}{2} = \frac{3\overset{\curvearrowright}{,2},0}{10} = \frac{32,0}{10} = \frac{32}{10}$

Deslocamos a vírgula uma casa para a direta e adicionamos 1 zero no denominador.

Exemplo 2: $5,\overset{\curvearrowright}{19} = \frac{5\overset{\curvearrowright}{,19},0}{100} = \frac{519,0}{10} = \frac{519}{100}$

Deslocamos a vírgula duas casas para a direta e adicionamos 2 zeros no denominador.

Exemplo 3: $-1,\overset{\curvearrowright}{987} = -\frac{1\overset{\curvearrowright}{,987},0}{1000} = \frac{1987,0}{1000} = \frac{1987}{1000}$

Deslocamos a vírgula três casas para a direta e adicionamos 3 zeros no denominador.

Para **transformar um número fracionário em decimal**, podemos determinar uma fração decimal equivalente. Observe alguns exemplos

Exemplo 1: $$\frac{2^{\times 2}}{5_{\times 2}} = \frac{4}{10} = 0,4$$

Exemplo 2: $$\frac{28}{40} \overset{\div 4}{\underset{\div 4}{=}} \frac{7}{10} = 0,7$$

Exemplo 3: $$\frac{3^{\times 25}}{4_{\times 25}} = \frac{75}{100} = 0,75$$

Exemplo 4: $$\frac{5}{8} \overset{\times 125}{\underset{\times 125}{=}} \frac{625}{1000} = 0,625$$

Outra possibilidade para transformar uma fração em um número decimal de mesmo valor é a divisão do numerador pelo denominador. Veja um exemplo:

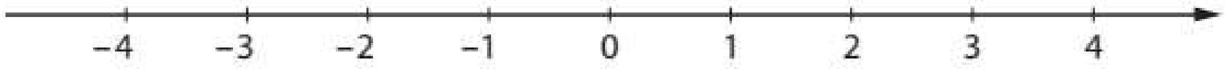
$$\frac{8}{5} = 8 \div 5$$

$$\begin{array}{rr|l} - & 8 & 5 \\ \cline{3-3} & \underline{5} & 1,6 \\ - & 30 & \\ & \underline{30} & \\ & 0 & \end{array}$$

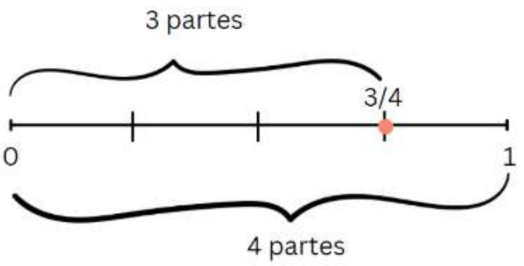
$$\frac{8}{5} = 1,6$$

REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS EM UMA RETA NUMÉRICA

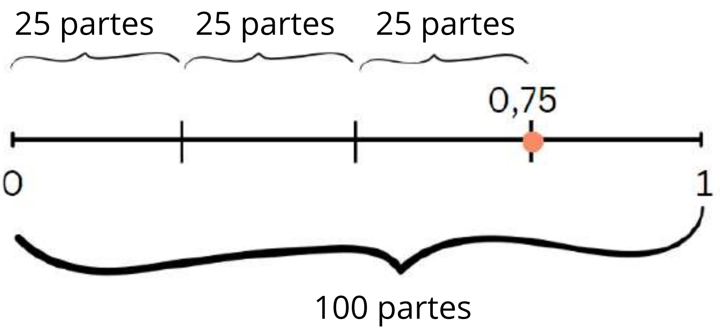
Marcados alguns números inteiros, podemos localizar na reta numérica os pontos correspondentes a alguns números racionais.



Considere a fração $\frac{3}{4}$. O numerador (3) representa a parte que estamos considerando, e o denominador (4) indica em quantas partes iguais a unidade foi dividida. Para localizar na reta numérica, dividimos o segmento entre 0 e 1 em quatro partes iguais e marcamos três dessas partes.



A representação decimal é outra forma comum de expressar números racionais. A fração $\frac{3}{4}$ pode ser escrita como 0,75 em sua forma decimal. O algarismo à esquerda da vírgula representa a parte inteira, e os algarismos à direita indicam a parte decimal. Na reta numérica, localizamos 0,75 entre 0 e 1, dividindo o segmento em cem partes e marcando 75 dessas partes.



Comparação de Números Racionais:

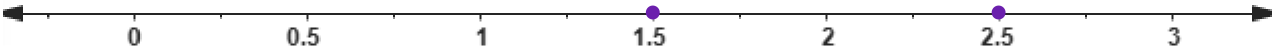
Qual número é maior: $\frac{10}{4}$ ou $\frac{12}{8}$?

Observe dois modos de comparar esses números.

1º modo: Escrevendo-os na forma decimal:

$$\frac{10}{4} = 10 \div 4 = 2,5 \ \ e \ \ \frac{12}{8} = 12 \div 8 = 1,5$$

Para verificar qual número é maior na reta numérica, basta observar sua posição: o número localizado **mais à direita é sempre maior**.



Como $2{,}5 > 1{,}5$, concluímos que $\frac{10}{4} > \frac{12}{8}$.

2º modo: Escrevendo-os na forma fracionária com o mesmo denominador.

$$\underset{\times 2}{\overset{\times 2}{\frac{10}{4} = \frac{20}{8}}}$$

Como $\frac{20}{8} > \frac{12}{8}$, pois 20 > 12, concluímos que:

$$\frac{10}{4} > \frac{12}{8}.$$

Frações equivalentes são aquelas que representam a mesma quantidade ou valor, mesmo tendo numeradores e denominadores diferentes.

Exemplo 2 do 2º modo: vamos comparar as frações: $\frac{2}{3}\ e\ \frac{3}{5}$

Primeiramente, vamos calcular o mmc entre 3 e 5 (denominadores).

$$mmc(3,5) = 15$$

Para a primeira fração, vamos multiplicar o denominador por 5 para transformar em 15. Com isso multiplicamos o numerador também. A segunda fração é multiplicada por 3, com o objetivo de obter denominador igual a 15.

$$\frac{2^{\times 5}}{3^{\times 5}} = \frac{10}{15}$$

Como $\frac{10}{15} > \frac{9}{15}$, então $\boxed{\frac{2}{3} > \frac{3}{5}}$

$$\frac{3^{\times 3}}{5^{\times 3}} = \frac{9}{15}$$

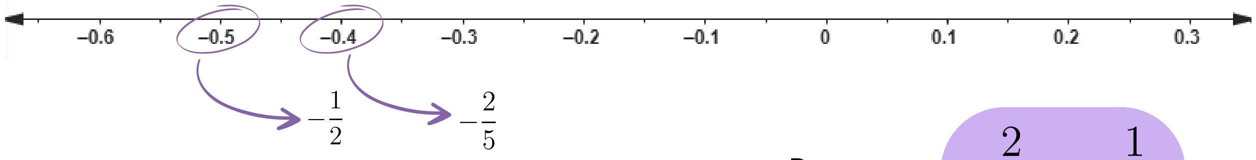
Um outro exemplo interessante é **comparar os números racionais negativos:**

$$-\frac{2}{5}\ e\ -\frac{1}{2}$$

Podemos escrevê-los na forma decimal.

$$-\frac{2}{5} = -0,4\ e\ -\frac{1}{2} = -0,5$$

Cuidado, -0,5 está a esquerda de -0,4 na reta numérica. Então: $-0,4 > -0,5$



Portanto: $\boxed{-\frac{2}{5} > -\frac{1}{2}}$

Exercicios Resolvidos

1) Transforme os números que estão na forma de fração para a forma decimal e aqueles que estão na forma decimal para a forma de fração.

A) $\frac{1}{10}$ B) $-\frac{4}{5}$ C) $0,2$ D) $0,75$

RESOLUÇÃO

A) $\frac{1}{10} = 0,1$

B) $-\frac{4}{5} = -\frac{8}{10} = -\ 0,8$

C) $0,2 = \frac{2}{10} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{1}{5}$

D) $0,75 = \frac{75}{100} \underset{\div 25}{\overset{\div 25}{=}} \frac{3}{4}$

2) Usando os símbolos <, > ou =, compare os números abaixo.

A) $-0,5\ e -\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}\ e\ \frac{5}{4}$ C) $\frac{2}{5}$ e $0,25$

RESOLUÇÃO

A) Primeiramente, vamos transformar o $-0,5$ em fração: $-0,5 = -\frac{0,5}{1} \underset{\times 10}{\overset{\times 10}{=}} -\frac{5}{10} \underset{\div 5}{\overset{\div 5}{=}} -\frac{1}{2}$

Agora, vamos determinar o mmc entre os denominadores 2 e 3: $mmc(2,3) = 6$

Na fração abaixo vamos multiplicar o numerador e denominador por 3.

$$-\frac{1}{2} \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}} -\frac{3}{6}$$

Na próxima fração vamos multiplicar o numerador e denominador por 2.

$$-\frac{2}{3} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} -\frac{4}{6}$$

Como $-\frac{4}{6} < -\frac{3}{6}$ $\dashrightarrow$ $-\frac{4}{6}$ fica à esquerda de $-\frac{3}{6}$ $\dashrightarrow$ $\boxed{-\frac{2}{3} < -0,5}$

B) Para comparar as frações $\frac{1}{3}$ *e* $\frac{5}{4}$, podemos escrevê-las em um denominador comum. Podemos determinar facilmente um denominador comum por meio do m.m.c. entre 3 e 4: $mmc\,(3,4) = 12$

Reescrevendo as frações como frações equivalentes de denominador 12:

$$\frac{1}{3} \underset{\times 4}{\overset{\times 4}{=}} \frac{4}{12} \qquad \frac{5}{4} \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}} \frac{15}{12}$$

Como $\frac{15}{12} > \frac{4}{12}$, podemos concluir que $\boxed{\frac{5}{4} > \frac{1}{3}}$

C) Transformando $\frac{2}{5}$ para forma decimal, temos: $\frac{2}{5} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{4}{10} = 0,4$

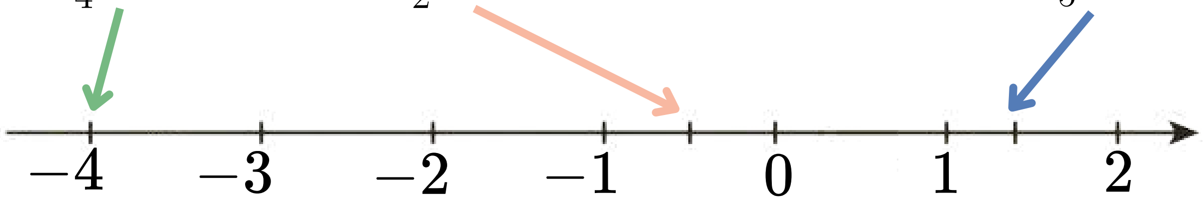
$0,4 > 0,25 \;\therefore\; \boxed{\frac{2}{5} > 0,25}$

3) Construa e localize os seguintes números na reta numérica.

$\boxed{\frac{7}{5}}$ $\boxed{-\frac{16}{4}}$ $\boxed{-\frac{1}{2}}$

RESOLUÇÃO

$-\frac{16}{4} = -4$ $\qquad -\frac{1}{2} = -0,5$ $\qquad \frac{7}{5} = 1,4$



Material Extra

VÍDEO

Introdução aos Números Racionais
https://rpm.org.br/cdrpm/57/2.htm

Atividades

ATIVIDADE 1

Represente os seguintes números na forma decimal.

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{3}{10}$

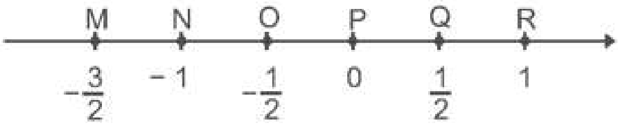
ATIVIDADE 2

Represente os seguintes números na forma fracionária.

A) 0,25
B) 0,4
C) 0,003
D) 2,5

ATIVIDADE 3

Observe abaixo os seis pontos marcados na reta numérica, dividida em segmentos de mesma medida.



O número $-\frac{2}{3}$ está localizado entre os pontos:

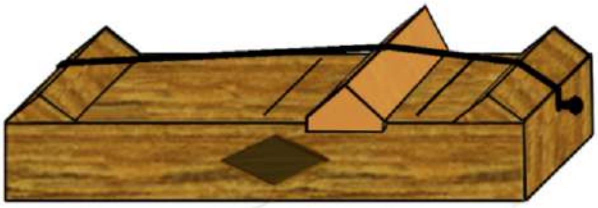
A) M e N.
B) N e O.
C) O e P.
D) Q e R.

ATIVIDADE 4

O monocórdio é um instrumento simples usado para estudar sons e frequências. Ele consiste em uma única corda tensionada sobre uma régua graduada, onde a corda pode ser dividida em diferentes partes para criar sons com frequências distintas.

Ao dividir a corda, diferentes frações do comprimento total da corda são utilizadas, gerando diferentes notas musicais. Por exemplo, dividir a corda em $\frac{1}{2}$ gera uma nota uma oitava acima da nota original.

Considere um monocórdio com 1 metro de comprimento. Complete a tabela abaixo:

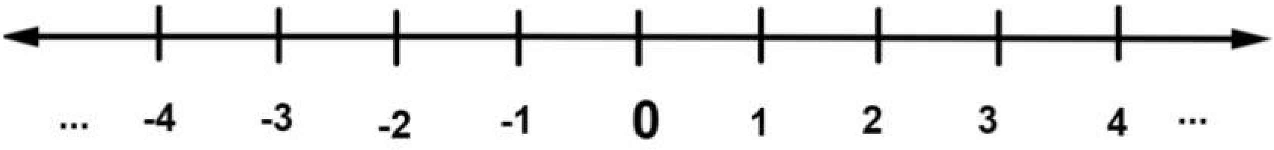


Fração do comprimento da corda	Representação Decimal	Comprimento (em centímetros)
$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{10}$		
		60

ATIVIDADE 5

Represente em uma reta numérica pontos associados aos seguintes números racionais.

$$0,9 \quad -\frac{3}{5} \quad \frac{7}{3} \quad -1,4 \quad 3 \quad -\frac{9}{4}$$



ATIVIDADE 6

Qual é maior, qual é menor ? Complete os espaços usando os sinais > ou < .

A) $-\frac{5}{2}$ ______ $0,22222...$

C) $-\frac{1}{4}$ ______ $-\frac{5}{6}$

B) $-0,125$ ______ $-0,5$

D) $-\frac{3}{8}$ ______ 0

E) $\frac{1}{2}$ ______ $\frac{1}{3}$

F) $0,5$ ______ $0,333...$

ATIVIDADE 7

Escreva cada um dos números a seguir na forma decimal.

A) Dez vírgula quarenta e cinco ______________________________

B) Setenta e cinco centésimos ______________________________

C) Dois inteiros e vinte e cinco milésimos ______________________________

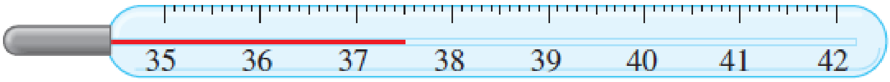
D) Sete décimos ______________________________

E) Três milésimos ______________________________

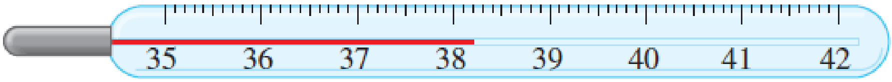
ATIVIDADE 8

Indique a temperatura registrada, em graus Celsius, pelo termômetro nos casos a seguir.

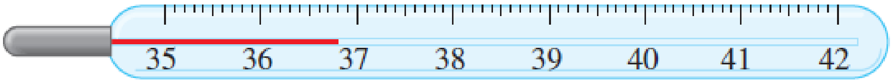
A)



B)



C)



Anders Celsius (1701-1744), astrônomo e físico sueco. Criador da escala Celsius.

ATIVIDADE 9

Considere estes cartões :

Usando sempre os três cartões acima, identifique todos os números racionais com representação decimal possíveis e os coloque em ordem crescente.

ATIVIDADE 10

(Enem 2015) Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,021 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm.

Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de:

A) 2,099.

B) 2,96.

C) 3,021.

D) 3,07.

OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS: ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO NA FORMA DECIMAL

Somar e subtrair números decimais é muito parecido com somar e subtrair números inteiros, mas com um cuidado especial: alinhar as casas decimais. Vamos aprender isso passo a passo.

Vamos aprender com um exemplo: qual o resultado da soma de 1,76 + 2,4?

1º Passo: escrever um número embaixo do outro alinhando as vírgulas.

$$\begin{array}{cccc} & 1, & 7 & 6 \\ + & 2, & 4 & \\ \cline{2-4} \end{array}$$

2º Passo: completar com zeros (se necessário). Se os números tiverem diferentes quantidades de casas decimais, adicione zeros no final do número com a menor quantidade de casas decimais, de forma a igualar essas quantidades de casas dos dois números. Isso facilita a soma ou subtração. Veja que colocamos um zero embaixo do 6.

$$\begin{array}{cccc} & 1, & 7 & 6 \\ + & 2, & 4 & 0 \\ \cline{2-4} \end{array}$$

3º Passo: fazer a operação. Realize a soma ou subtração como faria com números inteiros, começando pela casa decimal mais à direita.

$$\begin{array}{cccc} & 1, & 7 & 6 \\ + & 2, & 4 & 0 \\ \cline{2-4} & 4 & 1 & 6 \end{array}$$

4º Passo: colocar a vírgula no resultado. A vírgula do resultado deve estar alinhada com as vírgulas dos números da operação.

$$\begin{array}{cccc} & 1, & 7 & 6 \\ + & 2, & 4 & 0 \\ \cline{2-4} & 4, & 1 & 6 \end{array}$$

Esse passo a passo também funciona da mesma forma para a subtração.

Agora vamos encontrar o resultado de 8,08 - 3,82.

$$\begin{array}{rccc} & 8, & 0 & 8 \\ - & 3, & 8 & 2 \\ \hline & 4, & 2 & 6 \end{array}$$

Concluimos então que o resultado de 8,08 - 3,82 = 4,26

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO NA FORMA DE FRAÇÃO

Para realizarmos a **adição ou subtração de números racionais representados por frações** podemos reduzir as frações ao mesmo denominador positivo, adicionando ou subtraindo os numeradores e mantendo esse denominador. Quando as frações já possuem o mesmo denominador, basta somar ou subtrair os numeradores e manter o denominador. Vejamos alguns exemplos:

No primeiro exemplo, veja que para ambas as frações o denominador é o 5. Para adicionar essas frações, repetimos 5 (denominador) e adicionamos o 2 e 1 (numeradores).

Com o mesmo denominador:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$$

Outro exemplo:

$$\frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4-1}{7} = \frac{3}{7}$$

No próximo caso, como os denominadores são diferentes, vamos determinar o mmc (3,2) = 6. Agora, vamos multiplicar cada fração pelo número necessário para que o denominador resulte em 6.

Com denominadores diferentes:

$$\frac{2^{\times 2}}{3_{\times 2}} + \frac{1^{\times 3}}{2_{\times 3}} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$$

<u>Outro exemplo:</u>

Neste caso, o mmc entre 2 e 5 é 10. Então multiplicaremos a primeira fração por 5 e a segunda por 2, para que ambos os denominador se igualem. Depois, é só realizar a subtração de frações com denominadores iguais.

$$\frac{1^{\times 5}}{2_{\times 5}} - \frac{2^{\times 2}}{5_{\times 2}} = \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{1}{10}$$

<u>Outro exemplo:</u>

$$-\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{2^{\times 4}}{5_{\times 4}} - \frac{1^{\times 5}}{4_{\times 5}} = -\frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{-8-5}{20} = \frac{-13}{20} = -\frac{13}{20}$$

mmc(5,4)=20

Nesse exemplo, usamos as regras de adição/subtração de números negativos (no numerador da fração).

<u>Outro exemplo:</u>

$$\frac{2}{5} - 0 = \frac{2}{5}$$

<u>Outro exemplo:</u> neste caso, podemos verificar que se multiplicarmos apenas a segunda fração por 6, ambos os denominadores de igualam.

$$-\frac{3}{12} + \frac{1^{\times 6}}{2_{\times 6}} = -\frac{3}{12} + \frac{6}{12} = \frac{-3+6}{12} = \frac{3^{\div 3}}{12_{\div 3}} = \frac{1}{4}$$

mmc(12,2)=12

Lembre-se de simplificar o resultado.

Outro exemplo:

$$\frac{10}{3}+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{50}{15}-\frac{9}{15}=\frac{41}{15} \quad \text{ou} \quad -\frac{3}{5}+\frac{10}{3}=-\frac{9}{15}+\frac{50}{15}=\frac{41}{15}$$

Numa adição de números racionais, a ordem das parcelas não altera o resultado (soma)

Outro exemplo: adição ou subtração com 3 ou mais parcelas. Primeiro, resolvemos os dois primeiros números, depois adicionamos ou subtraímos o resultado com o próximo número, e assim por diante. Vamos fazer um exemplo:

$$\underbrace{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}_{\frac{11}{12}}-\frac{1}{2}=\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{11}{12}-\frac{6}{12}=\frac{5}{12}$$

$$\boxed{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}}$$

Outro exemplo: lembre-se que para tranformar qualquer número inteiro em fração basta escrevê-lo com denominador 1.

Nesta caso, transformamos o 3 em fração com denominador 1. Para igualarmos os denominadores multiplicamos a fração $\frac{3}{1}$ por 2. Assim, ambos os denominadores se igualam.

$$3+\frac{1}{2}=\frac{3}{1}+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

No próximo caso, transformamos o -5 em fração com denominador 1. Para igualarmos os denominadores multiplicamos a fração $-\frac{5}{1}$ por 5. Assim, ambos os denominadores se igualam.

$$-\frac{2}{5}-5=-\frac{2}{5}-\frac{5}{1}=-\frac{2}{5}-\frac{25}{5}=-\frac{27}{5}$$

Para **somar ou subtrair número decimal com fração**, precisamos transformar um dos dois números para que ambos fiquem no mesmo formato: ou tudo em fração ou tudo em decimal. Vamos ver alguns exemplos:

1. Decimal para fração: nesse exemplo vamos transformar o 2,5 para uma fração.

$$2,5+\frac{1}{2}=\frac{25^{\div 5}}{10_{\div 5}}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Lembre-se:
$2,5=\frac{25}{10}$

2. Fração para decimal: nesse exemplo vamos transformar a fração para decimal, dividindo o numerador pelo denominador.

$$\frac{4}{5}-0,2=0,8-0,2=0,6$$

$$\begin{array}{l|l} 40 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 0,8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 0,\ 8 \\ - & 0,\ 2 \\ \hline & 0,\ 6 \end{array}$$

Exercicios Resolvidos

1) Em certo mês, uma cidade do sul do país teve registrada sua temperatura máxima de 14,5°C e temperatura mínima de -2,8 °C. Qual foi a diferença entre as temperaturas máxima e mínima registradas nesse mês?

RESOLUÇÃO

$$14,5-(-2,8)=14,5+2,8=17,3$$

A diferença entre máxima e mínima foi de 17,3ºC.

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{rccc} & 1 & \overset{1}{4}, & 5 \\ + & & 2, & 8 \\ \hline & 1 & 7, & 3 \end{array}$$

2) Roberto reservou $\frac{1}{5}$ de seu salário para gastar com lazer e $\frac{1}{4}$ para comprar roupas. Qual a fração total do salário de Roberto foi reservada para gastar com lazer e roupas?

RESOLUÇÃO

Como o mmc(5,4) = 20 vamos multiplicar a primeira fração por 4 e a segunda por 5. Assim, ambos os denominador se igualam em 20.

$$\frac{1^{\times 4}}{5_{\times 4}}+\frac{1^{\times 5}}{4_{\times 5}}=\frac{4}{20}+\frac{5}{20}=\frac{9}{20}$$

A fração do salário de Roberto reservada para gastos com lazer e roupas é $\frac{9}{20}$.

3) Natália foi comprar 1,5 kg de feijão para sua mãe. O atendente pegou uma quantidade e a balança mediu 1,68 kg. Ele, então, retirou o suficiente para a balança medir 1,5 kg. Qual medida de massa, em quilograma, de feijão que o atendente retirou?

RESOLUÇÃO

$$1,68-1,5=0,18$$

O atendente retirou 0,18 kg de feijão.

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{rccc} & 1, & 6 & 8 \\ - & 1, & 5 & 0 \\ \hline & 0, & 1 & 8 \end{array}$$

Material Extra

VÍDEOS

Vídeo sobre soma de frações com denominadores diferentes
https://rpm.org.br/cdrpm/57/2.htm

Atividades

ATIVIDADE 1

Calcule o resultado e dê a forma de fração.

A) $\left(\frac{-4}{5}\right)+\left(\frac{-1}{2}\right)$

B) $\left(\frac{-5}{3}\right)-\left(\frac{-3}{4}\right)$

C) $\frac{3}{4}-0,25$

ATIVIDADE 2

Observe o quadro, que mostra as medidas de temperatura máxima e mínima registradas em três localidades.

	Localidade A	Localidade B	Localidade C
Medida de temperatura máxima	12,4 °C	–5,1 °C	1 °C
Medida de temperatura mínima	–4,5 °C	–7,6 °C	–2,2 °C

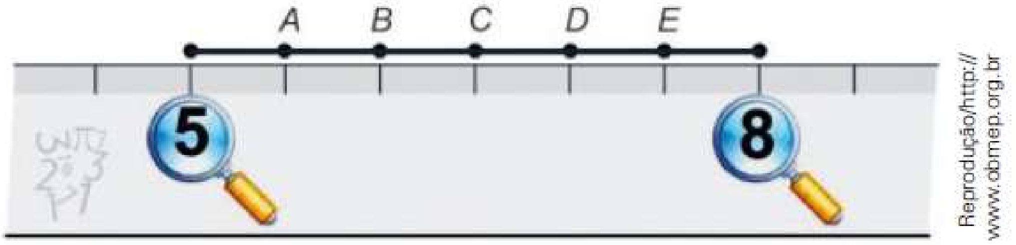
Agora, responda:

A) Qual é a diferença entre as medidas de temperatura máxima e mínima, nessa ordem, em cada localidade?

B) Em qual localidade a diferença de medida de temperatura foi maior?

ATIVIDADE 3

(Obmep) José dividiu um segmento de reta em seis partes iguais. Ele observou que os pontos das extremidades do segmento correspondem às marcas de 5 cm e 8 cm de sua régua. Qual dos pontos corresponde à marca de 6 cm da régua?



Reprodução/http://www.obmep.org.br

A) A B) B C) C D) D

ATIVIDADE 4

Em 2015 foi realizada no Japão a Copa do Mundo de Voleibol Feminino.

Vren Atalay/Anadolu Agency/Getty Images

Jogo entre Itália e Brasil na Copa do Mundo de Voleibol Feminino, em 2015.

Descubra as três primeiras seleções classificadas nesse campeonato, calculando o valor das expressões e comparando os resultados com os números do quadro.

A) 1º lugar: $-0,48 - 0,52 + 3$

B) 2º lugar: $\frac{2}{5} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right)$

C) 3º lugar: $\left(\frac{-2}{5} + \frac{3}{7}\right) - \frac{11}{4}$

Brasil	-2
Sérvia	$\frac{22}{105}$
Estados Unidos	$-\frac{381}{140}$
China	2

ATIVIDADE 5

As panelas de barro, ícones da cultura capixaba, são produzidas há mais de 400 anos pelas paneleiras de Goiabeiras em Vitória - ES. A técnica artesanal utilizada tem origem indígena, passada de geração em geração, e envolve a mistura de argila, barro e água em proporções precisas para garantir a qualidade das peças.

Dona Maria, uma paneleira experiente, está preparando uma nova leva de panelas. Para cada panela, ela utiliza os seguintes materiais:


Foto: IPHAN

3,5 kg de argila

2,25 kg de barro

1,75 L de água

Durante o dia, ela produziu 4 panelas, mas percebeu que usou 0,5 kg a mais de argila e 0,25 L a menos de água do que o planejado em cada panela.

A) Quantos quilos de argila e barro, e quantos litros de água, seriam necessários para produzir as 4 panelas, sem considerar as mudanças na receita original?

B) Considerando as mudanças na receita original, qual foi a quantidade total de argila e água utilizada?

ATIVIDADE 6

Você lembra o que é um quadrado mágico? Nele, a soma dos números em cada linha, coluna ou diagonal é a mesma. Essa soma é a constante mágica.

0	**A**	$-\frac{8}{4}$
C	$\frac{3}{3}$	**D**
4	**B**	2

A) Qual a constante mágica do quadrado mágico acima ?

B) Calcule o valor de A + B + C + D ?

ATIVIDADE 7

Qual é o valor de cada expressão ?

A) $-\frac{1}{4}-\frac{7}{5}-1,32+5$

B) $-\frac{9}{5}+\frac{11}{2}-2+0,71$

ATIVIDADE 8

(Obmep) Qual dos seguintes números está mais próximo de 1 ?

A) $1+\frac{1}{2}$ B) $1+\frac{1}{5}$ C) $1-\frac{1}{3}$ D) $1+\frac{1}{10}$

ATIVIDADE 9

Se Carlos gasta 0,45 litros de tinta para pintar $\frac{3}{4}$ de uma parede , quantos litros ele gastaria para pintar a parede inteira ?

ATIVIDADE 10

Classifique em Verdadeiro ou Falso as afirmações abaixo :

( ) Dois números racionais somados sempre resultarão em um número racional.

( ) O oposto de um número racional será um número racional.

( ) Se somarmos dois números racionais negativos, o resultado será sempre um número positivo.

( ) A diferença entre um número racional negativo e um número racional positivo, sempre resultará em um número negativo.

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Forma fracionária

Para multiplicar números racionais na forma fracionária, devemos multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador.

Exemplos:

a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{2}{15}$

b) $\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}=\frac{3\cdot 4}{7\cdot 9}=\frac{12}{63}\underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}}\frac{4}{21}$

Note que no exemplo b, a simplificação foi realizada no final dos cálculos. Em algumas multiplicações entre frações, podemos fazer uma simplificação antes de multiplicar. O nome dessa técnica é cancelamento. Veja o exemplo b com a aplicação dessa técnica:

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{9}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{7}\cdot\frac{4}{\underset{3}{\cancel{9}}}=\frac{4}{21}$$

A multiplicação entre número inteiro e número racional na forma fracionária pode ser realizada seguindo a mesma regra para multiplicação entre frações. Veja o exemplo a seguir:

$$\frac{3}{4}\cdot 180=\frac{3}{4}\cdot\frac{180}{1}=\frac{540}{4}=135$$

Para multiplicar números racionais positivos ou negativos, devemos considerar a regra de sinais para essas operações:

Multiplicação:

$(+)\cdot(+)=(+)$

$(-)\cdot(-)=(+)$

$(+)\cdot(-)=(-)$

$(-)\cdot(+)=(-)$

Veja alguns exemplos:

- $\frac{4}{7}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{\overset{\div 2}{20}}{\underset{\div 2}{14}}=-\frac{10}{7}$
- $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=\frac{10}{21}$

Forma decimal

Para multiplicar dois números racionais na forma decimal, podemos seguir os seguintes passos:

- consideramos os sinais dos fatores e usando a regra determinamos o sinal do produto;
- multiplicamos os números decimais como se fossem números naturais;
- após obtermos o resultado, posicionamos a vírgula nele de modo que a quantidade de casas decimais seja igual à soma das quantidades de casas decimais dos fatores.

Veja um exemplo: $-3,4 \cdot (-0,91)$

Trata-se de uma multiplicação entre dois números negativos. Assim, o produto será positivo.

$$\begin{array}{cccccl}
 & & & 3, & 4 & \longleftarrow \text{Uma casa decimal} \\
 & \times & 0, & 9 & 1 & \longleftarrow \text{Duas casas decimais} \\
\hline
 & & & 3 & 4 & \\
+ & 3 & 0 & 6 & & \\
 & 0 & 0 & & & \\
\hline
 & 3, & 0 & 9 & 4 & \longleftarrow \text{Três casas decimais}
\end{array}$$

Assim:

$$-3,4 \cdot (-0,91) = +3,094$$

Veja alguns exemplos de multiplicações envolvendo números racionais positivos e negativos:

$$(+6) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = +\frac{6}{3} = 2$$

$$\left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) = +\frac{28}{72} = \frac{7}{18}$$

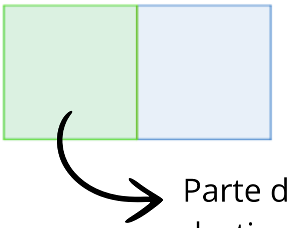
$$(+0,75) \cdot (-9) = -6,75$$

$$(-2,18) \cdot (-1,6) = +3,488$$

Exercicios Resolvidos

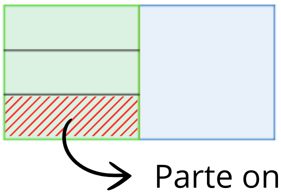
1) Uma pessoa possui, nos fundos de sua casa, um pequeno terreno. Ela decidiu que $\frac{1}{2}$ do terreno seria destinado ao plantio de flores, e dessa parte $\frac{1}{3}$ seria para o cultivo de rosas. Qual fração do terreno representa a parte reservada para o plantio de rosas?

Resolução:



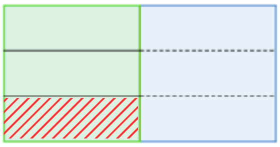
Parte do terreno
destinada ao
plantio de flores

A parte onde ocorrerá o plantio das rosas é um terço da parte reservada para o plantio de flores.



Parte onde as rosas serão plantadas

Estendendo as divisões para o terreno todo, podemos perceber que a parte reservada para o plantio de rosas representa um sexto do terreno.



Na prática, para resolver esse problema precisamos determinar qual fração representa $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ do terreno. O cálculo de fração de uma fração pode ser realizado por meio da multiplicação de frações. Veja:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

A fração do terreno reservada para o plantio de rosas é um sexto.

2) Segundo dados do Censo 2022 realizado pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), o estado do Espírito Santo tinha, em número aproximado, 3,8 milhões de habitantes, dos quais 49% viviam na Região Metropolitana da Grande Vitória (RMGV). Com essa informação qual a população aproximada da Região Metropolitana da Grande Vitória?

VOCÊ SABIA?

Sete municípios compõem a RMGV: Cariacica, Fundão, Guarapari, Serra, Viana, Vila Velha e a capital Vitória.

Resolução:

Vamos calcular 49% de 3,8 milhões. Podemos fazer isso usando a forma decimal da porcentagem:

$$49\% \cdot 3,8 = 0,49 \cdot 3,8$$

Fazendo o cálculo:

$$\begin{array}{r} 0,49 \\ \times \quad 3,8 \\ \hline 392 \\ + \quad 147 \\ \hline 1,862 \end{array}$$

A população aproximada da RMGV será de aproximadamente 1,862 milhão.

Atividades

ATIVIDADE 1

Durante o século IX, o matemático persa Al-Khwarizmi escreveu sobre frações em seu livro "Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala", popularizando o uso de números racionais no mundo islâmico. Ele usava frações para representar partes de um inteiro, o que facilitava a resolução de problemas matemáticos do dia a dia.

Imagine que, para ensinar frações, Al-Khwarizmi propôs o seguinte problema aos seus alunos:

"Um comerciante tinha $\frac{5}{8}$ de um saco de especiarias.

Ele decidiu vender $\frac{2}{3}$ dessa quantidade a um cliente.

Que fração do saco de especiarias o cliente comprou?"

ATIVIDADE 2

Luciana pretende fazer uma lasanha para o almoço de domingo. Precisará comprar 0,400 kg de queijo e 0,300 kg de presunto. Quanto ela gastará com o recheio da lasanha, sabendo que o quilograma de queijo custa R$ 35,50 e o de presunto R$ 21,90?

ATIVIDADE 3

Efetue as operações envolvendo números racionais na forma fracionária.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} =$

b) $\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4} =$

c) $5 \cdot \frac{2}{9} =$

d) $\frac{3}{10} \cdot 7 =$

e) $-\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

f) $\frac{4}{7} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) =$

g) $-6 \cdot \frac{2}{5} =$

h) $\frac{5}{9} \cdot (-4) =$

i) $-\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) =$

j) $-\frac{4}{5} \cdot \frac{10}{3} =$

k) $\frac{9}{14} \cdot \left(-\frac{7}{12}\right) =$

l) $-\frac{15}{16} \cdot \left(-\frac{8}{25}\right) =$

ATIVIDADE 4

Efetue as operações envolvendo números racionais na forma decimal.

a) $2,5 \cdot 0,4 =$

b) $6 \cdot (-1,5) =$

c) $-0,3 \cdot 1,2 =$

d) $-0,8 \cdot (-0,9) =$

e) $1,25 \cdot (-4) =$

f) $-2,1 \cdot 0,3 =$

g) $0,05 \cdot (-1,2) =$

h) $-3,5 \cdot (-2,5) =$

i) $-0,125 \cdot 8 =$

j) $-1,02 \cdot (-0,5) =$

ATIVIDADE 5

Uma moeda de 25 centavos tem 7,55 g de medida de massa. Determine a medida da massa de cada pilha a seguir, sabendo que elas são formadas apenas por moedas de 25 centavos.

a)

b)

c)

ATIVIDADE 6

Paulo e Alberto foram juntos ao posto para abastecer seus veículos. Paulo vai abastecer seu carro com 14,5 litros de gasolina, e Alberto vai abastecer sua caminhonete com 8 litros de diesel. Quanto cada um vai gastar sabendo que o preço do litro da gasolina é R$ 6,12 e o litro do diesel é R$ 6,03?

ATIVIDADE 7

(OBMEP - 2023) Em uma cidade, 1/4 da população tem pelo menos uma bicicleta. Dentre os que têm bicicleta, 1/3 tem mais do que uma. Qual fração da população tem apenas uma bicicleta?

A) 1/5.
B) 1/6.
C) 1/7.
D) 1/8.
E) 1/12.

ATIVIDADE 8

A seguir está parte de uma receita de bolo que rende 4 porções.

- 6 colheres (sopa) bem cheias de margarina (sem sal)
- 3/4 xícara (chá) achocolatado
- 1/2 xícara (chá) chocolate em pó
- 1 1/4 xícara (chá) farinha de trigo

Abaixo, preencha as quantidades desses ingredientes de forma que a receita renda 16 porções.

_____ colheres (sopa) bem cheias de margarina (sem sal)

_____ xícara (chá) achocolatado

_____ xícara (chá) chocolate em pó

_____ xícara (chá) farinha de trigo

DIVISÃO ENVOLVENDO NÚMEROS RACIONAIS

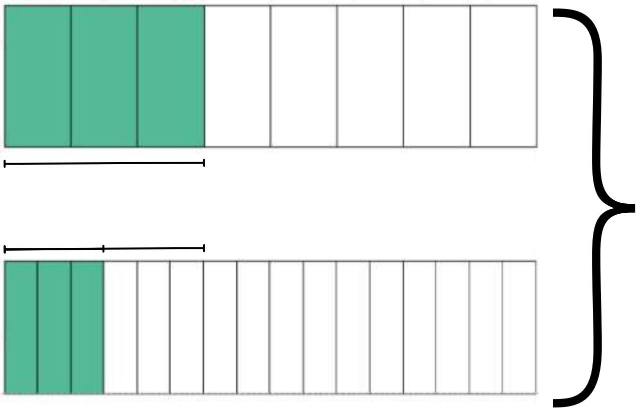
FORMA FRACIONÁRIA

Uma horta comunitária tem um terreno retangular dividido em 8 canteiros de mesmo tamanho. O Sr. José preparou a terra de 3 desses canteiros para o plantio (parte verde na primeira figura).

Na hora de plantar, ele decidiu usar apenas metade dessa terra preparada para plantar alface, deixando o resto para plantar rúcula depois. Que fração do terreno total da horta está ocupada com a plantação de alface?

Considere a representação do terreno retangular a seguir.

Queremos saber qual é a fração do terreno ocupada pela plantação de alface. Como ela é a metade da parte preparada, podemos responder à pergunta do problema dividindo $\frac{3}{8}$ por 2.



$$\frac{3}{8} \div 2 = \frac{3}{16}$$

Note que a metade de $\frac{3}{8}$ é equivalente a $\frac{3}{16}$. De forma prática, na divisão de uma fração por um número inteiro, basta multiplicar a fração pelo inverso desse inteiro.

$$\frac{3}{8} \div 2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

A mesma regra pode ser aplicada na divisão entre um inteiro e uma fração: repetimos o primeiro número (dividendo) e multiplicamos pelo inverso do segundo (divisor).

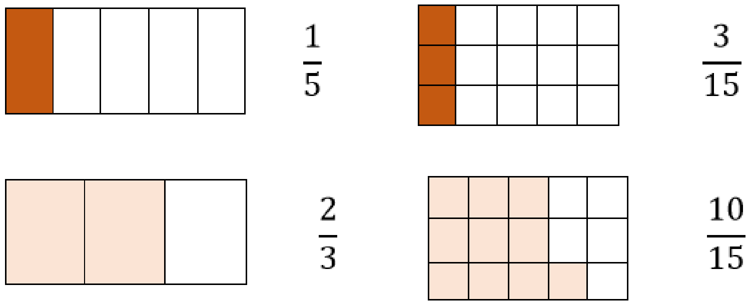
Quando nos deparamos com a divisão de uma fração por outra, devemos multiplicar a primeira fração (dividendo) pelo inverso da segunda fração (divisor). Por exemplo vamos dividir as frações $\frac{2}{3} \div \frac{1}{5}$

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10}{3}$$

Obtemos a fração inversa fazendo o numerador e denominador trocarem de lugar entre si.

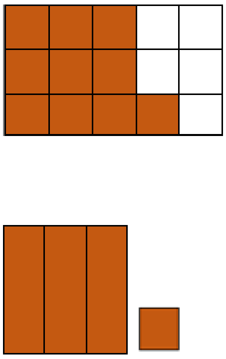
Vamos ilustrar essa operação.

1°) Devemos encontrar frações equivalentes com mesmo denominador.



Cada quadradinho equivale a um terço de $\frac{1}{5}$.

2°) Agora, vamos distribuir os quadradinhos nos $\frac{2}{3}$.



Temos 3 colunas onde cada coluna representa a fração $\frac{1}{5}$.

O quadradinho representa um terço de $\frac{1}{5}$.

Em relação à fração $\frac{1}{5}$, temos, $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

Aplicamos as mesmas regras ao dividir frações positivas ou negativas. Veja alguns exemplos:

- $\left(-\frac{1}{4}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$
- $(-8) \div \frac{2}{5} = \left(-\frac{8}{1}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{40}{2} = -20$

O quociente entre dois números racionais também pode vir indicado no formato a seguir:

Repete-se a fração de cima e multiplica-se pelo inverso da fração de baixo.

- $\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{8}{5} = \dfrac{16}{35}$
- $\dfrac{-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{2}{5} \cdot \left(-\dfrac{2}{1}\right) = \dfrac{4}{5}$

FORMA DECIMAL

Para realizar a divisão envolvendo números racionais na forma decimal, podemos utilizar uma técnica na qual igualamos a quantidade de casas decimais do dividendo e do divisor. Veja os exemplos a seguir.

- $360,8 \div 8 \longrightarrow 360,8 \begin{array}{|l} 8 \\ \hline \end{array}$

Vamos adicionar "**,0**" (vírgula e 0) ao divisor 8 para **igualarmos o número de casas decimais**.

$$3 \quad 6 \quad 0, \quad 8 \begin{array}{|l} 8,0 \\ \hline \end{array}$$

Apagamos a vírgula e realizamos a divisão:

$$\begin{array}{rrrr|lll} 3 & 6 & 0 & 8 & & 80 & \\ \cline{5-7} & 4 & 0 & 8 & 4 & 5, & 1 \\ & & & 8 & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}$$

Assim, $360,8 \div 8 = 45,1$

- $2,12 \div 0,1 \longrightarrow 2,12 \begin{array}{|l} 0,1 \\ \hline \end{array}$

Igualando as casas decimais e adicionando um zero à direita da última casa decimal do 0,1: $2,12 \begin{array}{|l} 0,10 \\ \hline \end{array}$

Retiramos as vírgulas: $212 \begin{array}{|l} 10 \\ \hline \end{array}$

$$\begin{array}{r|l} 212 & 10 \\ \cline{2-2} 12 & 21,2 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Para finalizar, vamos realizar a divisão de 212 por 10.

Então: $2,12 \div 0,1 = 21,2$

$-0,4 \div 1,25$

Neste caso, antes de realizarmos a divisão dos números, vamos fazer a divisão dos sinais. Lembre-se: em divisão entre números de sinais iguais, o quociente é **positivo.** Quando os números que serão divididos têm sinais diferentes, o quociente é **negativo**.

No nosso caso, temos 0,4 negativo dividido por 1,25 positivo. Logo temos sinais diferentes, então o resultado será negativo. Agora, vamos realizar a divisão dos números.

$$\begin{array}{r|l} 0{,}4 & \underline{\;1{,}25\;} \end{array}$$

Igualando as casas decimais, adicionando um zero ao 0,4:

$$\begin{array}{r|l} 0{,}40 & \underline{\;1{,}25\;} \end{array}$$

Podemos retirar as vírgulas e realizar a divisão do 40 por 125.

$$\begin{array}{r|l} 40 & \underline{\;125\;} \end{array}$$

O número 125 “não cabe” no número 40. Representamos isso registrando um zero no quociente. Na sequência, usamos a seguinte equivalência:
40 unidades = 400 décimos. Como vamos dividir décimos, devemos colocar uma vírgula no quociente, separando a parte inteira da decimal.

$$\begin{array}{r|l} 400 & \underline{\;125\;} \\ & 0, \end{array}$$

Continuamos com nossa divisão:

$$\begin{array}{r|l} 400 & \underline{\;125\;} \\ 250 & 0{,}32 \\ 0 & \end{array}$$

Não podemos nos esquecer que o resultado é negativo. Portanto:

$$-0,4 \div 1,25 = -0,32$$

Pode ocorrer também a **divisão de um número decimal por um número na forma de fração**. Vejamos um exemplo:

$$0,25 \div \frac{1}{2}$$

Podemos resolver de 2 formas: transformando o 0,25 em fração e realizando a divisão de frações ou transformando a fração em decimal e realizando a divisão de números decimais. Vamos ver as duas maneiras!

1ª Forma: vamos transformar o 0,25 em fração.

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Substituimos o 0,25 pela fração e realizamos a divisão de frações.

$$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

2ª Forma: vamos transformar a fração $\frac{1}{2}$ em número decimal.

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

Substituimos esse valor na divisão:

$$0,25 \div 0,5$$

Igualando as casa decimais e retirando as vírgulas, temos:

$$\begin{array}{r|l} 250 & 50 \\ \cline{2-2} 0 & 0,5 \end{array}$$

Por esse método, também encontramos que:

$$0,25 \div 0,5 = 0,5$$

Exercicios Resolvidos

1) Pedro fez 0,8 litro de suco para dividir entre seus amigos. Os copos descartáveis têm a capacidade de 0,2 litro. Quantos copos serão necessários?

Resolução:
Temos que efetuar a divisão entre a quantidade de suco e a capacidade dos copos.

$$0,8 \div 0,2 \rightarrow (0,8 \cdot 10) \div (0,2 \cdot 10) \rightarrow 8 \div 2 = 4$$

Portanto serão necessários 4 copos.

2) Uma jarra de leite tem capacidade para 1 litro e estava pela metade. Esse leite será distribuído em copos de $\frac{1}{8}$ litro. Qual a quantidade de copos de que serão preenchidos?

Resolução:
Como o leite será distribuído em copos, teremos que fazer uma divisão entre a quantidade de leite e a capacidade dos copos. Assim teremos:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{1} = \frac{8}{2} = 4$$

Logo serão necessários 4 copos de leite.

Material Extra

VÍDEO

Divisão com números decimais
https://www.youtube.com/watch?v=ew_OrOytOLU

Atividades

ATIVIDADE 1

Efetue as operações envolvendo números racionais na forma fracionária.

a) $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} =$

b) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{7} =$

c) $\frac{4}{7} \div \frac{2}{3} =$

d) $\frac{5}{9} \div \frac{5}{2} =$

e) $4 \div \frac{1}{2} =$

f) $\frac{2}{3} \div 5 =$

g) $-\frac{3}{8} \div \frac{2}{5} =$

h) $\frac{4}{11} \div \left(-\frac{1}{3}\right) =$

i) $-6 \div \frac{3}{4} =$

j) $\frac{7}{10} \div (-14) =$

k) $-\frac{5}{12} \div \left(-\frac{10}{3}\right) =$

l) $-\frac{9}{16} \div \left(-\frac{3}{8}\right) =$

ATIVIDADE 2

Uma jarra de suco com capacidade de $\frac{5}{2}$ litros será servida em copos com capacidade de $\frac{1}{4}$ de litro. Quantos copos serão preenchidos com suco?

ATIVIDADE 3

Efetue as operações envolvendo números racionais na forma decimal.

$\text{a)} 12,4 \div 4 =$

$\text{b)} 4,5 \div 0,5 =$

$\text{c)} -18,6 \div 3 =$

$\text{d)} 7,2 \div (-0,9) =$

$\text{e)} -5 \div 0,25 =$

$\text{f)} -1,44 \div (-0,12) =$

ATIVIDADE 4

Cíntia está trocando parte da fiação elétrica de sua casa. Para isso, ela comprou 8 metros de fio e pagou R$ 23,20. Após uma semana, ela percebeu que precisava de mais 0,5 metro desse mesmo fio. Sabendo que o preço do fio não mudou, quanto Cíntia pagará por 0,5 metro de fio?

ATIVIDADE 5

Uma barra de chocolate estava pela metade e foi dividida entre os três filhos de David. Qual é a fração que representa a quantidade de chocolate consumida por cada um dos filhos de David em relação à barra de chocolate inteira ?

ATIVIDADE 6

Na semana passada, Gisele colocou 39,1 litros de gasolina em seu carro, pagando R$ 6,80 por litro. Nesta semana, houve um aumento, e o litro da gasolina passou a custar R$ 6,90 no mesmo posto.

A) Colocando a mesma quantidade de gasolina da semana passada, quanto Gisele gastará a mais nesta semana?

B) Se ela quiser gastar a mesma quantia que gastou na semana passada com gasolina, quantos litros poderá colocar em seu carro?

C) Se Gisele pedir ao frentista, nesta semana, que coloque gasolina em seu carro até inteirar o valor de R$ 124,00, quantos litros serão colocados?

ATIVIDADE 7

Leia com atenção a receita a seguir.

Cupcake de morango (rende 6 porções)

Massa Cobertura: Chantilly

- 1/2 xícara(s) (chá) de manteiga
- 3/4 xícara(s) (chá) de açúcar
- 2 unidade(s) de ovo
- 1 1/2 xícara(s) (chá) de farinha de trigo
- 1/2 colher(es) (chá) de fermento químico em pó
- 1 colher(es) (chá) de raspas de limão
- 1 xícara(s) (chá) de morango picado(s)

a) Para fazer uma receita de Cupcake de Morango que renda 2 porções, qual será a quantidade de açúcar necessária?

b) Para fazer uma receita de Cupcake de Morango que renda 2 porções, qual será a quantidade de farinha de trigo necessária?

c) Para fazer uma receita de Cupcake de Morango que renda 3 porções, qual será a quantidade de manteiga necessária?

ATIVIDADE 8

(OBMEP -2024) Um grupo de amigos se reuniu para comer quatro pizzas. Cada um deles comeu dois terços de uma pizza e não sobrou nada. Quantos eram os amigos?

A) 16.
B) 4.
C) 12.
D) 6.
E) 8.

POTÊNCIA DE UMA FRAÇÃO

A potenciação é uma operação matemática que indica multiplicações sucessivas de fatores iguais.

$$\underset{\text{base}}{2}^{\overset{\text{expoente}}{3}} = 8 \quad pois \quad \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{o expoente indica a quantidade de fatores}} = 8$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

Mas e se a fração da base for negativa? Nesse caso faremos a potenciação obedecendo à seguinte regra:

- Se o expoente for um número **par**, o resultado será **positivo.**

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{4}{9}$$

- Se o expotente for um número **ímpar**, o resultado será **negativo**.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$$

Quando o expoente é par, podemos agrupar os fatores negativos em pares. Cada par de fatores negativos gera um produto positivo, e a multiplicação desses produtos positivos também será positiva. Já quando o expoente é ímpar, podemos organizar os fatores em pares (que resultarão em números positivos). No entanto, sempre sobrará um fator negativo, já que a quantidade total de fatores é ímpar. Assim, o produto final será o resultado de um número positivo multiplicado por um número negativo, o que dará um número negativo.

Exemplos:

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = +\frac{1}{16}$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = +\frac{9}{25}$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{27}{125}$$

POTÊNCIA DE UM NÚMERO DECIMAL

Como podemos efetuar a potenciação de números decimais? Para facilitar, vamos mostrar um passo a passo para encontrar o resultado de $(0,5)^2$.

1° - Escreva os algarismos significativos da base.

$0,5 \rightarrow$ *algarismo significativo* = 5

2° - Calcule a potenciação do algarismo significativo.

$$5^2 = 25$$

3° - Coloque a vírgula no lugar.

Para posicionar a vírgula corretamente faça a multiplicação do expoente pela quantidade de algarismos que estão na **parte decimal**.

- expoente = 2
- algarismos na parte decimal = 1

$$2 \cdot 1 = 2$$

Use esse resultado para posicionar a vírgula completando com zeros quando não houver algarismo significativo.

$$25{,}0 \rightarrow 0,\underbrace{25}_{\text{2 casas à esquerda do 5}}$$

Você se lembra?

Algarismos significativos são responsáveis por dar exatidão a um número. São os dígitos que temos certeza que assumem esse valor.

$$0,1 \rightarrow algarismo\ significativo = 1$$

$$2,2 \rightarrow algarismos\ significativos = 22$$

$$0,03 \rightarrow algarismo\ significativo = 3$$

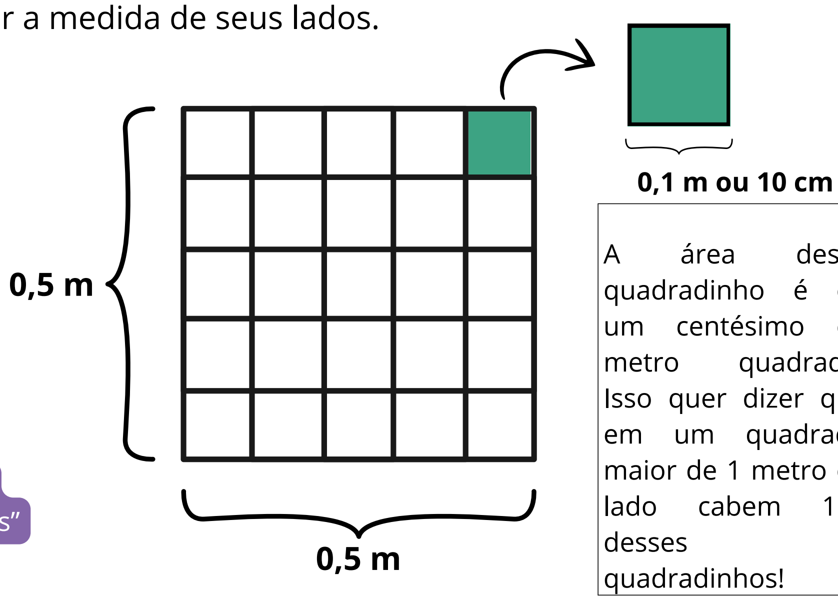
Neste exemplo o resultado foi de 25 centésimos. Vamos verificar isso calculando a área de um quadrado de 0,5 metro (ou 50 cm) de lado. Para calcular a área de um quadrado basta multiplicar a medida de seus lados.

$$A = l^2$$

$$(0,5)^2 = (0,5) \cdot (0,5)$$

$$\begin{array}{r} 0,5 \\ \times \;\; 0,5 \\ \hline 0,25 \end{array}$$

Lê-se “vinte e cinco centésimos”



A área desse quadradinho é de um centésimo de metro quadrado. Isso quer dizer que em um quadrado maior de 1 metro de lado cabem 100 desses quadradinhos!

Como resultado temos 0,25 metro quadrado de área ou seja 25 quadradinhos em que sua área mede um centésimo de metro quadrado.

Vamos aplicar o passo a passo nesse exemplo mais desafiador $(0,0009)^3$.

1° - Escreva os algarismos significativos da base:

$$0,0009 \rightarrow 9$$

2° - Calcule a potenciação do algarismo significativo:

$$9^3 = 729$$

3° - Coloque a vírgula no lugar.

- expoente = 3
- algarismos na parte decimal = 4

$$\left\{ \; 3 \cdot 4 = 12 \right.$$

$$729,0 \rightarrow 0,\underbrace{000000000729}$$

12 casas à esquerda do 9.

POTÊNCIAS COM EXPOENTES INTEIROS

Nos exemplos que vimos até agora utilizamos números inteiros positivos como expoentes. Mas podemos utilizar o zero e os números negativos. Como podemos calcular potências com expoente zero, ou mesmo com expoente negativo?

EXPOENTE ZERO

Observe as potências abaixo:

$$\begin{tikzcd}
2^3 \arrow[r] \arrow[d, bend left, "-1"] & 8 \arrow[d, bend left, "\div 2"] \\
2^2 \arrow[r] \arrow[d, bend left, "-1"] & 4 \arrow[d, bend left, "\div 2"] \\
2^1 \arrow[r] & 2
\end{tikzcd}$$

O que acontece com o resultado da potência quando o expoente diminui 1? O resultado da potência anterior é dividido por 2. Então podemos deduzir o resultado de 2^0, basta dividir 2^1 por 2.

$$\begin{tikzcd}
2^1 \arrow[r] \arrow[d, bend left, "-1"] & 2 \arrow[d, bend left, "\div 2"] \\
2^0 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Pela análise dessa sequência de potências, podemos aplicar essa propriedade a todo número elevado ao expoente zero (não sendo o próprio zero).

Qualquer número diferente de zero elevado ao expoente 0 é igual a 1.

Por que tiramos o zero dessa regra? Não dá para determinar o resultado de 0^0.
Tomemos ***n*** como um número natural e incluiremos o zero também. Vejas as regras abaixo:

$$I)\ 0^n = 0 \quad pois \quad \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \ ... \cdot 0}_{\textbf{\textit{n}}\text{ vezes}} = 0$$

$$II)\ n^0 = 1$$

Se **n** for zero, pela regra ***I)*** zero elevado a zero deveria ser 0, mas pela regra ***II)*** zero elevado a zero deveria ser 1. Essa confusão leva à uma indeterminação. Portanto, quando elevamos uma base ao expoente zero, essa base não pode ser zero.

EXPOENTE NEGATIVO

Para entender qual o resultado de uma potência com expoente negativo observe a continuação da sequência de expoentes abaixo:

$$\begin{tikzcd}
2^0 \arrow[r] \arrow[d, bend left, "-1"] & 1 \arrow[d, bend left, "\div 2"] \\
2^{-1} \arrow[r] \arrow[d, bend left, "-1"] & \frac{1}{2} \arrow[d, bend left, "\div 2"] \\
2^{-2} \arrow[r] & \frac{1}{4}
\end{tikzcd}$$

O que acontece com o resultado da potência quando o expoente diminui 1? O resultado da potência anterior é dividido por 2.

Você ainda pode notar algo interessante. Veja novamente (a seguir) a sequência de potências.

$$2^0 \rightarrow 1$$
$$2^{-1} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$$
$$2^{-2} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

O expoente negativo inverte a potência. Como consequência disso não podemos aplicar o expoente negativo à base zero. A operação de divisão por zero não tem resultado e é considerada impossível na matemática.

Pela análise da sequência de potências, podemos aplicar a seguinte propriedade a todo número elevado ao expoente negativo, com exceção do zero:

Em qualquer número diferente de zero elevado ao expoente negativo, devemos inverter a base e mudar o sinal do expoente para positivo.

E se a base for uma fração? Inverteremos a fração e o expoente ficará positivo. Observe o exemplo:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{16}{9}$$
$$\left(\frac{7}{8}\right)^{-1} \rightarrow \left(\frac{8}{7}\right)^{1} = \frac{8}{7}$$
$$\left(\frac{5}{6}\right)^{-3} \rightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^{3} = \frac{216}{125}$$

Se a base for um número racional na forma decimal e o expoente for negativo, podemos reescrever a base como uma fração e proceder com os cálculos. Veja dois exemplos:

$$(0,25)^{-3} = \left(\frac{25}{100}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{1}\right)^{3} = \frac{64}{1} = 64$$

$$(-0,3)^{-4} = \left(-\frac{3}{10}\right)^{-4} = \left(-\frac{10}{3}\right)^{4} = +\frac{10000}{81}$$

PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

As propriedades da potenciação estudadas para os números inteiros também são válidas para os números racionais. Vejamos:

Para determinar o produto de potências de mesma base, conservamos a base e **somamos** os expoentes.

- $$\left(-\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \left(-\frac{3}{8}\right)^5$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

- $$(0,3)^5 \cdot (0,3)^{-6} = (0,3)^{5+(-6)} = (0,3)^{5-6} = (0,3)^{-1}$$

Para determinar o quociente de potências de mesma base, conservamos a base e **subtraímos** os expoentes.

- $$\left(\frac{5}{6}\right)^6 \div \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$a^m \div a^n \textbf{ ou } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

- $$(5)^{-2} \div (5)^{-3} = (5)^{-2-(-3)} = (5)^{-2+3} = (5)^1 = 5$$
- $$(-0,7)^{10} \div (-0,7)^7 = (-0,7)^{10-7} = (-0,7)^3$$

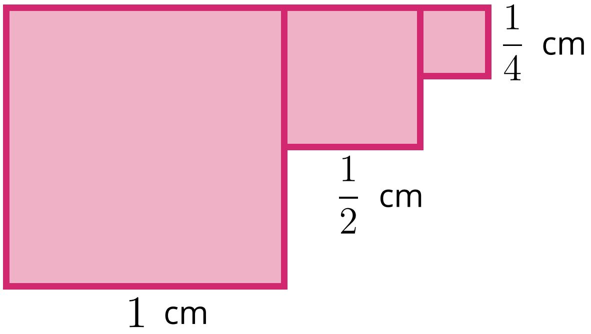
Para determinar a potência de uma potência, conservamos a base e **multiplicamos** os expoentes.

- $$\left[(-0,3)^2\right]^5 = (-0,3)^{10}$$
- $$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-9}$$

$$(a^m)^n = a^{m\times n}$$

Exercicios Resolvidos

1) A figura a seguir é formada por 3 quadrados cujas medidas estão indicadas. Calcule a área total da figura.



Resolução:
A área de um quadrado é dada pela medida de seu lado elevada ao quadrado. Vamos escrever a soma das áreas como soma dos quadrados dos lados:

$$1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

Para realizar essa adição, encontramos frações equivalentes:

$$\frac{16}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{21}{16}\text{ cm}^2$$

A figura composta pelos três quadrados possui área de $\frac{21}{16}$ cm².

2) Determine o valor de cada uma das potências de fração abaixo.

$A)\quad \left(\frac{6}{5}\right)^2$

$B)\quad \left(-\frac{3}{10}\right)^3$

$C)\quad \left(-\frac{2}{3}\right)^4$

Resposta

$A)\left(\frac{6}{5}\right)^2\to\left(\frac{6^2}{5^2}\right)=\frac{36}{25}$

$B)\left(-\frac{3}{10}\right)^3\to\left(-\frac{3}{10}\right)\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)=\left(\frac{-27}{1000}\right)$

Base negativa com expoente ímpar: resultado negativo.

$C)\left(-\frac{2}{3}\right)^4\to+\left(\frac{2^4}{3^4}\right)=+\frac{16}{81}$

Base negativa com expoente par: resultado positivo.

3) Calcule o resultado das potências com números decimais:

$A)\ (0,3)^2$
$B)\ (0,07)^3$
$C)\ (1,2)^2$

Resposta:

$$A)\ (0,3)^2 \rightarrow \textit{algarismo significativo} = 3$$
$$\rightarrow \textit{calcular a potência} \rightarrow 3^2 = 9$$
$$\rightarrow \textit{colocar a vírgula} \rightarrow 1 \cdot 2 = 2 \textit{ casas na parte decimal}$$
$$\rightarrow 0,09$$

$$B)\ (0,07)^3 \rightarrow \textit{algarismo significativo} = 7$$
$$\rightarrow \textit{calcular a potência} \rightarrow 7^3 = 343$$
$$\rightarrow \textit{colocar a vírgula} \rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \textit{ casas na parte decimal}$$
$$\rightarrow 0,000343$$

$$C)\ (1,2)^2 \rightarrow \textit{algarismo significativo} = 12$$
$$\rightarrow \textit{calcular a potência} \rightarrow 12^2 = 144$$
$$\rightarrow \textit{colocar a vírgula} \rightarrow 1 \cdot 2 = 2 \textit{ casas na parte decimal}$$
$$\rightarrow 1,44$$

4) Descubra o número que deve ser colocado no lugar do 🟪 , com auxílio das propriedades da potenciação:

A) $6^4 \cdot 6^5 \div \left(6^3\right)^3 = 6^{\blacksquare}$

B) $\left((-2)^8\right)^{10} \div \left((-2)^8 \cdot (-2)^{10}\right) = (-2)^{\blacksquare}$

RESOLUÇÃO

A) $6^4 \cdot 6^5 \div \left(6^3\right)^3 =$

$$6^9 \div 6^9 =$$

$$= 6^0$$

Portanto, 🟪 = 0.

RESOLUÇÃO

B) $\left((-2)^8\right)^{10} \div \left((-2)^8 \cdot (-2)^{10}\right) =$

$$(-2)^{80} \div (-2)^{18} =$$

$$= (-2)^{62}$$

Portanto, 🟪 = 62.

Atividades

ATIVIDADE 1

O índice de massa corporal, mais conhecido pela sigla IMC, é um índice adotado pela OMS (Organização Mundial de Saúde), que é usado para o diagnóstico do sobrepeso e da obesidade. O IMC pode ser facilmente calculado a partir do peso, dado em kg, e da altura, dada em metros, pela fórmula: $\text{IMC} = \dfrac{\text{PESO}}{(\text{ALTURA})^2}$.

Calcule o IMC de uma pessoa que pesa 64 kg e mede 1,60 m.

ATIVIDADE 2

Efetue as operações envolvendo números racionais na forma fracionária.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$

b) $\left(\frac{7}{2}\right)^1 =$

c) $\left(\frac{5}{9}\right)^0 =$

d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 =$

e) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 =$

f) $\left(-\frac{11}{4}\right)^0 =$

g) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} =$

h) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

i) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-1} =$

j) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} =$

k) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} =$

l) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3} =$

ATIVIDADE 3

Efetue as operações envolvendo números racionais na forma decimal.

$a)(0,2)^2 =$

$b)(1,1)^2 =$

$c)(-0,5)^3 =$

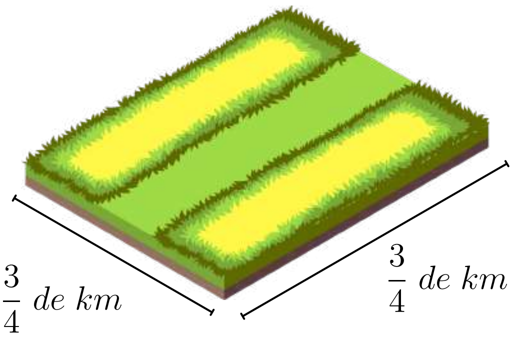
$d)(-2,5)^0 =$

$e)(-0,1)^{-2} =$

$f)(0,03)^2 =$

ATIVIDADE 4

A medida do lado de um terreno quadrado é $\frac{3}{4}$ de quilômetro. Qual fração representa a área desse terreno em km^2?



ATIVIDADE 5

Para deixar de ter vida sedentária, Gabriel decidiu fazer caminhada na pista de corrida de um parque. Com a ajuda de um profissional, ele montou um programa de condicionamento físico. Na primeira semana de treinamento, daria uma volta e meia na pista de corrida e a cada semana seguinte ele caminharia 1,5 vez o total caminhado na semana anterior.

Preencha a tabela abaixo representando o número de voltas a cada semana com potências e também na forma fracionária .

Semana de treinamento	1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana
Número de voltas	$1,5$ ou $\frac{3}{2}$			

ATIVIDADE 6

Aplicando as propriedades das potências, resolva as sentenças a seguir.

A) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^{2+3} = \left(\frac{5}{2}\right)^5 =$

B) $(0,8)^5 \div (0,8)^3 =$

C) $\left[(3,2)^2\right]^2 =$

D) $\left(\frac{3}{10}\right)^7 \div \left(\frac{3}{10}\right)^2 =$

RADICIAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

REGRESSÃO DE JÚLIA

Júlia Pimenta Ferreira, uma estudante do ensino fundamental de 11 anos de idade, percebeu um jeito intessante de calcular a raiz quadrada de um número natural. Esse método ficou conhecido como "Regressão de Júlia". Mas como funciona a Regressão de Júlia? Vamos ver um exemplo para calcularmos a raiz quadrada do número 121.

Primeiro, vamos escolher um número natural, e em seguida multiplicar por ele mesmo. Por exemplo, 10.

$$10 \cdot 10 = 100$$

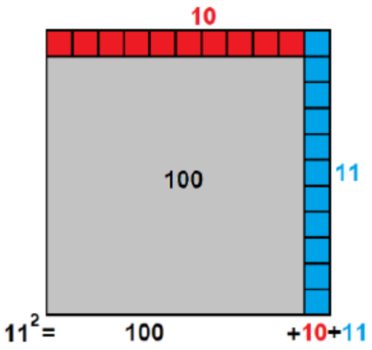
Daí concluímos que a raiz quadrada de 100 é igual a 10, pois 10 vezes 10 é 100.

Agora some o 100 ao 10, e em seguida ao sucessor de 10, ou seja 11.

$$100 + 10 + 11 = 121$$

Logo a raiz quadrada de 121 é 11, o número que somamos por último.

Isso pode ser ilustrado geometricamente.



Este método prático funciona para determinar raízes quadradas de números naturais que são *quadrados perfeitos.* Nesta seção, veremos métodos para determinar raízes bem como uma importante relação entre a radiciação e a potenciação.

Para saber mais:
Regressão de Júlia

Clique aqui

MÉTODOS PARA EXTRAIR A RAIZ DE UM NÚMERO

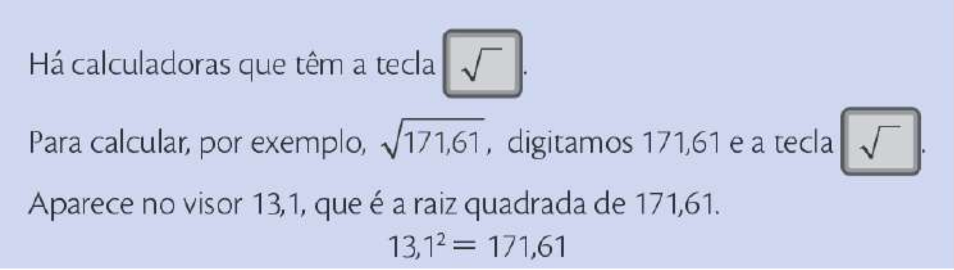
A radiciação é a operação matemática inversa à potenciação. Enquanto a potência é determinada por multiplicação de fatores iguais, a radiciação determina qual é o fator igual que foi multiplicado sucessivas vezes para resultar no radicando. Exemplo:

$$\sqrt[2]{100} = 10 \Leftrightarrow 10^2 = 100$$

O símbolo $\sqrt{\ }$ recebe o nome de radical.
O número 100 recebe o nome de radicando.
O 2 é o índice da raiz. Quando se trata de uma raiz quadrada ele é omitido.

Vamos apresentar alguns métodos para se extrair uma raiz quadrada de um número positivo. Esses podem ser aplicados a outros índices de raízes tais como a raiz cúbica ($\sqrt[3]{\ }$), raiz quarta ($\sqrt[4]{\ }$), etc.

- Utilize uma calculadora eletrônica: encontre a função raiz quadrada na calculadora e insira o número que se pretende encontrar a raiz quadrada.



Há calculadoras que têm a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Para calcular, por exemplo, $\sqrt{171{,}61}$, digitamos 171,61 e a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Aparece no visor 13,1, que é a raiz quadrada de 171,61.

$13{,}1^2 = 171{,}61$

- Utilize fatoração: faça a fatoração do radicando, e a seguir simplifique com o radical.

Exemplo:

Qual o resultado de $\sqrt[4]{16}$?

Fatoração do radicando

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 16 = 2^4$$

Simplificação com o radical

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[\cancel{4}]{2^{\cancel{4}}} = 2$$

Logo, o resultado é 2.

Essa propriedade será apresentada com mais detalhes na próxima seção de conceitos e conteúdos.

- Utilize tentativas de acerto e erro coordenado: consiste em determinar uma raiz como referência e multiplicar valores próximos até chegar no resultado da raiz desejada. Exemplo

$\sqrt{125} = ?$

$10^2 = 100$

$11^2 = 121$

$12^2 = 144$

Note que a raiz procurada será um número entre 11 e 12.

$11,1^2 = 123,21$

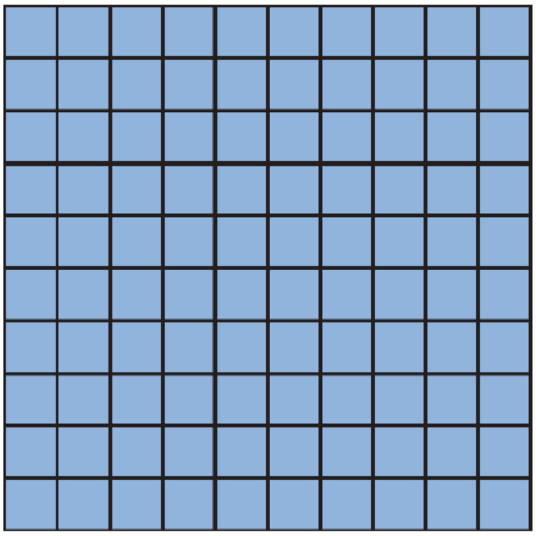
$11,2^2 = 125,44$

Logo temos que a raiz será próxima de 11,1.

Como 125 não é um número quadrado perfeito, então ele não possui raiz quadrada exata. No exemplo acima, foi mostrada uma aproximação com apenas uma casa decimal.

Interpretação geométrica da raiz quadrada

Acompanhe como podemos usar estas regiões planas para formar regiões quadradas e calcular o valor de raízes quadradas.



100 quadradinhos (10 por 10).

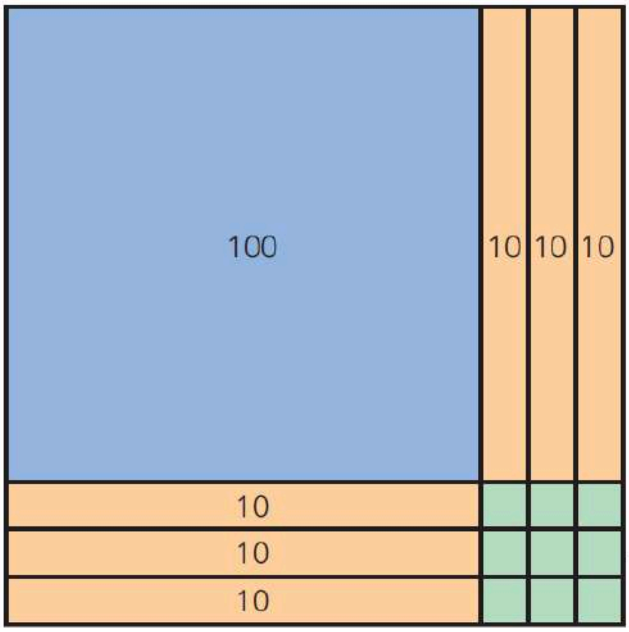
10 quadradinhos (1 por 10).

1 quadradinho (1 por 1).

Considere, por exemplo, a interpretação geométrica de $\sqrt{169}$.

Devemos obter uma região quadrada cuja medida de área é 169 quadradinhos. A medida de comprimento do lado dessa região vai determinar o valor de $\sqrt{169}$.

- Medida de área da região azul: 100 quadradinhos.
- Medida de área da região laranja: 60 quadradinhos (6 ·10 = 60).
- Medida de área da região verde: 9 quadradinhos ($3^2 = 9$).
- Medida de área da região quadrada toda: 169 quadradinhos (100 + 60 +9).



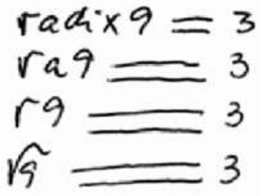
Dessa interpretação geométrica, concluímos que a medida de comprimento de cada lado dessa região quadrada é 13 (10 + 3 = 13). Logo, $\sqrt{169} = 13$.

De modo geral, podemos fazer a interpretação geométrica dessa maneira para qualquer número natural que tem raiz quadrada exata, como é o caso do 169.

Por isso, dizemos que esses números são *quadrados perfeitos*.

VOCÊ SABIA?

O símbolo matemático para raiz é uma criação do alemão Christoff Rudolff, em seu livro Die Coss, de 1525. Acredita-se que o símbolo seja inspirado na letra “r”, da palavra latina para raiz, radix, que representava a raiz.



E se o número racional estiver expresso na forma decimal? Como calcular uma raiz desse número? Podemos escrevê-lo na forma fracionária e aplicar uma propriedade da radiciação. Veja os exemplos:

$$\sqrt{0,81} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10} = 0,9$$

$$\sqrt[3]{0,343} = \sqrt[3]{\frac{343}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{7}{10} = 0,7$$

$$\sqrt[4]{0,0625} = \sqrt[4]{\frac{625}{10000}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Essa propriedade será apresentada com mais detalhes na próxima seção de conceitos e conteúdos.

POTÊNCIAS DE EXPOENTE FRACIONÁRIO

Uma potência com expoente fracionário é a que possui uma fração como expoente e um número real como base. A potência com base b e expoente $\frac{n}{d}$ é fracionária, pois seu expoente é uma fração.

De forma geral, podemos representar a potencia fracionária $b^{\frac{n}{d}}$ onde o expoente é um número racional, de numerador n e denominador d ($\mathbf{d} \neq 0$).

Para transformar uma potência com expoente fracionário em raiz, seguimos os passos:

- A base da potência se transforma na base do radicando (o número na raiz);
- O numerador da fração se transforma no expoente do radicando;
- O denominador se transforma no índice da raiz.

Exemplos de potências fracionárias transformadas em raízes:

A) $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{100^1} = 10$

B) $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64^1} = 4$

C) $9^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{9^2} \to \sqrt[4]{81} = 3$

Podemos verificar que essas expressões são equivalentes utilizando uma propriedade da potenciação de uma potência elevada a outra. Quando temos uma potência elevada a outra devemos conservar a base e multiplicar os expoentes. Observe como aplicamos isso em cada item anterior.

A) $100^{\frac{1}{2}} = \left(10^2\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}} = 10^1$, por sua vez $\sqrt{100} = 10$

B) $64^{\frac{1}{3}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{3}} = 4^{\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}} = 4^1$, por sua vez $\sqrt[3]{64} = 4$

C) $9^{\frac{2}{4}} = \left(3^2\right)^{\frac{2}{4}} = 3^{2\cdot\frac{2}{4}} = 3^{\frac{4}{4}} = 3^1$, por sua vez $\sqrt[4]{9^2} = \sqrt[4]{81} = 3$

Vamos resolver um problema.

Geraldo construiu um canteiro retangular cujas medidas do comprimento do lados são $\sqrt{3^7}$ m e $\sqrt[4]{9}$ m. Qual é a medida da área desse canteiro? Calculamos a área do retângulo efetuando a multiplicação das medidas de seus lados.

$$\sqrt{3^7}\cdot\sqrt[4]{9} \to 3^{\frac{7}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{4}} \to 3^{\frac{7}{2}}\cdot(3^2)^{\frac{1}{4}} \to 3^{\frac{7}{2}}\cdot 3^{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}} \to 3^{\frac{7}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \to 3^{\frac{7}{2}+\frac{1}{2}} \to 3^{\frac{8}{2}} \to 3^4 = 81$$

Portanto, a área do canteiro é de 81 m².

Exercícios Resolvidos

1) Qual é a medida do lado do quadrado azul ao lado?

Resposta:

Como a área do quadrado é dada pela medida do seu lado elevado ao quadrado, $A = l^2$ temos que encontrar a medida do *lado* desse quadrado, ou seja, sua *raiz quadrada.*

$$\begin{aligned} A &= l^2 \\ 25 &= l^2 \\ 5^2 &= l^2 \\ l &= 5 \end{aligned}$$

Logo, a medida do lado do quadrado é 5.

2) Calcule o valor das potências.

A) $8^{\frac{1}{3}}$ B) $9^{\frac{1}{2}}$ C) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

Respostas:

A) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1} = 2$

B) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9^1} = 3$

C) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$

3) João está estudando as propriedades das raízes e potências com expoente fracionário. Ele encontrou a seguinte expressão e quer simplificar: $\sqrt[3]{16} \cdot 16^{\frac{1}{3}}$.

Ele sabe que $\sqrt[3]{16}$ pode ser reescrito como $16^{\frac{1}{3}}$ e deseja aplicar as propriedades das potências para simplificar a expressão. Ajude João a simplificar a expressão e encontrar o valor final.

Resposta:

Reescreva as raízes e potências com expoente fracionário: $\sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}}$

Logo, a expressão se torna: $16^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{2}{3}}$

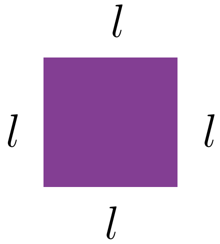
Utilize a propriedade das potências que diz que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$16^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{2}{3}} = 16^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$$

Como $16^1 = 16$, o valor final da expressão é 16.

Logo, João descobriu que o valor simplificado da expressão é 16.

4) O Convento da Penha, localizado em Vila Velha, é um dos pontos turísticos mais famosos do Espírito Santo. Ele fica situado em uma colina a 154 metros acima do nível do mar, sendo um local muito visitado por turistas e fiéis. Um dos pilares quadrados do Convento da Penha tem uma base com área total de 64 m². Determine o comprimento l do lado da base do pilar.



RESOLUÇÃO

Sabendo que a área de um quadrado é dada pela fórmula $A = l^2$, onde l é a medida do lado desse quadrado.

Sabemos que a área da base é 64 m². Logo, podemos escrever

$$64 = l^2$$

Para encontrar l, precisamos calcular a raiz quadrada de 64.

$$l = \sqrt{64} = 64^{\frac{1}{2}}$$

Para facilitar o cálculo, fazemos a fatoração de 64

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

Substituindo 64 por 2^6, temos

$$l = 64^{\frac{1}{2}}$$

$$l = (2^6)^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando a propriedade $(a^m)^n = a^{m \times n}$, temos

$$l = (2^6)^{\frac{1}{2}}$$

$$l = 2^{6 \times \frac{1}{2}}$$

$$l = 2^{\frac{6}{2}}$$

$$l = 2^3$$

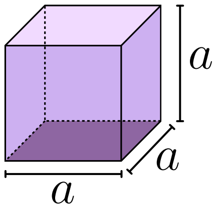
$$l = 8$$

Então, a medida do comprimento l do lado da base é 8 metros.

5) Durante uma aula sobre cultura africana, os alunos discutiram os tambores usados em celebrações e como suas dimensões influenciam o som. O professor trouxe um tambor com um volume aproximado de 729 cm³ e pediu aos alunos que determinassem o valor da aresta "a" de um cubo que tivesse o mesmo volume que o tambor. Qual o valor de a encontrado pelos alunos?

RESOLUÇÃO

O volume de um cubo é dado pela fórmula $\boxed{V = a^3}$, onde a é o comprimento da aresta.



Sabemos que o volume do tambor é 729 cm³, então:

$$a^3 = 729$$

Para encontrar o comprimento da aresta a, precisamos calcular a raiz cúbica de 729.

$$a = \sqrt[3]{729}$$

Fatorando 729, temos que $729 = 9 \times 9 \times 9 = 9^3$. Portanto

$$a = \sqrt[3]{9^3}$$

$$a = 9^{\frac{3}{3}}$$

$$a = 9^1$$

$$a = 9$$

Logo, o comprimento da aresta do cubo é 9 cm.

Atividades

ATIVIDADE 1

Determine o valor de $\sqrt{529}$, por meio do Método de regressão da Júlia.

O método da Júlia:

$\sqrt{144} = ?$

$10 \times 10 = 100$

$100 + 10 + 11 = 121$

$121 + 11 + 12 = 144$

$\sqrt{144} = 12 \ (12 \times 12 = 144)$

ATIVIDADE 2

Determine o valor das raízes a seguir.

$a)\ \sqrt{81} =$

$b)\ \sqrt[3]{27} =$

$c)\ \sqrt[3]{64} =$

$d)\ \sqrt{144} =$

$e)\ \sqrt{121} =$

$f)\ \sqrt[4]{16} =$

$g)\ \sqrt[3]{125} =$

$h)\ \sqrt{196} =$

$i)\ \sqrt[4]{81} =$

$j)\ \sqrt{225} =$

ATIVIDADE 3

Determine o valor aproximado das raízes quadradas a seguir, com uma casa decimal, como no exemplo.

$\sqrt{10} \approx$

O símbolo significa aproximadamente

Considerando que

$3^2 = 9$

$4^2 = 16$

O número procurado está entre 3 e 4.

O número procurado está mais próximo do 3. Com algumas tentativas:

$3,1^2 = 9,61$

$3,2^2 = 10,24$

O quadrado de 3,2 é mais próximo que o quadrado de 3,1. Assim, concluímos:

$\sqrt{10} \approx 3,2$

$a)\ \sqrt{2} \approx$

$b)\ \sqrt{3} \approx$

$c)\ \sqrt{5} \approx$

$d)\ \sqrt{6} \approx$

$e)\ \sqrt{8} \approx$

$f)\ \sqrt{10} \approx$

ATIVIDADE 4

Calcule o valor aproximado das sentenças matemáticas seguir, com uma casa decimal.

$a) \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx$

$b) 10 - \sqrt{2} \approx$

$c)\ 2\sqrt{5} \approx$

ATIVIDADE 5

Determine o valor das raízes a seguir.

$\mathrm{a)} \sqrt{0,25} =$

$\mathrm{b)} \sqrt{1,44} =$

$\mathrm{c)} \sqrt[3]{0,008} =$

$\mathrm{d)} \sqrt{0,04} =$

$\mathrm{e)} \sqrt{0,0009} =$

$\mathrm{f)} \sqrt[3]{0,125} =$

ATIVIDADE 6

Escreva as potências a seguir na forma de radical.

A) $6^{\frac{3}{4}}$

C) $4^{\frac{3}{2}}$

B) $1,5^{\frac{1}{4}}$

D) $2^{\frac{2}{5}}$

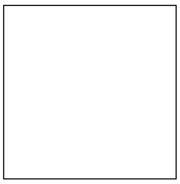
ATIVIDADE 7

Geraldo construiu um canteiro quadrado cuja área mede $\sqrt{3^8}$ metros quadrados. Determine o valor dessa raiz quadrada usando a relação entre raiz e potência de expoente fracionário.

ATIVIDADE 8

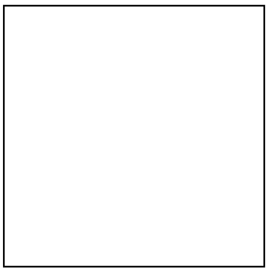
Determine a medida de área de cada região plana quadrada utilizando as medidas de comprimento dos lados **na forma de potência**.

A)



$\sqrt[6]{64}$ cm

B)

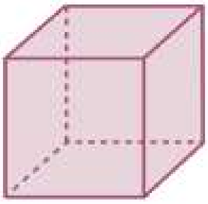


$\sqrt[4]{100}$ cm

ATIVIDADE 9

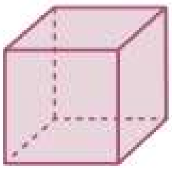
Calcule a medida de volume de cada cubo utilizando as medidas de comprimento das arestas deles **na forma de potência**.

A)

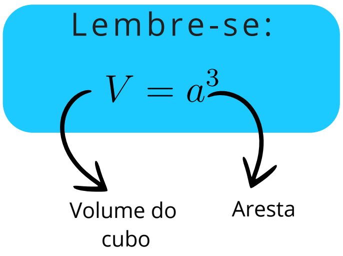


$\sqrt[3]{100}$ cm

B)



$\sqrt[6]{6\ 561}$ cm



Lembre-se:

$V = a^3$

Volume do cubo

Aresta

ATIVIDADE 10

Uma cidade está renovando uma praça central que homenageia diferentes culturas afro-brasileiras. Durante a construção, foi necessário calcular o espaço em que cada pavilhão de cultura ficará, e a área de cada pavilhão segue um modelo quadrado. O arquiteto projetou que a área de cada pavilhão será de 81 metros quadrados. O desafio da equipe de construção é calcular o comprimento de um lado de cada pavilhão, para saber a quantidade exata de material necessário. Qual o comprimento de um lado de cada pavilhão?

ATIVIDADE 11

$$\sqrt[3]{2^2}$$

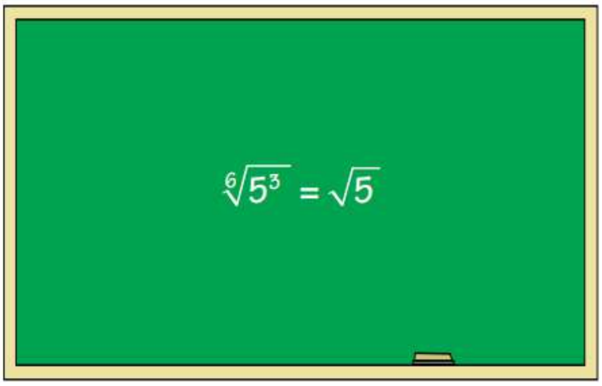
$$\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{10}$$

$$\sqrt[4]{5^3}$$

ATIVIDADE 12

Veja o que o professor escreveu na lousa:



$$\sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$$

Justifique essa afirmação do professor.

PROPRIEDADES DO RADICAL

1ª propriedade

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

com $\underbrace{a \in \mathbb{R}_+}_{a\text{ é um número real positivo}}$, $\underbrace{n \in \mathbb{N}}_{n\text{ é um número natural}}$, $\underbrace{n > 1}_{n\text{ é maior que 1.}}$.

Exemplos:

$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ $\qquad$ $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$ $\qquad$ $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

2ª propriedade

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$$

com $\underbrace{a \in \mathbb{R}_+}_{a\text{ é um número real positivo}}$, $\underbrace{n, m, p \in \mathbb{N}}_{n,\ m,\ p\text{ são números naturais}}$, $\underbrace{n > 1}_{n\text{ é maior que 1.}}$, $\underbrace{p \neq 0}_{p\text{ é diferente de zero}}$ e p divisor comum de m e n.

Exemplos:

$\sqrt[15]{2^6} = \sqrt[15:3]{2^{6:3}} = \sqrt[5]{2^2}$

$\sqrt[10]{3^5} = \sqrt[10:5]{3^{5:5}} = \sqrt[2]{3^1} = \sqrt{3}$

3ª propriedade

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

com $\underbrace{a \in \mathbb{R}_+}_{a\text{ é um número real positivo}}$, $\underbrace{n, m \in \mathbb{N}}_{n\text{ e }m\text{ são números naturais}}$, $\underbrace{m > 1}_{m\text{ é maior que 1}}$ e $\underbrace{n > 1}_{n\text{ é maior que 1.}}$.

Exemplos:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[5\cdot 3]{7} = \sqrt[15]{7}$$

4ª propriedade

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

com $\underbrace{a \in \mathbb{R}_+}_{a \text{ é um número real positivo}}, \underbrace{b \in \mathbb{R}_+}_{b \text{ é um número real positivo}}, \underbrace{n \in \mathbb{N}}_{n \text{ é um número natural}}$ e $\underbrace{n > 1}_{n \text{ é maior que 1.}}.$

Exemplos:

$$\sqrt[2]{196} = \underbrace{\sqrt[2]{4 \cdot 49} = \sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{49}}_{\text{Aplicação da propriedade}} = 2 \cdot 7 = 14$$

$$\sqrt[2]{75} = \overbrace{\sqrt[2]{25 \cdot 3} = \sqrt[2]{25} \cdot \sqrt[2]{3}} = 5 \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

5ª propriedade

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

com $\underbrace{a \in \mathbb{R}_+}_{a \text{ é um número real positivo}}, \underbrace{b \in \mathbb{R}_+}_{b \text{ é um número real positivo}}, \underbrace{n \in \mathbb{N}}_{n \text{ é um número natural}}$ e $\underbrace{n > 1}_{n \text{ é maior que 1.}}.$

Exemplos:

$$\sqrt[2]{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt[2]{25}}{\sqrt[2]{9}} = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt[3]{0,343} = \sqrt[3]{\frac{343}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{7}{10}$$

Atividades

ATIVIDADE 1

Utilize as propriedades dos radicais para simplificar as sentenças em cada item.

$a)\ \sqrt[5]{3^5} =$

$b)\ \sqrt{16 \cdot 9} =$

$c)\ \sqrt[3]{\sqrt{5}} =$

$d)\ \sqrt[3]{(-6)^3} =$

$e)\ \sqrt[3]{8 \cdot 27} =$

$f)\ \sqrt{\sqrt[4]{2}} =$

$g)\ \sqrt[10]{5^2} =$

$h)\ \sqrt{\dfrac{36}{25}} =$

$i)\ \sqrt{18} =$

$j)\ \sqrt[12]{10^8} =$

$k)\ \sqrt[3]{\dfrac{64}{1000}} =$

$l)\ \sqrt{50} =$

$m)\ \sqrt[6]{49} =$

$n)\ \sqrt{2 \cdot 32} =$

$o)\ \sqrt[3]{54} =$

ATIVIDADE 2

Analise as sentenças abaixo sobre as propriedades dos radicais e classifique-as como Verdadeiras (V) ou Falsas (F).

( ) A raiz quadrada de uma soma é igual à soma das raízes quadradas. Exemplo: $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$.

( ) Podemos simplificar um radical dividindo o índice e o expoente do radicando pelo mesmo número, desde que seja um divisor comum. Exemplo: $\sqrt[10]{3^5} = \sqrt{3}$.

( ) O índice de um radical pode ser igual a 1 ou 0.

( ) A raiz de uma raiz pode ser calculada multiplicando-se os índices. Exemplo: $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$.

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo desse capítulo. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?

Reflita sobre sua aprendizagem

- Consigo reconhecer as diferentes formas de representar um número racional, como fração, decimal e porcentagem?
- Sou capaz de localizar e representar números racionais na reta numérica, identificando sua posição em relação aos inteiros e aos irracionais?
- Consigo efetuar corretamente a adição de números racionais, interpretando o resultado em diferentes contextos?
- Sou capaz de efetuar a subtração de números racionais, inclusive quando envolvem sinais diferentes?
- Consigo realizar multiplicações com números racionais, reconhecendo e aplicando as propriedades envolvidas?
- Sou capaz de efetuar divisões de números racionais, compreendendo o significado do resultado obtido?
- Consigo calcular potências com base racional e expoente inteiro, aplicando corretamente as propriedades da potenciação?
- Sou capaz de reconhecer e aplicar as propriedades da potenciação em diferentes situações?
- Consigo efetuar a radiciação de números racionais, compreendendo o significado do radical e da raiz?
- Sou capaz de aplicar as propriedades da radiciação para simplificar e resolver expressões numéricas?
- Consigo efetuar potenciações com base racional e expoente fracionário ou decimal, interpretando seu resultado?
- Sou capaz de resolver problemas que envolvem adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou radiciação com números racionais?
- Consigo elaborar meus próprios problemas envolvendo números racionais e suas operações, aplicando o que aprendi de forma criativa?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Reconhecer as diferentes representações de um número racional.	○	○	○
Representar números racionais na reta numérica.	○	○	○
Efetuar adição de números racionais.	○	○	○
Efetuar subtração de números racionais;	○	○	○
Efetuar multiplicação de números racionais;	○	○	○
Efetuar divisão de números racionais;	○	○	○
Efetuar potenciação de base racional e expoente inteiro.	○	○	○
Conhecer e aplicar propriedades da potenciação.	○	○	○
Efetuar radiciação de número racional	○	○	○
Conhecer e aplicar propriedades da radiciação.	○	○	○
Efetuar potenciação de base racional e expoente fracionário ou decimal.	○	○	○
Resolver problemas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou radiciação envolvendo números racionais.	○	○	○
Elaborar problemas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou radiciação envolvendo números racionais.	○	○	○

Dica: Revise os tópicos que você marcou como “**preciso revisar**” e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências

A música na história da matemática. Disciplinas da USP. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4475160/mod_resource/content/1/matematica_musica.pdf. Acesso em: 22 out. 2025.

Andrini, Álvaro Praticando matemática 7 / Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos. – 4. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2015. – (Coleção praticando matemática; v. 7)

BIANCHINI, Edwaldo. Matemática Bianchini: Matemática. 8. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2015.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é matemática, 7º ano - 3ª ed. São Paulo: Ática, 2009. Plataforma Compartilha , Grupo Santilhana

Dante, Luiz Roberto. Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 7ºano - 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022.

DANTE, L. R. Teláris Essencial: Matemática 9o ano (ALUNO). SÃO PAULO, SP: Editora Ática S.A, 2022.

EDITORA MODERNA. **Araribá conecta matemática:** 7º ano. São Paulo, 2024.

GIOVANNI JUNIOR, José Ruy, CASTRUCCI, Benedicto. A Conquista da Matemática, 8°Ano. Ed. Renovada- São Paulo:FTD, 2009.

Giovanni Júnior, José Ruy. A conquista matemática: 7º ano : ensino fundamental : anos finais – 1. ed. – São Paulo : FTD, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. A Conquista Matemática 9º Ensino Fundamental – Anos Finais. São Paulo, SP: Editora FTD, 2022.

Iezzi, Gelson. Matemática e realidade 7º ano - 9. ed. -- São Paulo : Atual Editora, 2018.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. Matemática e Realidade. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2022.

IMPA. Portal da OBMEP: Matemática. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/. Acesso em: 22 out. 2025.

Números racionais na reta numérica. Secretaria Municipal de Educação de Goiânia. Disponível em: https://sme.goiania.go.gov.br/conexaoescola/ensino_fundamental/matematica-numeros-racionais-na-reta-numerica/. Acesso em: 22 out. 2025.

ORIENTAÇÕES CURRICULARES. Currículo ES, 2024. Disponível em: Orientações curriculares. Currículo ES, 2024. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares/. Acesso em: 22 out. 2025.

REGINA GARCIA GAY, Mara. Araribá Plus Matemática 7 . 4.ed. São Paulo : Editora Moderna 2014

RUY GIOVANI JUNIOR , José. A conquista da Matemática. 1.ed. São Paulo : Editora FTD 2022

TEIXEIRA, Lilian Aparecida. SuperAÇÃO!: Matemática. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2022.

TEIXEIRA, L. A. SuperAÇÃO! Matemática 8º ano: Manual do Professor. Moderna, 2022.

TEIXEIRA, L. A. SuperAÇÃO! Matemática 9º ano: Manual do Professor. Moderna, 2022.

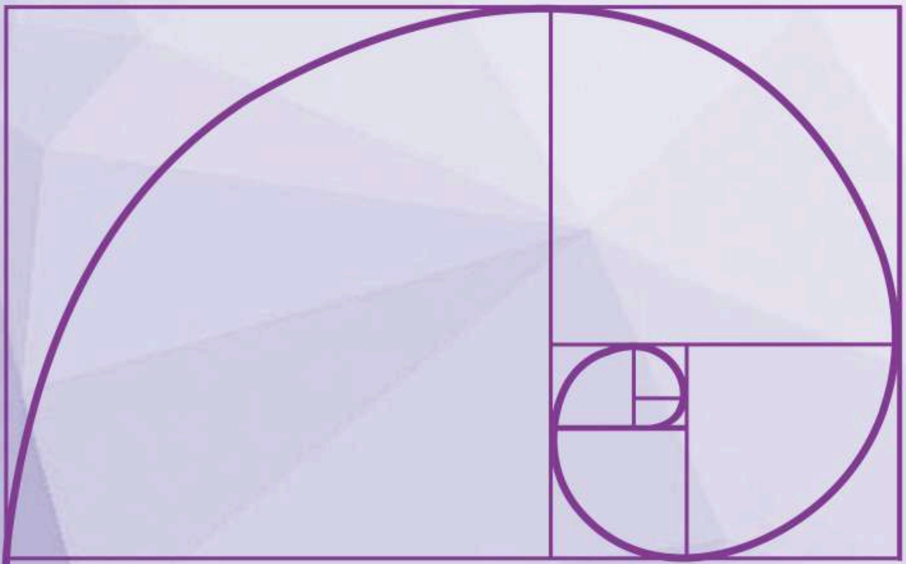
Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

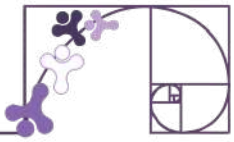
SEDU 2026

Gerência de Currículo
da Educação Básica



Capítulo 2: Razão e proporção; Porcentagem

Apresentação



Prezado(a) estudante,

Você já percebeu como a Matemática está presente em situações simples do dia a dia, como calcular descontos em uma compra, dividir uma receita ou medir a velocidade de um carro? Todas essas situações envolvem razões entre grandezas diferentes e relações de proporcionalidade. A porcentagem, por exemplo, é uma forma prática de expressar uma razão com base em 100, muito usada em contextos financeiros, estatísticos e até científicos. Já as proporcionalidades direta e inversa nos ajudam a compreender como duas grandezas se relacionam — quando uma aumenta e a outra também, ou quando uma cresce enquanto a outra diminui.

O que você vai estudar neste capítulo

Neste capítulo, você vai aprender a identificar, comparar e resolver problemas que envolvem essas relações, percebendo como elas explicam grande parte das situações numéricas do cotidiano.

Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- Resolver problemas que envolvam porcentagens, incluindo os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, aplicação de percentuais sucessivos e determinação das taxas percentuais.
- Elaborar problemas que envolvam porcentagens, incluindo os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, aplicação de percentuais sucessivos e determinação das taxas percentuais.
- Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes.
- Resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta entre duas ou mais grandezas.
- Elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta entre duas ou mais grandezas.

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

RETOMANDO O CONCEITO DE PORCENTAGEM

O uso de porcentagem está presente em diversas situações do dia a dia, como em operações financeiras, compras, análises de gráficos e informações veiculadas na mídia, entre outros contextos.
A seguir, veja um caso prático que ilustra a aplicação de porcentagens e alguns modos de resolução:

O preço de um produto que custava 50 reais recebeu um desconto de 15 reais em uma promoção. Qual foi a taxa percentual de desconto aplicada?

1º modo: por meio da fração.

$$\frac{15}{50} = \frac{30}{100} = 30\%$$

2º modo: por meio do valor decimal

$$\frac{15}{50} = 0,3 = \frac{0,3 \cdot 100}{100} = \frac{30}{100} = 30\%$$

3º modo: por meio da regra de três.

$$\begin{array}{rcl} 50\,\text{reais} & & 100\% \\ 15\,\text{reais} & \times & x\% \end{array}$$

$$50x = 1500$$

$$x = \frac{1500}{50} = 30\%$$

Portanto, a taxa percentual de desconto aplicada foi de 30%.

FATOR MULTIPLICATIVO

Calcular o percentual de um valor é uma operação matemática simples e muito útil no dia a dia, especialmente em situações como descontos, acréscimos, cálculos de juros ou divisão de proporções.

Podemos calcular o percentual de um valor realizando **o produto** entre a forma fracionária (ou decimal) dessa porcentagem e esse valor. Veja um exemplo abaixo.

Calcular 15% de 300.

$$15\% \text{ de } 300.$$

$$\frac{15}{100} \cdot 300 = 45$$

Vamos detalhar cada passo dado. Primeiramente, sabemos que porcentagem significa "por cem". Portanto, 15% pode ser escrito na forma de fração. Depois, multiplicamos a fração por 300. Portanto, 15% de 300 é igual a 45.

FATOR MULTIPLICATIVO NO AUMENTO

No caso de aumentos, o fator multiplicativo é calculado somando a taxa de aumento a 100% e convertendo o resultado para a forma decimal. Por exemplo, se uma loja oferece um aumento de 15% em um produto, o fator multiplicativo seria 1,15 (100% + 15% = 115%, ou 1,15 em decimal). Isso significa que o preço final do produto pode ser obtido multiplicando o valor original por 1,15. Para ilustrar, veja o exemplo abaixo.

Uma comerciante aumentou em 8% o preço de suas mercadorias. No mês seguinte, os preços foram reajustados em 10%. Depois do primeiro aumento, qual passou a ser o preço de uma mercadoria que custava R$ 500,00? E depois do segundo aumento, quanto passou a custar essa mercadoria?

Como o primeiro aumento foi de 8%, temos:

$$500 + \frac{8}{100} \cdot 500 = 500 + 0,08 \cdot 500 = 1,08 \cdot 500 \Rightarrow 1,08 \cdot 500 = 540$$

Podemos dizer que o fator relativo a um aumento de 8% foi 1,08 (1 + 0,08). Portanto, depois do primeiro aumento, o preço passou a ser R$ 540,00.

Aplicando o segundo aumento (10%), temos:

$$540 + \frac{10}{100} \cdot 540 = 540 + 0,1 \cdot 540 = 1,1 \cdot 540 \Rightarrow 1,1 \cdot 540 = 594$$

O fator relativo a um aumento de 10% foi 1,1 (1 + 0,1). Portanto, depois do segundo aumento, o preço da mercadoria passou a ser R$ 594,00.

FATOR MULTIPLICATIVO NO DESCONTO

No caso de descontos, o fator multiplicativo é calculado subtraindo a taxa de desconto de 100% e convertendo o resultado para a forma decimal. Por exemplo, se uma loja oferece um desconto de 15% em um produto, o fator multiplicativo seria 0,85 (100% - 15% = 85%, ou 0,85 em decimal). Isso significa que o preço final do produto pode ser obtido multiplicando o valor original por 0,85. Para ilustrar, veja o exemplo abaixo.

Uma loja de eletrônicos está realizando uma promoção especial com dois descontos consecutivos. O primeiro desconto é de 20% em todos os produtos, e o segundo desconto é de 10% adicional caso o cliente opte por pagar via PIX. Se um smartphone custa R$ 1 500,00, qual será o preço final desse smartphone após a aplicação dos dois descontos?

Como o primeiro desconto foi de 20%, temos:

$$1500 - \frac{20}{100} \cdot 1500 = 1500 - 0,2 \cdot 1500 = 0,8 \cdot 1500 \Rightarrow 0,8 \cdot 1500 = 1200$$

Podemos dizer que o fator relativo a um desconto de 20% foi 0,8 (1 - 0,2). Portanto, depois do primeiro desconto, o preço passou a ser R$ 1200,00.

Aplicando o segundo desconto (10%), temos:

$$1200 - \frac{10}{100} \cdot 1200 = 1200 - 0,1 \cdot 1200 = 0,9 \cdot 1200 \Rightarrow 0,9 \cdot 1200 = 1080$$

O fator relativo a um desconto de 10% foi 0,9 (1 - 0,1). Portanto, depois do segundo desconto, o preço da mercadoria passou a ser R$ 1080,00.

Exercicios Resolvidos

1) O aluguel de um imóvel residencial é R$ 1 240,00 ao mês. Para pagamento em atraso, após 1 mês, esse valor sofre um acréscimo de 8%. Qual é o valor desse aluguel ao ser pago com 1 mês de atraso?

RESOLUÇÃO

O acréscimo é de 8%. Para calcular o valor do acréscimo, usamos o fator multiplicativo: fator multiplicativo = 100% + 8% = 108% = 1,08.
Agora, multiplicamos o valor original do aluguel pelo fator multiplicativo:
1240 · 1,08 = 1 339,20
Portanto, o valor do aluguel com 1 mês de atraso é R$ 1 339,20.

2) Uma bicicleta na Loja "Pedalar" custa R$500,00. No mês de novembro ela recebeu um desconto de 10% e após o sucesso das vendas ela recebeu mais um desconto de 5%. Qual será o preço da bicicleta após os dois descontos sucessivos?

RESOLUÇÃO

Para calcular o preço da bicicleta após os dois descontos sucessivos de 10% e 5%, seguimos os seguintes passos:

Cálculo do Primeiro Desconto (10%)
1. Valor do desconto de 10%: Desconto 10% = 500 × 0,10 = 50
2. Preço após o primeiro desconto: Preço após 10% = 500 - 50 = 450

Cálculo do Segundo Desconto (5%)
3. Valor do desconto de 5% sobre o novo preço: Desconto 5% = 450 × 0,05 = 22,50
4. Preço após o segundo desconto: Preço fina l = 450 − 22,50 = 427,50

Portanto, o preço da bicicleta após os dois descontos sucessivos será R$ 427,50.

3) Uma loja está oferecendo um desconto de 14% na compra de certo modelo de notebook que custa R$ 2 850,00. Caso o pagamento seja à vista, a loja ainda concede um desconto de 5%, que é calculado após o desconto de 14%. Qual será o preço desse notebook se um cliente pagar à vista?

RESOLUÇÃO

O primeiro desconto é de 14%. Para calcular o valor após esse desconto, usamos o fator multiplicativo: fator multiplicativo = 100% − 14% = 86% = 0,86.
Agora, multiplicamos o preço original pelo fator multiplicativo: 2 850 · 0,86 = 2 451
O segundo desconto é de 5% e é aplicado sobre o valor já descontado (R$ 2 451,00).
Usamos o fator multiplicativo: fator multiplicativo = 100% − 5% = 95% = 0,95
Agora, multiplicamos o valor após o primeiro desconto pelo fator multiplicativo:
2451 · 0,95 = 2 328,45
O preço do notebook, após os descontos de 14% e 5%, será R$ 2 328,45.

4) O salário de Clóvis era R$ 1 800,00 e, após um reajuste, ele passou a receber R$ 2 070,00. De quanto foi o aumento percentual?

RESOLUÇÃO

O aumento é a diferença entre o valor final e o valor inicial.
Aumento = 2070 - 1800 = 270
Uma forma de encontrar o percentual de aumento é dividir o valor do desconto pelo preço original: $\frac{270}{1800} = 0,15$.
0,15 é a representação decimal de 15% (basta multiplicar por 100).
O aumento percentual aplicado sobre o salário é de 15%.

Material Extra

VÍDEO

Resolução de exercícios sobre porcentagem
https://rpm.org.br/cdrpm/57/2.htm

Atividades

ATIVIDADE 1

Em uma loja de alimentos naturais, o preço de um pacote de granola de 500g passou de R$ 12,40 para R$ 14,00. Qual foi a aproximadamente a porcentagem de aumento no preço desse produto?

A) 9,50%
B) 11,20%
C) 12,00%
D) 12,90%

ATIVIDADE 2

Uma instituição federal de ensino técnico oferece 240 vagas em um curso. Conforme a Lei 12.711, 50% das vagas devem ser reservadas para estudantes que cursaram integralmente o ensino fundamental em escolas públicas. Dentre essas vagas reservadas, metade é destinada a candidatos de famílias com renda per capita de até 1 salário mínimo. Além disso, as vagas reservadas são distribuídas proporcionalmente entre pretos, pardos, indígenas e pessoas com deficiência, com base nos dados do censo. Se, em uma determinada região, 40% dos candidatos das vagas reservadas pertencem ao grupo de pretos, pardos e indígenas, quantas vagas, no total, serão destinadas a esses candidatos?

ATIVIDADE 3

Carla comprou um automóvel novo, em 2021, pelo valor de R$ 45 000,00. Um ano depois, ela avaliou o veículo e constatou que houve uma desvalorização de 8% em relação ao valor pelo qual o automóvel foi comprado. Após completar o segundo ano de uso, Carla realizou uma nova avaliação, que indicou uma desvalorização de 10% em relação ao valor do automóvel no ano anterior.

Qual foi o valor do automóvel de Carla na segunda avaliação?

ATIVIDADE 4

Clara recebeu um reajuste salarial de 15% e, com isso, seu novo salário passou a ser R$ 2 875,00. Antes desse aumento, o valor do salário de Carla, em reais, era:

A) R$ 2 140,00
B) R$ 2 153,85
C) R$ 2.443,00
D) R$ 2 500,00

ATIVIDADE 5

Joana viu um produto em liquidação que estava com 20% de desconto em relação ao valor normal. Como estava pagando à vista, ela ainda obteve um desconto adicional de 5% sobre o valor promocional. Qual foi o total de desconto que Joana obteve, em relação ao preço original do produto?

ATIVIDADE 6

Um produto custava R$ 200,00. Após um primeiro aumento de 10%, o preço do produto foi reajustado novamente em 15% sobre o novo valor. Qual é o preço final do produto após os dois aumentos?

ATIVIDADE 7

Uma família tem os seguintes gastos mensais:

- R$ 250,00 com energia elétrica;
- R$ 170,00 com água;
- R$ 1 200,00 com alimentação.

Após adotar práticas de economia, a família conseguiu reduzir:

- 12% na conta de energia elétrica;
- 8% na conta de água;
- 5% nos gastos com alimentação.

Qual foi o total economizado em um mês? E qual será a economia acumulada em um ano, supondo que a redução mensal permaneça constante?

A) R$ 103,60 por mês; R$ 1 243,20 por ano
B) R$ 103,60 por mês; R$ 1 540,80 por ano
C) R$ 132,40 por mês; R$ 1 243,20 por ano
D) R$ 142,00 por mês; R$ 1 704,00 por ano

ATIVIDADE 8

Neila foi à loja Narciso Magazine comprar um notebook cujo valor era de R$ 5 000,00.

Neila pagaria via PIX, porém, como a loja não dava desconto, decidiu pagar sem parcelamento pelo cartão de crédito. Ela preferiu usar o cartão de crédito do banco do seu Estado que lhe dá pontos que podem ser trocados por descontos em IPTU, IPVA e conta de água, o que significava naquele momento receber aproximadamente 0,5% de tudo o que gastasse.

Além desse receber esse retorno em pontos pelo uso do cartão, Neila deixou o dinheiro na conta poupança por um mês até que a fatura de seu cartão vencesse, o que lhe rendeu outros 0,6% de juros.

Qual valor Neila ganhou, somando o valor equivalente recebido com os pontos do cartão e o valor da remuneração da conta poupança?

ATIVIDADE 9

Um trabalhador autônomo recebeu R$ 5 000,00 por seus serviços.

Ele pagará os seguintes tributos:

- **ISS (Imposto Sobre Serviços)**: 5%, conforme a legislação do município onde o serviço foi prestado.
- **INSS (Contribuição Previdenciária)**: 20% sobre a remuneração recebida.
- **IRRF (Imposto de Renda Retido na Fonte)**: Alíquota de 15%, com dedução de R$ 354,80.

Qual será o valor líquido que o trabalhador receberá após o desconto de todos os tributos?

Dica: Para calcular o IRRF, aplique a alíquota de 15% sobre o valor recebido e, em seguida, subtraia a dedução de R$ 354,80.

A) R$ 3.000,00
B) R$ 3.804,80
C) R$ 3.354,80
D) R$ 3.250,80

ATIVIDADE 10

Agora teste seus conhecimentos!

Elabore um problema que envolva porcentagem, no qual seja necessário descobrir qual é a taxa percentual de um aumento ou desconto aplicado em uma situação do dia a dia.

Pense em um contexto prático e claro, envolvendo valores iniciais e finais, e formule uma pergunta que desafie o leitor a calcular a taxa percentual dessa mudança.

Depois de criar o seu problema, compartilhe-o com um(a) colega de sala e peça que ele(a) resolva. Assim, vocês poderão aprender juntos!

RAZÃO E PROPORÇÃO

RAZÃO

Em um treino de vôlei, a cada 10 saques, Carla acertou 9. Podemos usar uma fração para comparar o número de saques que deram certo com o total de saques.

$$\frac{\mathit{quantidade\ de\ saques\ certos}}{\mathit{total\ de\ saques}} = \frac{9}{10}$$


Design: Getty Images Signature/ Fonte: Canva

Nesse caso, o número obtido mostra o rendimento de Carla nos saques.

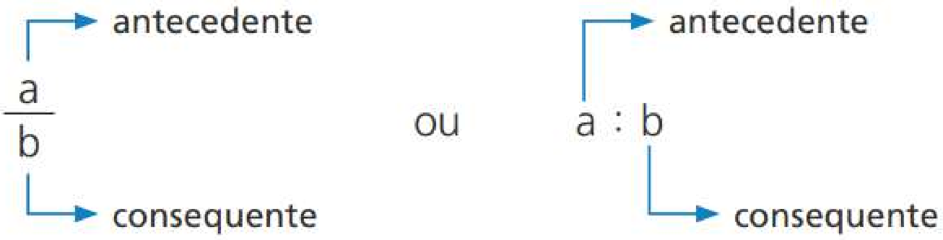
Nesta situação apresentada, comparamos dois números usando uma divisão. O quociente obtido é a **razão** entre esses dois números, tomados na ordem considerada.

Sendo a e b dois números inteiros, com b diferente de 0, denomina-se **razão entre a e b** ou **razão de a para b** o quociente $\mathbf{\frac{a}{b}}$ ou $\mathbf{a \div b}$.

A razão $\frac{a}{b}$ ou a : b pode ser lida de uma das seguintes maneiras:

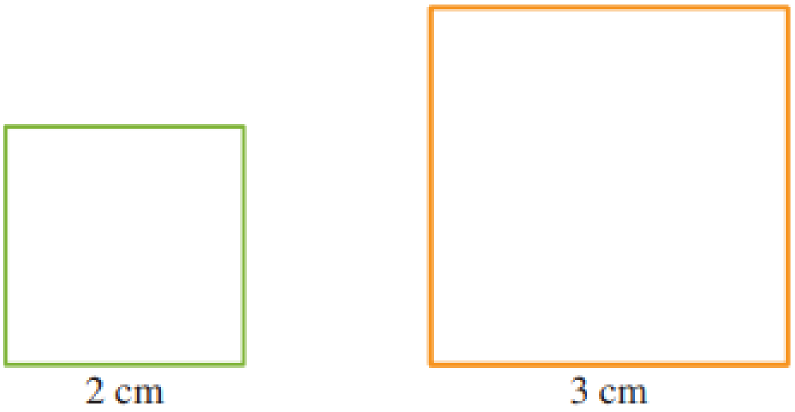
- razão de a para b
- a está para b
- a para b

Os termos de uma razão recebem nomes especiais: o primeiro número chama-se antecedente e o segundo número, consequente.



RAZÃO ENTRE GRANDEZAS DE MESMA NATUREZA

Observe os quadrados abaixo:



A razão entre a medida de um dos lados do quadrado menor e a medida de um dos lados do quadrado maior é $\frac{2}{3}$.

Note que aqui comparamos dois comprimentos que são grandezas de mesma natureza.

A razão entre duas grandezas de mesma natureza é o quociente dos números que expressam as medidas dessas grandezas em uma mesma unidade.

RAZÃO ENTRE GRANDEZAS DE NATUREZA DIFERENTES

Já sabemos como determinar a razão entre duas grandezas de mesma natureza. Nessas razões, usamos apenas os números que expressam as medidas dessas grandezas.

Agora, vamos conhecer algumas razões com grandezas de naturezas diferentes.

Design: Jacob Campbells Images/ Fonte: Canva

Um carro parte da cidade Aracruz para a cidade de Itapemirim. A distância entre elas é 180 km, e o carro leva 3 horas para fazer esse trajeto.

Vamos calcular a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para isso. Observe que essas grandezas são de **naturezas diferentes**. Então:

$\frac{180\ km}{3\ h}$ = 60 km/h.

A esse tipo de razão chamamos de **velocidade média**.

A cidade de Cachoeiro de Itapemirim, onde nasceu o cantor Roberto Carlos, tem área aproximada de 864 583 km² e 185 784 habitantes, de acordo com o último censo, em 2022.

Dividindo o número de habitantes pela área, vamos obter o número de habitantes por quilômetro quadrado (hab./km²):

$$\frac{864\ 583\ hab}{185\ 784\ km^2}$$

Isso é cerca de 4,65 hab./km².

Esse tipo de razão é chamada de **densidade demográfica**.

Design: Jookiko/ Fonte: Canva

Ana Luíza percorreu 42 km indo do município de Marataízes ao município de Iconha e gastou 3 litros de gasolina. Dividindo o números de quilômetros percorridos pelo número de litros de combustível consumido, temos o número de quilômetros que esse carro percorreu com 1 litro de combustível.

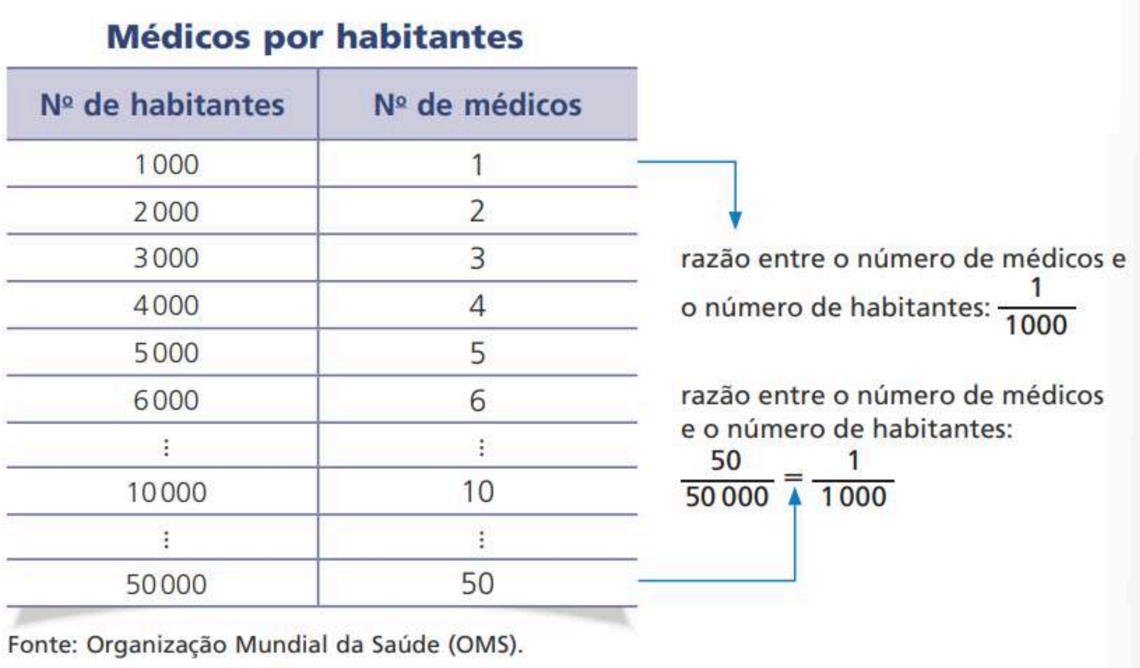
$\frac{42\ km}{3\ litros}$ = 14 km/L.

Esse tipo de razão chamamos de **consumo médio**.

PROPORÇÃO

A Organização Mundial da Saúde (OMS), órgão da ONU que trata dos temas ligados à saúde, recomenda 1 médico para cada grupo de 1 000 habitantes

Nessas condições, quantos médicos deveria ter uma cidade com 50 mil habitantes?



Médicos por habitantes

Nº de habitantes	Nº de médicos
1000	1
2000	2
3000	3
4000	4
5000	5
6000	6
⋮	⋮
10000	10
⋮	⋮
50000	50

Fonte: Organização Mundial da Saúde (OMS).

razão entre o número de médicos e o número de habitantes: $\frac{1}{1000}$

razão entre o número de médicos e o número de habitantes: $\frac{50}{50\,000} = \frac{1}{1\,000}$

De acordo com a OMS, a cidade deveria ter 50 médicos.

Observe que as razões $\frac{1}{1\ 000}$ e $\frac{50}{50\ 000}$ são iguais.

Uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas razões é chamada **proporção**.

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Então, a sentença $\frac{1}{1\ 000}$ e $\frac{50}{50\ 000}$ é uma porporção.

Note que essas razões são dadas por frações equivalentes

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES

Considere a proporção $\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$.

- Os extremos dessa proporção são 6 e 15, e seu produto é 90.
- Os meios são 5 e 18, e seu produto também é 90.

Perceba que, nessa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Em toda proporção, o produto dos extremos
é igual ao produto dos meios.

Essa é a **propriedade fundamental das proporções**.

Por meio dessa propriedade, também podemos reconhecer quando duas razões formam uma proporção.

Veja alguns exemplos.

$\frac{8}{10}$ e $\frac{24}{30}$ formam uma proporção, pois:

$$\underbrace{8 \cdot 30}_{240} = \underbrace{10 \cdot 24}_{240}$$

produto dos extremos produto dos meios

$\frac{2}{4}$ e $\frac{5}{3}$ não formam uma proporção, pois o produto dos extremos ($2 \cdot 3 = 6$) é diferente do produto dos meios ($4 \cdot 5 = 20$).

Na situação a seguir, observe como podemos encontrar o valor desconhecido de um termo em uma proporção usando a propriedade fundamental.

Fonte: https://descubraoespiritosanto.es.gov.br/cidades/divino-de-sao-lourenco

Em uma escola do município de Divino de São Lourenço, menor município do Estado do Espírito Santo, para cada 4 meninas há 5 meninos estudando. Se há 580 meninos matriculados, quantos alunos estudam nessa escola?

Se representarmos por x o número de meninas, podemos formar a proporção:

$$\frac{4}{5} = \frac{x}{580}$$

$5 \cdot x = 4 \cdot 580 \longrightarrow$ aplicando a propriedade fundamental das proporções.

$$5x = 2\,320$$

$$x = \frac{2\,320}{5}$$

$x = 464 \longrightarrow$ número de meninas que estudam nessa escola.

$464 + 580 = 1\,044 \longrightarrow$ total de alunos.

Nessa escola, estudam 1 044 alunos.

GRANDEZAS PROPORCIONAIS

Entendemos como **grandeza** tudo o que pode ser medido ou contado. Assim, o comprimento, a superfície, a temperatura, a massa e o tempo são exemplos de grandezas.

Veja a seguir algumas situações que envolvem uma relação de dependência entre duas grandezas.

- A torneira da cozinha de uma casa estava vazando.

Para medir o vazamento por minuto, Natan colocou um recipiente graduado sob a torneira. Veja o que ele observou.

Tempo (em minuto)	1	2	3	4	5
Volume de água (em mℓ)	5	10	15	20	25

Note que:

- quando duplicamos o número de minutos, o volume de água também duplica;

- quando triplicamos o número de minutos, o volume de água também triplica; e assim por diante

Nesse caso, dizemos que as grandezas **tempo** e **volume de água** estão em uma relação de **proporcionalidade direta**, ou seja, são **grandezas diretamente proporcionais**.

- Suponha que, em uma doceria, um funcionário faça certa quantidade de bolos em 6 horas. Com a proximidade das festas de fim de ano, o proprietário da doceria resolve produzir a mesma quantidade de bolos em um tempo menor. Para isso, aumenta a quantidade de funcionários, de igual produtividade e trabalhando nas mesmas condições, conforme a necessidade.

Veja a relação entre o número de funcionários e o tempo gasto para a produção desses bolos.

Número de funcionários	1	2	3	4
Tempo (em hora)	6	3	2	1,5

- Quando duplicamos o número de funcionários, o número de horas fica reduzido à metade.

- Quando triplicamos o número de funcionários, o número de horas fica reduzido à terça parte; e assim por diante.

Nesse caso, dizemos que as grandezas **número de funcionários** e **tempo** estão em uma relação de **proporcionalidade inversa**, ou seja, são **grandezas inversamente proporcionais**.

Assim, podemos concluir:

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre dois valores da primeira é igual à razão entre os valores correspondentes da segunda.

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando a razão entre dois valores da primeira é igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da segunda.

REGRA DE TRÊS SIMPLES

Os problemas que envolvem duas **grandezas direta** ou **inversamente proporcionais** podem ser resolvidos por meio de um processo prático chamado de **regra de três simples**. Para entender tal processo, considere as situações a seguir.

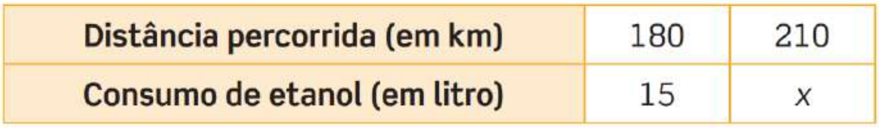
- **Situação 1**

Fonte: Alessandro Diniz Coutinho/Wikimedia Commons

A família Moraes viajou para Itaúnas, distrito de Conceição da Barra, para visitar as famosas dunas. O automóvel utilizado na viagem fez 180 km com 15 litros de etanol. Por estarem no município divisa com a Bahia, eles resolveram ir também até Mucuri, primeiro município baiano, percorrendo mais 30 km, totalizando 210 km. Vamos calcular quantos litros de etanol esse automóvel gastaria para percorrer 210 km.

O problema envolve duas grandezas: distância percorrida e consumo de etanol. As unidades empregadas para medir essas grandezas são, respectivamente, quilômetro e litro.

Ao indicar por x o número de litros de etanol que serão consumidos, podemos montar o seguinte quadro:



Distância percorrida (em km)	180	210
Consumo de etanol (em litro)	15	x

As grandezas distância percorrida e consumo de etanol são diretamente proporcionais, pois, se a distância percorrida aumenta, o consumo de etanol aumenta proporcionalmente, ou seja, se a distância dobra, triplica..., o consumo de etanol também dobra, triplica... etc.

Logo, a razão entre as distâncias percorridas é igual à razão entre os correspondentes consumos de etanol.

Assim, temos a proporção $\frac{180}{210} = \frac{15}{x}$, que nos leva ao valor de x.

$$180x = 15 \cdot 210$$

$$\frac{180x}{180} = \frac{3\ 150}{180}$$

$$x = 17,5$$

Portanto, esse automóvel gastaria 17,5 litros de etanol para percorrer 210 km.

- **Situação 2**

Ao viajar de automóvel, à velocidade média de 60 km/h, Margareth leva 4 horas para fazer certo percurso. Certo dia, ela aumentou a velocidade média do automóvel para 80 km/h. Vamos calcular o tempo que ela levou para percorrer o mesmo trajeto.

Velocidade média (em km/h)	60	80
Tempo (em hora)	4	*x*

As grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais, pois, ao se aumentar a velocidade, o tempo de percurso diminui proporcionalmente. Se, por exemplo, a velocidade for duplicada, o tempo de percurso ficará reduzido à metade.

Organizamos a proporção com a razão das velocidades médias sendo igual ao inverso da razão entre os respectivos tempos:

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{4} \longrightarrow 240 = 80x \longrightarrow \frac{240}{80} = \frac{80x}{80} \longrightarrow x = 3$$

Portanto, quando Vânia aumentou a velocidade média do automóvel para 80 km/h, o tempo que ela levou para percorrer o mesmo trajeto foi de 3 horas.

ESCALA

Dados obtidos em: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 90.

Observe o mapa a seguir.

Nele, a distância entre Porto Alegre e Florianópolis, em linha reta, é 1,9 cm. A distância real, em linha reta, entre essas duas cidades é 380 km.

Vamos calcular a razão entre a distância que está no mapa e a distância real entre as duas cidades. Para isso, precisamos expressá-las em uma mesma unidade de medida.

Transformamos 380 km (distância real) em centímetro:

380 km = 38 000 000 cm

Portanto, a razão procurada é dada por:

$$\frac{1{,}9}{38.000.000} \overset{\div 1,9}{\underset{\div 1,9}{=}} \frac{1}{20.000.000} = 1:20.000.000$$

A razão 1 : 20 000 000 significa que cada centímetro no mapa corresponde a 20 000 000 cm reais, isto é, cada centímetro corresponde a 200 km.

A esse tipo de razão chamamos de **escala**.

Exercicios Resolvidos

1) A Organização Mundial da Saúde (OMS), órgão da ONU que trata dos temas ligados à saúde, recomenda 1 médico para cada grupo de 1 000 habitantes.

Nessas condições, quantos médicos deveria ter uma cidade com 4 milhões de habitantes?

RESOLUÇÃO

Para calcular quantos médicos deveriam estar disponíveis em uma cidade com 4 milhões de habitantes, usando a recomendação da OMS de 1 médico para cada 1 000 habitantes, podemos dividir a população total pelo número de habitantes por médico:

$$\text{Número de médicos} = \frac{\text{População total}}{\text{Habitantes por médico}} = \frac{4.000.000}{1.000}$$

Número de médicos = 4 000.

Portanto, uma cidade com 4 milhões de habitantes deveria ter 4 000 médicos.

2) “A quantidade de médicos no Espírito Santo praticamente duplicou de 2011 para cá, segundo dados da Demografia Médica 2024, elaborada pelo Conselho Federal de Medicina (CFM). O levantamento aponta que o Estado tinha 7 410 médicos há 13 anos e, agora, conta com **14 032 profissionais** (89% de aumento).

Conselho Regional de Medicina do Estado do Espírito Santo

Segundo o último censo realizado em 2022 pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a população do Estado do Espírito Santo é de 3 833 712 pessoas.

https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/es.html

a) Com base nessas informações, qual é a quantidade de médicos para cada grupo de 1 000 pessoas no Estado do Espírito Santo?

b) Faça uma comparação com a quantidade de médicos para cada grupo de 1 000 habitantes no Estado do Espírito Santo com a quantidade recomendada pela OMS.

RESOLUÇÃO

a) Para calcular a quantidade de médicos para cada grupo de 1 000 pessoas no Estado do Espírito Santo, temos:

$$\text{Médicos por 1.000 pessoas} = \left(\frac{\text{Número total de médicos}}{\text{População total}}\right) \times 1.000$$

$$\text{Médicos por 1.000 pessoas} = \left(\frac{14.032}{3.833.712}\right) \times 1.000$$

$$\text{Médicos por 1.000 pessoas} \approx 3{,}66$$

Portanto, o Estado do Espírito Santo tem, aproximadamente, 3,66 médicos para cada grupo de 1 000 pessoas.

b) Comparando com a recomendação da OMS, que é de 1 médico para cada grupo de 1 000 pessoas, o estado do Espírito Santo, com 3,66 médicos para cada grupo de 1 000 pessoas está acima dessa recomendação.

3) Em um dia de estudos, Rafael resolveu 27 questões de Português e 36 de Matemática.

a) Qual é a razão entre a quantidade de questões de Português e de Matemática resolvidas por ele?

b) Qual é o significado da razão que você escreveu no item a?

RESOLUÇÃO

a) Podemos simplificar a fração. $\dfrac{27}{36} = \dfrac{3}{4}$

b) Significa que a cada 3 questões resolvidas de Português, 4 de Matemática foram solucionadas.

4) Efetue os cálculos e determine o valor de x nas seguintes proporções.

a) $\dfrac{5}{x} = \dfrac{20}{16}$

b) $\dfrac{x}{6} = \dfrac{x+5}{12}$

RESOLUÇÃO

a)
$$\frac{5}{x} = \frac{20}{16}$$
$$20x = 80$$
$$x = \frac{80}{20}$$
$$x = 4$$

b)
$$\frac{x}{6} = \frac{x+5}{12}$$
$$12x = 6x + 30$$
$$6x = 30$$
$$x = 5$$

5) Em uma editora, trabalham 9 digitadores. Trabalhando juntos durante o mesmo período diariamente, eles digitam certo material em 20 dias. Contratando mais 6 digitadores, em quantos dias todos finalizariam o material, considerando o mesmo ritmo de trabalho?

RESOLUÇÃO

Esse é um problema de grandezas inversamente proporcionais, pois o número de digitadores e o tempo necessário para finalizar o material têm uma relação inversa: quanto mais digitadores, menos dias serão necessários. Com 15 digitadores, o material será finalizado em 12 dias, assim como mostram os cálculos abaixo.

$$\frac{9}{9+6} \neq \frac{20}{x}$$
$$\frac{15}{9} = \frac{20}{x}$$
$$15x = 180$$
$$x = 12$$

A fração foi invertida, pois a grandeza “tempo” é inversamente proporcional à grandeza “número de digitadores”.

Material Extra

VÍDEOS

Razões e proporções
https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=57

Atividades

ATIVIDADE 1

Mariana está desenhando a planta de uma fazenda para um projeto de Agronomia. Ela utiliza uma escala de 1:1 000, onde 1 cm no desenho representa 1 000 cm (ou 10 metros) na realidade.

O comprimento real da fazenda é de 1,2 km e Mariana quer saber qual será o comprimento da fazenda no desenho, em centímetros.

Esse comprimento é:

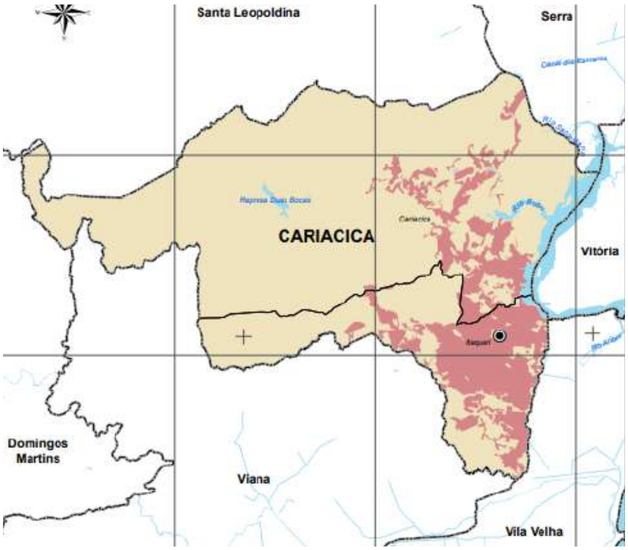
A) 12 cm
B) 100 cm
C) 120 cm
D) 1 200 cm

ATIVIDADE 2

Cariacica é um município brasileiro do estado do Espírito Santo, situado na Região Metropolitana da Grande Vitória. Com uma área aproximada de 280 km², faz divisa com Santa Leopoldina ao norte, Domingos Martins a oeste, Viana ao sul e, a leste, com Vila Velha, Serra e a capital, Vitória.

De acordo com dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2024, a população estimada do município era de 375 485 habitantes. Com base nessas informações, qual é a densidade demográfica aproximada de Cariacica nesse ano?

A) 1 301 hab/km²
B) 1 341 hab/km²
C) 1 401 hab/km²
D) 1 451 hab/km²



Fonte: https://one.s3.es.gov.br/pr-geobases-public/DIVISAO_ADMINISTRATIVA_ES/Cariacica.pdf

ATIVIDADE 3

Uma equipe de engenheiros consegue construir uma ponte em 45 dias com 10 trabalhadores, mantendo um ritmo de trabalho constante. Se forem contratados mais 5 trabalhadores, mantendo o mesmo ritmo de trabalho, em quantos dias a equipe concluirá a obra?

ATIVIDADE 4

A escala de um mapa é 1:500 000, ou seja, 1 cm no mapa representa 500 000 cm no terreno. Se a distância entre duas cidades em um mapa é de 8 cm, qual é a distância real entre as cidades, em quilômetros?

ATIVIDADE 5

Uma impressora imprime 48 páginas em 3 minutos. Quantas páginas imprimirá em 5 minutos?

ATIVIDADE 6

(UFBA) Sessenta das 520 galinhas de um aviário não foram vacinadas; morreram 92 galinhas vacinadas. Para as galinhas vacinadas, a razão entre o número de mortas e de vivas é:

$a)\ \frac{4}{5}$

$b)\ \frac{5}{4}$

$c)\ \frac{1}{4}$

$d)\ \frac{4}{1}$

ATIVIDADE 7

A taxa de consumo de combustível é um indicador importante para avaliar a eficiência energética de veículos. Ela mede quantos quilômetros um veículo pode percorrer com um litro de combustível.

Um carro flex pode usar gasolina ou etanol. Com gasolina, o consumo é de 12 km/l, enquanto com etanol é de 8 km/l. Se o preço da gasolina é R$ 6,50 por litro e o do etanol é R$ 4,50 por litro, qual é o combustível mais econômico para uma viagem de 240 km?

A) A gasolina é mais econômica, com um custo de R$ 120,00.

B) Etanol é mais econômico, com custo de R$ 135,00.

C) A gasolina é mais econômica, com um custo de R$ 130,00.

D) Ambos têm o mesmo custo

ATIVIDADE 8

João está assistindo a um filme de 2 horas (120 minutos) no seu streaming favorito. Ele está tão ansioso para descobrir o final que decide acelerar a reprodução do vídeo. Ele começa assistindo na velocidade normal (1x), mas, após 30 minutos, aumenta a velocidade para 1,5x. Depois de mais 30 minutos, ele fica ainda mais ansioso e aumenta a velocidade para 2x. Em quanto tempo João assistirá a todo o filme?

ATIVIDADE 9

O Bluetooth é uma tecnologia amplamente utilizada para a transferência de dados entre dispositivos próximos, como smartphones, fones de ouvido e computadores. A velocidade de transferência de dados pode variar dependendo da versão do Bluetooth e da distância entre os dispositivos.

Maria precisa transferir um arquivo de 120 MB para o celular de João usando Bluetooth. Ela sabe que a velocidade de transferência é de 2 MB/s. No entanto, devido a interferências, a velocidade cai para 1,5 MB/s após os primeiros 30 segundos. Quanto tempo Maria levará para transferir todo o arquivo?

ATIVIDADE 10

A proporcionalidade é um conceito importante na Matemática e pode ser classificada em direta ou inversa, dependendo da relação entre as grandezas envolvidas.

- **Proporcionalidade Direta**: Quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta na mesma proporção (ou quando uma diminui, a outra também diminui).

- **Proporcionalidade Inversa**: Quando uma grandeza aumenta, a outra diminui proporcionalmente (e vice-versa).

Elabore dois problemas matemáticos:

1. Envolvendo proporcionalidade direta entre duas ou mais grandezas.
2. Envolvendo proporcionalidade inversa entre duas ou mais grandezas.

Após elaborar os problemas, resolva-os, apresentando o raciocínio e os cálculos necessários.

Dica: Você pode criar problemas relacionados ao cotidiano, como receitas culinárias, abastecimento de veículos, produção industrial, construção civil, entre outros.

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo desse capítulo. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?

Reflita sobre sua aprendizagem

- Consigo resolver problemas que envolvem porcentagens, incluindo acréscimos e decréscimos simples, percentuais sucessivos e a determinação de taxas percentuais?
- Sou capaz de elaborar meus próprios problemas envolvendo porcentagens, aplicando situações que envolvam aumentos, reduções e taxas sucessivas?
- Consigo resolver problemas que envolvem a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, interpretando corretamente o significado dessa relação?
- Sou capaz de identificar e resolver problemas que envolvem proporcionalidade direta entre duas ou mais grandezas, reconhecendo quando uma grandeza cresce ou diminui na mesma proporção que a outra?
- Consigo elaborar situações-problema que expressem relações de proporcionalidade direta, aplicando corretamente o conceito em diferentes contextos do cotidiano?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Resolver problemas que envolvam porcentagens, incluindo os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, aplicação de percentuais sucessivos e determinação das taxas percentuais.	○	○	○
Elaborar problemas que envolvam porcentagens, incluindo os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, aplicação de percentuais sucessivos e determinação das taxas percentuais.	○	○	○
Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes.	○	○	○
Resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta entre duas ou mais grandezas.	○	○	○
Elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta entre duas ou mais grandezas.	○	○	○

Dica: Revise os tópicos que você marcou como “**preciso revisar**” e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

Conselho Regional de Medicina do Estado do Espírito Santo. Acesso em 19/03/2025. https://crmes.org.br/noticias/numero-de-medicos-no-espirito-santo-cresce-89-em-13-anos.

ES. Secretaria de Estado do Planejamento e Gestão. Mapa de Divisão Administrativa de Cariacica. 2023. Disponível em: https://one.s3.es.gov.br/pr-geobases-public/DIVISAO_ADMINISTRATIVA_ES/Cariacica.pdf. Acesso em: 22 fev. 2025.

FOLHA VILA VELHA. Segundo o Censo do IBGE, a população de Vila Velha é de 467.722 pessoas. Folha Vila Velha, 2025. Disponível em: https://folhavilavelha.com.br/segundo-o-censo-do-ibge-a-populacao-de-vila-velha-e-de-467-722-pessoas/vila-velha/noticias/utilidade-publica/social/. Acesso em: 22 fev. 2025.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. A conquista da matemática: 8º ano: ensino fundamental: anos finais. São Paulo: Ftd, 2022.

IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Cariacica - Panorama. Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/es/cariacica/panorama. Acesso em: 22 fev. 2025.

IMPA. OBMEP – Portal da OBMEP. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=57. Acesso em: 22 fev. 2025.

Orientações curriculares. Currículo ES, 2024. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares/. Acesso em: 10 fev. 2025.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida (ed.). SuperAÇÃO!: matemática: 8º ano: manual do professor. São Paulo: Moderna, 2022.

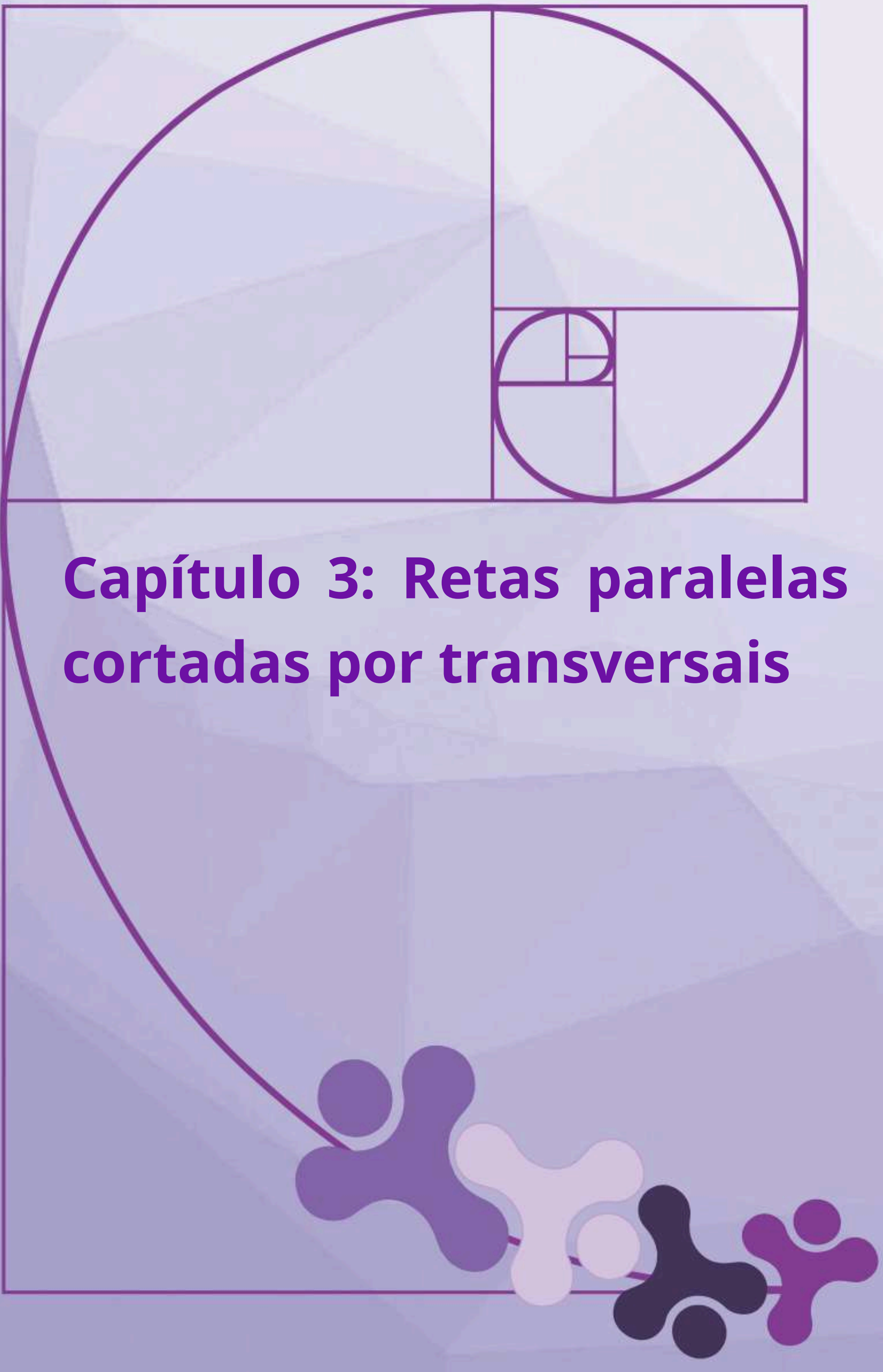
Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

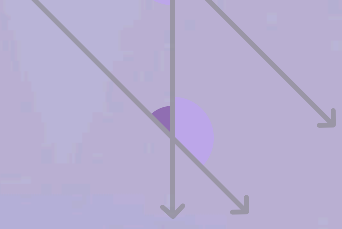
GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

SEDU 2026

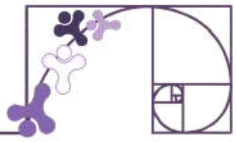
Gerência de Currículo
da Educação Básica



Capítulo 3: Retas paralelas cortadas por transversais



Apresentação



Prezado(a) estudante,

Você já observou as faixas de uma estrada, os trilhos de um trem ou as linhas de um caderno? Em todos esses casos, há retas paralelas (linhas que nunca se encontram), por mais que se prolonguem. Quando uma reta transversal cruza essas paralelas, formam-se diversos ângulos, que mantêm entre si relações muito importantes. Compreender essas relações ajuda a identificar ângulos correspondentes, alternos e colaterais, além de perceber como eles se repetem em diferentes figuras e construções geométricas.

O que você vai estudar neste capítulo

Neste capítulo, você vai explorar essas ideias, descobrindo como as propriedades das retas paralelas e transversais estão presentes não apenas na Geometria, mas também em estruturas, projetos e formas que encontramos no nosso cotidiano.

Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- ✓ Identificar retas ou segmentos de retas concorrentes, paralelas ou perpendiculares.
- ✓ Identificar relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
- ✓ Resolver problemas que envolvam relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
- ✓ Resolver problemas que envolvam aplicação das relações de proporcionalidade abrangendo retas paralelas cortadas por transversais.
- ✓ Elaborar problemas que envolvam aplicação das relações de proporcionalidade abrangendo retas paralelas cortadas por transversais.

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

RETAS PARELELAS, CONCORRENTES OU PERPENDICULARES

Neste material, vamos identificar retas ou segmentos de retas paralelas, concorrentes ou perpendiculares.

- Retas paralelas

Quando duas retas contidas em um mesmo plano não têm pontos em comum, elas são denominadas **retas paralelas**.

Veja o exemplo:

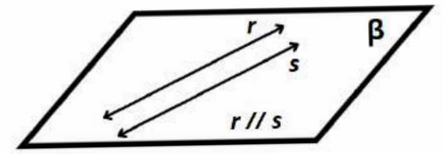
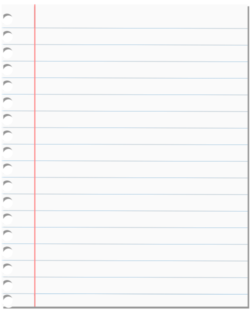


Imagem produzida no Canva

As retas *r* e *s*, contidas no plano β , representadas na figura ao lado, são **paralelas**, pois elas não têm pontos em comum.
Indicamos: $r \,//\, s$.

Como exemplo prático, olhe para as linhas do teu caderno. Elas são paralelas porque “nunca se encontrarão”.



Design: Viktor Morozuk/
Fonte: Canva

- Retas concorrentes

Quando duas retas têm um único ponto em comum, elas são denominadas **retas concorrentes**.

Veja o exemplo:

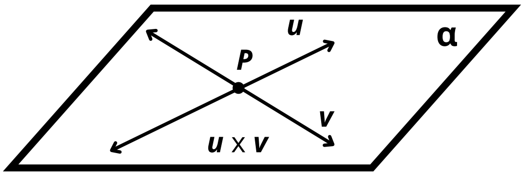
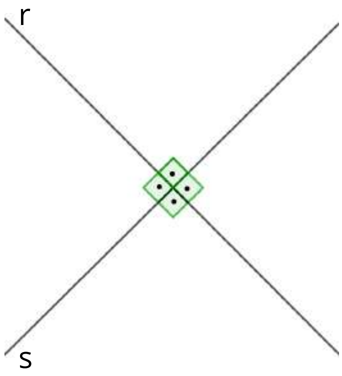


Imagem produzida no Canva

As retas *u* e *v*, contidas no plano α, representadas na figura ao lado, são concorrentes, pois o ponto *P* é o único ponto em comum entre elas.

Indicamos: $u \times v$.

- **Retas perpendiculares**



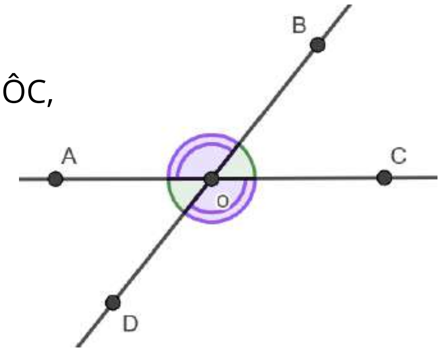
Quando duas retas concorrentes formam entre si quatro ângulos de 90° (ângulos retos), dizemos que as retas são **perpendiculares** e utilizamos o símbolo $\perp$ para representar esse perpendicularismo.

Na figura, *r* e *s* formam entre si quatro ângulos retos.

Então, $r \perp s$.

é perpendicular a

ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE (O.P.V)



Na figura ao lado, estão destacados os ângulos AÔB, BÔC, CÔD e DÔA. Nela temos:

- $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ são semirretas opostas.
- $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$ são semirretas opostas.

Portanto, as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, que formam os lados de $A\hat{O}B$ são opostas, respectivamente, às semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$, que formam os lados de $C\hat{O}D$.

Nesse caso, podemos afirmar também que os lados de $A\hat{O}B$ são formados pelos prolongamentos dos lados de $C\hat{O}D$, e vice versa.

A esses dois ângulos ($A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$) damos o nome de **ângulos opostos pelo vértice**.

Observando a figura, verificamos que $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ também são opostos pelo vértice.

Dois ângulos são chamados opostos pelo vértice (abreviamos o.p.v.) quando os lados de um forem prolongamentos dos lados do outro, e vice-versa.

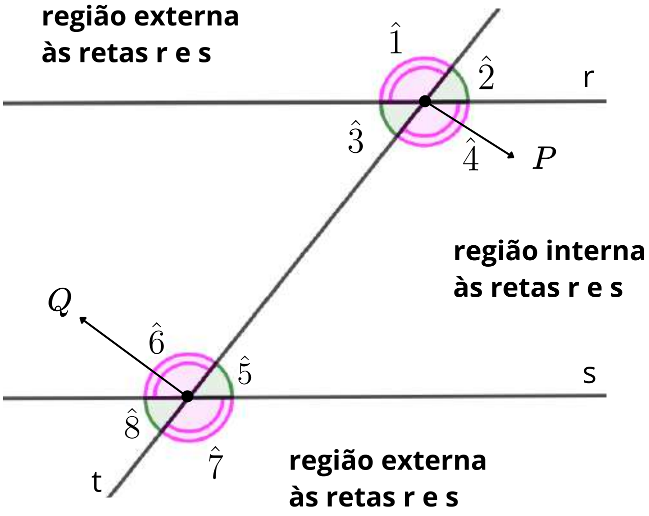
Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, têm a **mesma medida.**

RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

Nesta seção, vamos identificar relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

A figura nos mostra três retas (***t***, ***r*** e ***s***), todas pertencentes a um mesmo plano. A reta *t* corta a reta *r* no ponto *P*, e a reta *s*, no ponto *Q*.

Observe que a reta *t* forma com as retas *r* e *s* oito ângulos, sendo quatro com vértices em *P* e quatro com vértices em *Q*.



Para facilitar a visualização, vamos indicar esses oito ângulos numerando-os. Veja na figura.

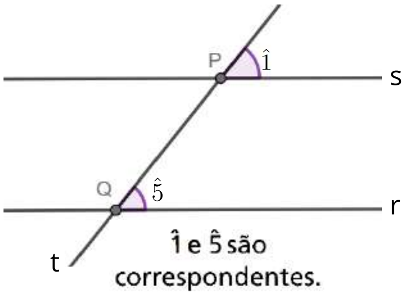
- ângulos com vértices em $P \rightarrow \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ e $\hat{4}$.
- ângulos com vértices em $Q \rightarrow \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}$ e $\hat{8}$.

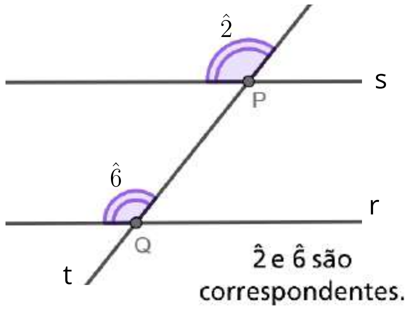
A reta *t*, concorrente à reta *r* no ponto *P* e concorrente à reta *s* no ponto *Q*, é chamada de **reta transversal** a *r* e *s*.

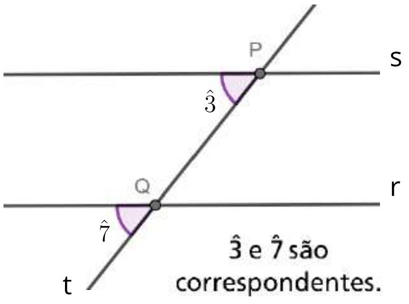
Vamos conhecer algumas relações importantes entre os ângulos formados por essas retas.

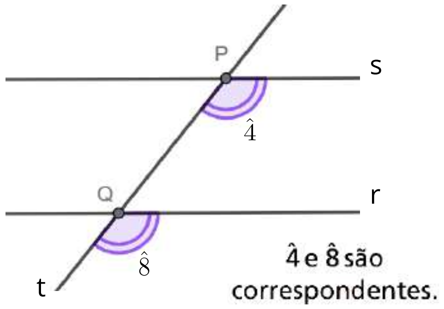
ÂNGULOS CORRESPONDENTES

Ângulos correspondentes são pares de ângulos não adjacentes, situados em um mesmo lado da reta transversal *t*, um na região interna e o outro na região externa às retas *r* e *s*.

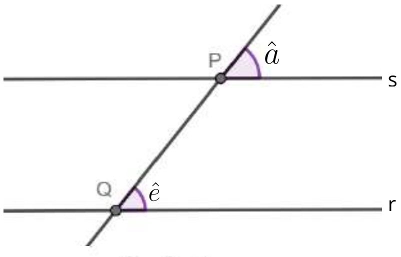




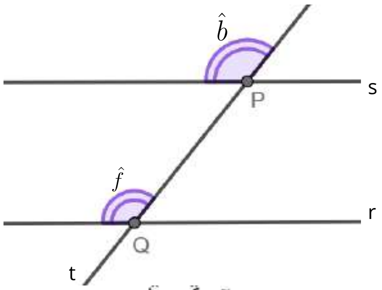




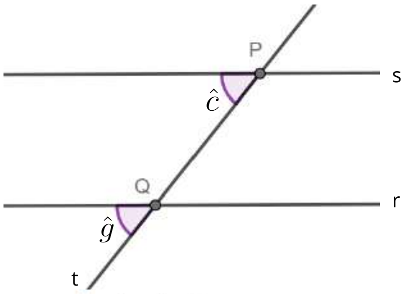
Se a reta transversal corta duas retas determinando ângulos correspondentes congruentes, então essas retas são paralelas $\hat{a} \cong \hat{e} \Rightarrow r//s$ (veja a figura acima).
A recíproca também é verdadeira: duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos correspondentes congruentes.



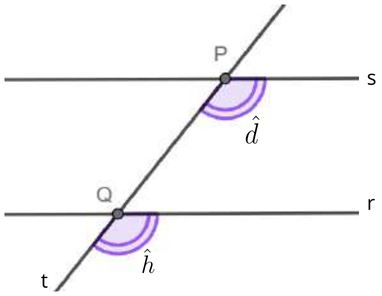
$\hat{a}$ e $\hat{e}$ são
correspondentes
$r \parallel s \Rightarrow \hat{a} \cong \hat{e}$



$\hat{b}$ e $\hat{f}$ são
correspondentes
$r \parallel s \Rightarrow \hat{b} \cong \hat{f}$



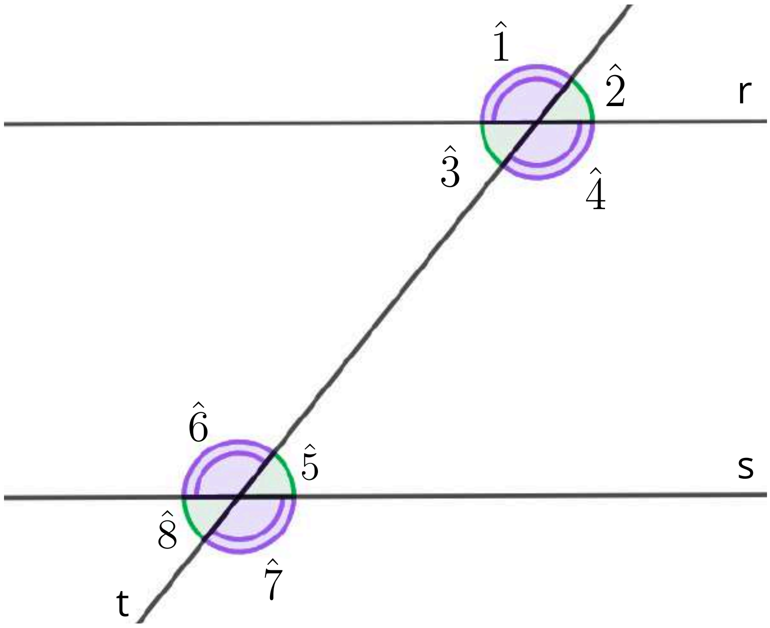
$\hat{c}$ e $\hat{g}$ são
correspondentes
$r \parallel s \Rightarrow \hat{c} \cong \hat{g}$



$\hat{d}$ e $\hat{h}$ são
correspondentes
$r \parallel s \Rightarrow \hat{d} \cong \hat{h}$

ÂNGULOS ALTERNOS

Ângulos alternos são pares de ângulos não adjacentes que estão em lados opostos em relação à reta transversal.



$\hat{3}$ e $\hat{5}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal t e na região determinada entre as retas *r* e *s* (região interna).

$\hat{3}$ e $\hat{5}$ são ângulos alternos internos.

$\hat{4}$ e $\hat{6}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal t e na região determinada entre as retas *r* e *s*.

$\hat{4}$ e $\hat{6}$ são ângulos alternos internos.

$\hat{1}$ e $\hat{7}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*.

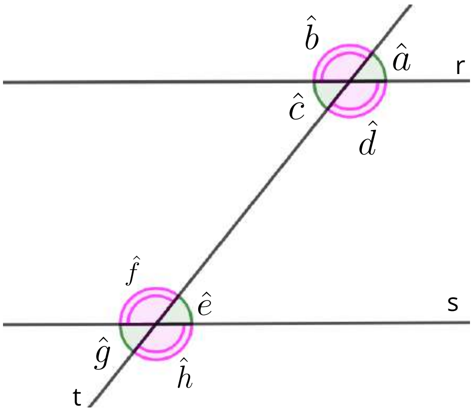
$\hat{1}$ e $\hat{7}$ são ângulos alternos externos.

$\hat{2}$ e $\hat{8}$ estão em lados opostos em relação à reta transversal *t* e na região externa às retas *r* e *s*.

$\hat{2}$ e $\hat{8}$ são ângulos alternos externos.

Duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos alternos congruentes (internos ou externos).

Assim:



$$r // s \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \hat{c} \cong \hat{e} \\ \hat{d} \cong \hat{f} \end{array}\right\} \text{alternos internos} \\ \left.\begin{array}{l} \hat{a} \cong \hat{g} \\ \hat{b} \cong \hat{h} \end{array}\right\} \text{alternos externos} \end{cases}$$

ÂNGULOS COLATERAIS

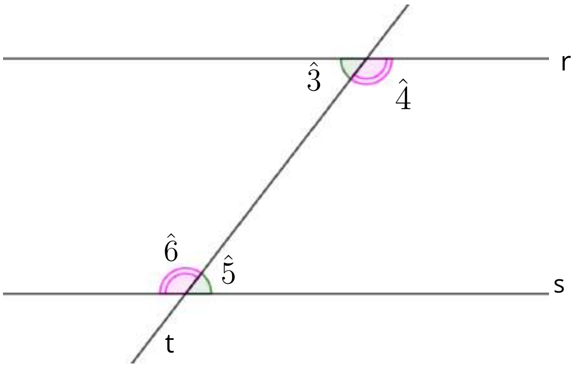
Ângulos colaterais são pares de ângulos não adjacentes localizados no mesmo lado da reta transversal.

$\hat{3}$ e $\hat{6}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal t e na região interna às retas r e s.

$\hat{3}$ e $\hat{6}$ são ângulos **colaterais internos**.

$\hat{4}$ e $\hat{5}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal t e na região interna às retas r e s.

$\hat{4}$ e $\hat{5}$ são ângulos **colaterais internos**.

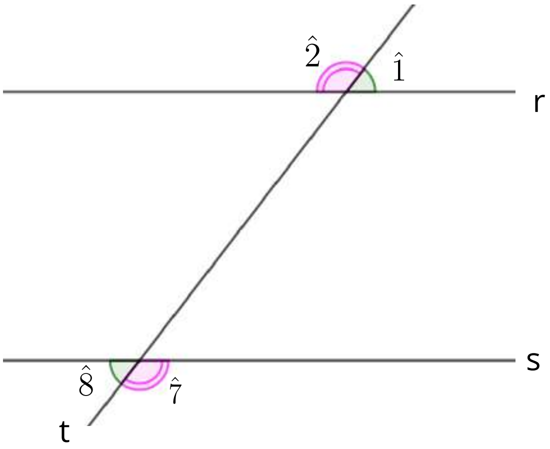


$\hat{1}$ e $\hat{7}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal t e na região externa às retas r e s.

$\hat{1}$ e $\hat{7}$ são ângulos **colaterais externos**.

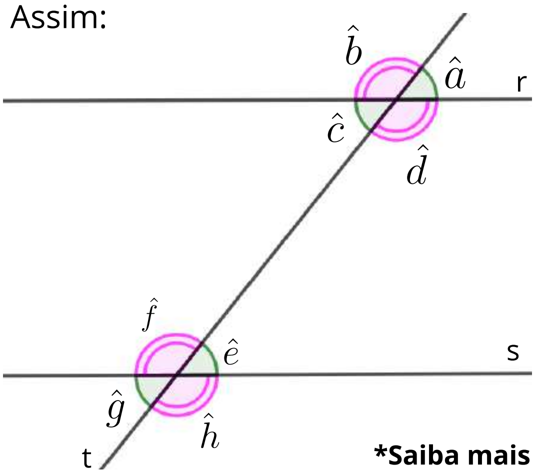
$\hat{2}$ e $\hat{8}$ estão no mesmo lado em relação à reta transversal t e na região externa às retas r e s.

$\hat{2}$ e $\hat{8}$ são ângulos **colaterais externos**.



Duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam ângulos colaterais (internos ou externos) suplementares*.

Assim:



$$r//s \Rightarrow \begin{cases} c+f=180^\circ \\ d+e=180^\circ \\ a+h=180^\circ \\ b+g=180^\circ \end{cases} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{colaterais internos} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{colaterais externos} \end{matrix}$$

***Saiba mais sobre ângulos suplementares na página Material Extra.**

PROPRIEDADE EM UM FEIXE DE RETAS PARALELAS

Existem algumas propriedades básicas a respeito de proporcionalidade quando um feixe de retas paralelas é cortado por uma reta transversal.

Observe a seguinte situação:

Ana Luíza representou uma reta *s* e indicou nela os pontos A, B, C e D, com mesma distância de 1,4 cm. Em seguida, ela representou as retas *a, b, c* e *d*, paralelas entre si e não paralelas a reta *s,* passando pelos respectivos pontos. Logo depois, Ana Luíza representou reta t transversal a esse feixe de retas paralelas e indicou os pontos *E, F, G e H.* Em seguida, ela mediu cuidadosamente o comprimento dos segmentos EF, FG e GH e percebeu que eles também tinham a mesma medida de comprimento, que era de 1,5 cm.

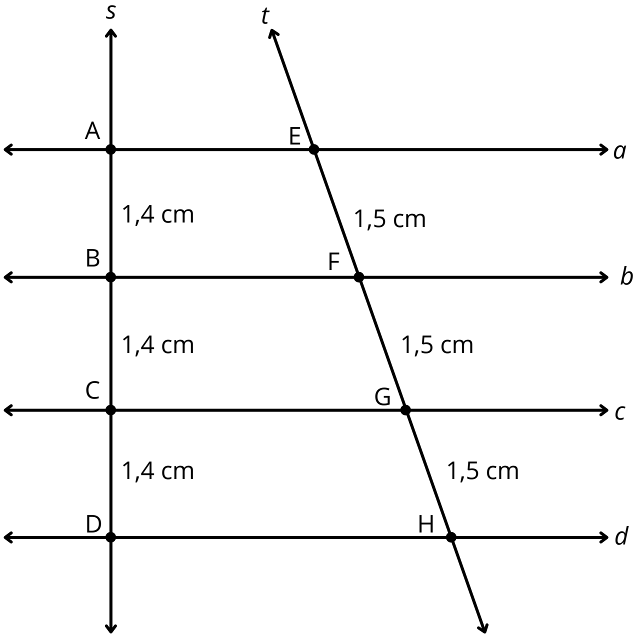


Imagem produzida no Canva

Assim, ela pôde escrever:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG} = 1 \text{, pois } \frac{1,4}{1,4} = \frac{1,5}{1,5} = 1$$

Temos, então, que:

Se um feixe de retas paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, ele também determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Agora, observe o que acontece quando os segmentos de reta determinados por um feixe de retas sobre uma transversal **não são** congruentes e cujas medidas de comprimentos são números racionais.

Considere um feixe de 3 retas paralelas *r, s* e *v* intersectado por uma transversal *t*. Representamos outra reta transversal qualquer *u*.

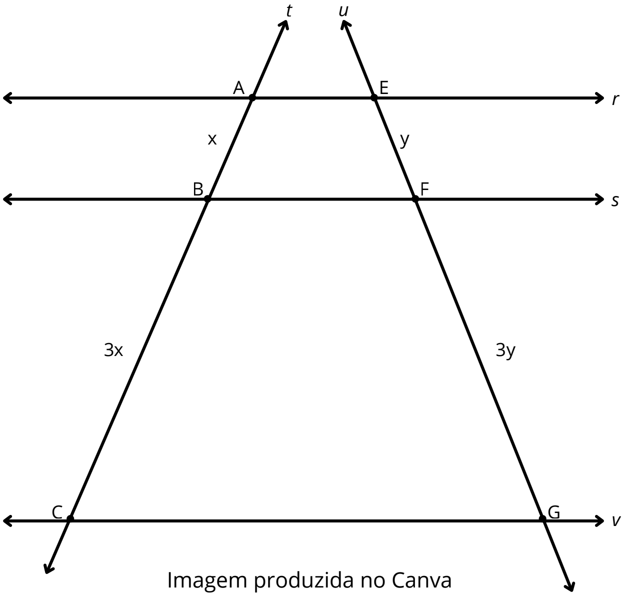


Imagem produzida no Canva

Neste caso particular,
AB = x cm, BC = 3x e $\frac{AB}{BC} = \frac{1x}{3x} = \frac{1}{3}$. **(I)**

Se você medir o comprimento dos segmentos de reta *EF* e *FG*, poderá constatar (salvo pequenos erros de medição) que *EF* = *y* cm e *FG* = 3*y* cm, ou seja:

$$\frac{EF}{FG} = \frac{1y}{3y} = \frac{1}{3}. \quad \textbf{(II)}$$

De (I) e (II), podemos concluir que $\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$, ou seja, as medidas de comprimento *AB*, *BC, EF* e *FG* formam uma **proporção.**

Um feixe de retas paralelas determina, sobre 2 retas transversais, segmentos de reta proporcionais.

Exercícios Resolvidos

1) Na figura, temos *r // s*. Determine as medidas *a* e *b*.

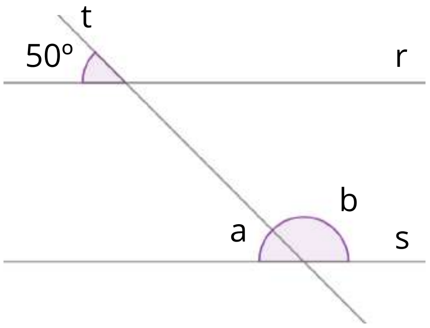


Imagem produzida no Canva

RESOLUÇÃO

Como r // s, temos:

a = 50° (ângulos correspondentes)

Como *a* e *b* são suplementares, ou seja, somam 180º, temos:

$$a + b = 180°$$
$$50° + b = 180°$$
$$b = 130°$$

2) Determine a medida dos ângulos *b, c, d, e, f, g* e *h*, sabendo que *a* = 130º.

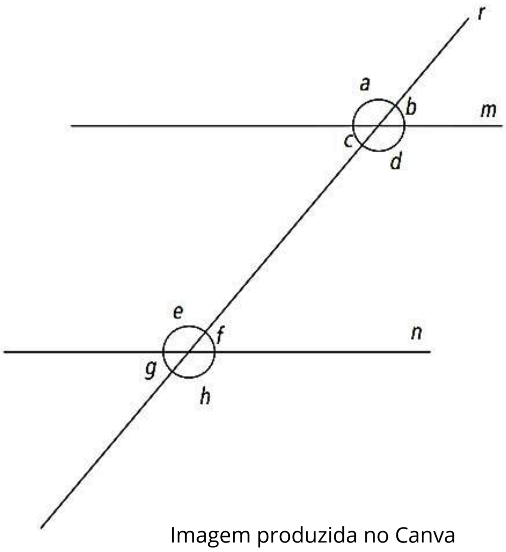


Imagem produzida no Canva

RESOLUÇÃO

Na figura, *m* e *n* são retas paralelas.

Conhecendo a medida de um dos ângulos, a = 130º, por exemplo, podemos determinar a medida dos demais.

Veja: Como *m // n*, os ângulos correspondentes são congruentes.

a = e = 130º (ângulos correspondentes)
a + b = 180º (ângulos suplementares)
130º + b = 180º
n = 50º
b = f = 50º (ângulos correspondentes)

d = a = 130º
c = b = 50º
g = f = 50º
h = e = 130º

→ ângulos opostos pelo vértice (o.p.v)

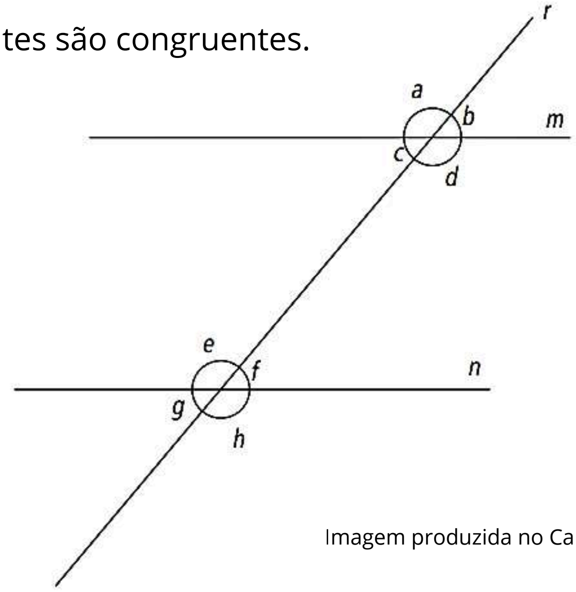


Imagem produzida no Canva

3) Determine o valor de x, sabendo que as retas *a, b* e c desta figura são paralelas e que as retas *t* e *s* não são.

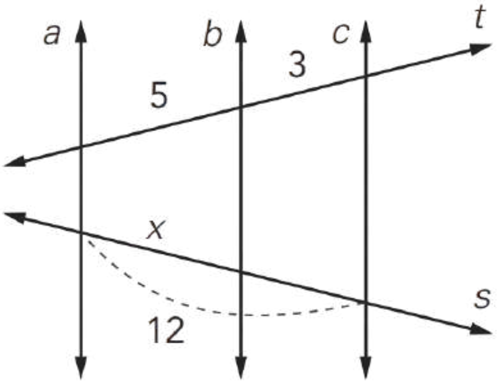


Imagem produzida no Canva

RESOLUÇÃO

$$\frac{12}{x} = \frac{5+3}{5} \Rightarrow 8x = 60 \Rightarrow x = 7,5$$

Portanto, o valor de x é 7,5.

PRÁTICAS EXPERIMENTAIS DE Matemática PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

No ano de 2026, o Ensino Fundamental - Anos Finais apresenta uma importante novidade para o componente curricular Matemática: as Práticas Experimentais de Matemática, que visam fomentar o processo de ensino e aprendizagem favorecendo o desenvolvimento e a consolidação de habilidades, o pensamento crítico e a compreensão e a aplicação da lógica matemática. Intenciona-se, também, combater o estigma de que a Matemática é difícil e inacessível, engajando os estudantes em práticas lúdicas e exequíveis.

Desse modo, as práticas foram elaboradas a partir das habilidades estruturantes de cada ano, por trimestre. No período em que constar o caderno de Práticas Experimentais, o(a) professor(a) deverá destinar **duas aulas** para cada prática proposta no material.

Desejamos um ano letivo de sucesso!

Prática experimental de Matemática
9º ano

Clique aqui

Material Extra

VÍDEOS

Posição relativa entre retas
https://www.youtube.com/watch?v=qRcJPWDfJAA

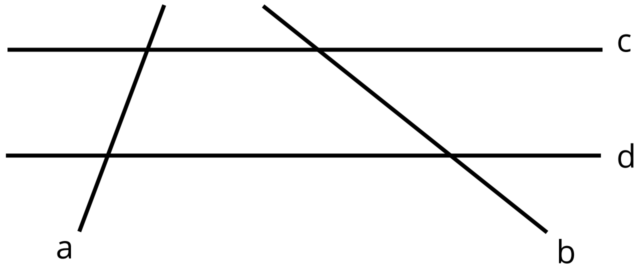
Ângulos Complementares e Supementares
https://www.youtube.com/watch?v=T98zYXrzmyM

Ângulos Opostos pelo Vértice
https://www.youtube.com/watch?v=46gweZfAefI

Atividades

ATIVIDADE 1

Observe a figura abaixo e dê a posição relativa das retas (paralelas ou concorrentes):



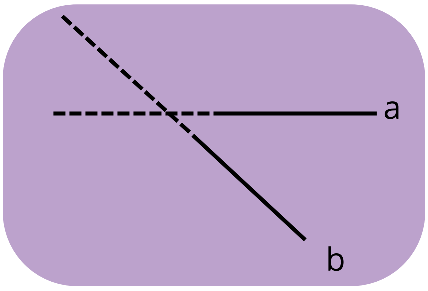


Imagem produzida no Canva

a) a e b.
b) a e c.
c) a e d.
d) c e d.
e) b e c.

Lembrando que a reta é imaginada sem começo nem fim. Portanto, vale prolongar as retas para conferir se elas se interceptam.

ATIVIDADE 2

Determine os valores de x e y na figura seguinte:

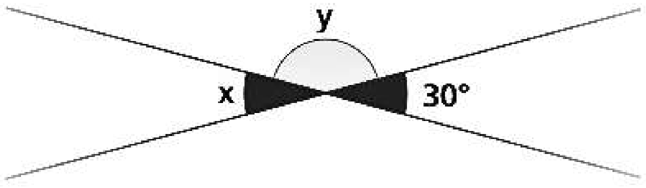


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 3

Dois ângulos opostos pelo vértice têm medidas, em graus, expressas por x + 50° e 2x - 30°. Qual é o valor de x?

ATIVIDADE 4

Determine os valores de *x* , *y e a* na figura abaixo.

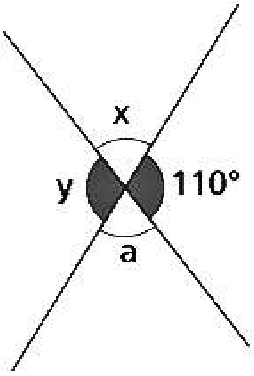


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 5

Com base na imagem e nas informações fornecidas, analise as seguintes afirmações sobre os ângulos formados por uma reta transversal que corta duas retas paralelas:

I. Os ângulos **a** e **h** são colaterais externos.

II. Os ângulos **c** e **f** são internos e opostos pelo vértice.

III. Os ângulos **b** e **g** são externos e colaterais.

IV. Os ângulos **d** e **e** são internos e colaterais.

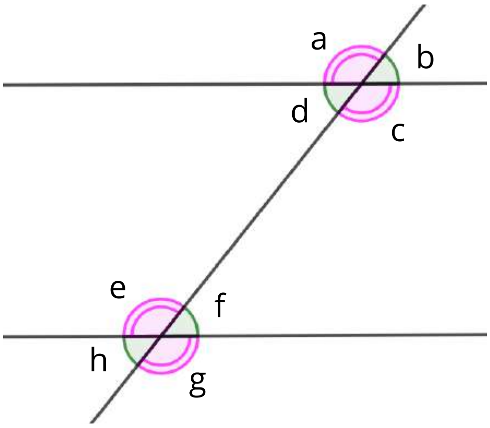
Assinale a alternativa correta:

A) Apenas as afirmações I e III estão corretas.

B) Apenas as afirmações II e IV estão corretas.

C) Apenas as afirmações I, II e III estão corretas.

D) Apenas as afirmações I, III e IV estão corretas.



ATIVIDADE 6

Observe a figura abaixo. Temos que a // b // c. Considerando as medidas dadas, em unidade de comprimento, calcule o valor de x.

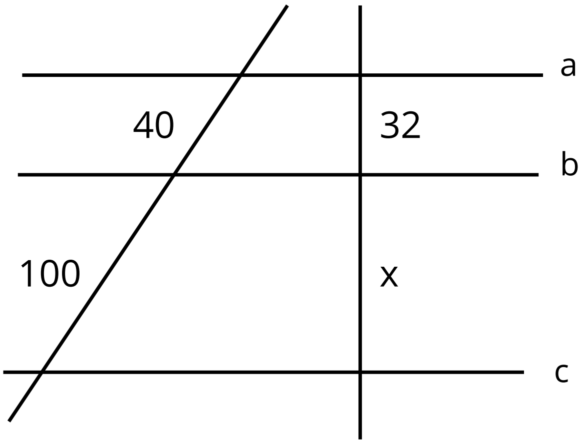


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 7

Na figura a seguir, temos r // s // t. Determine a medida x indicada.

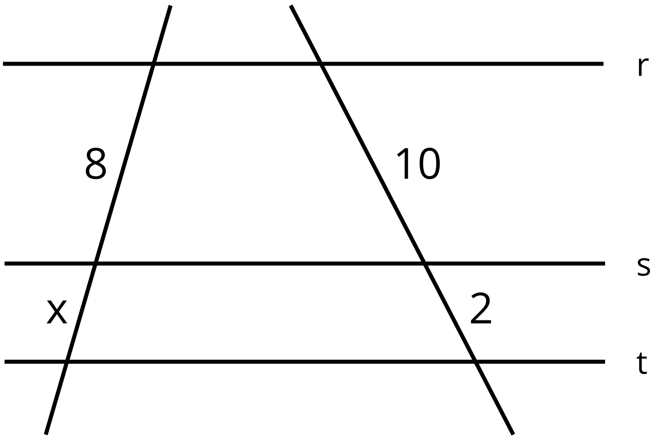


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 8

Determine a medida de y na figura a seguir, sabendo que a // b // c;

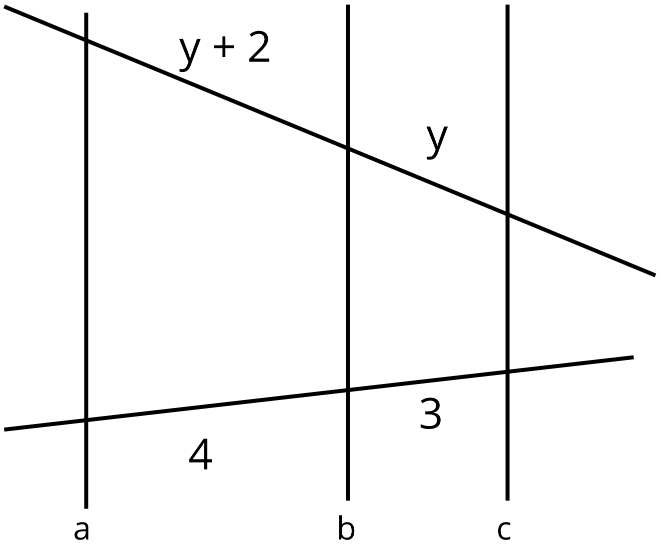
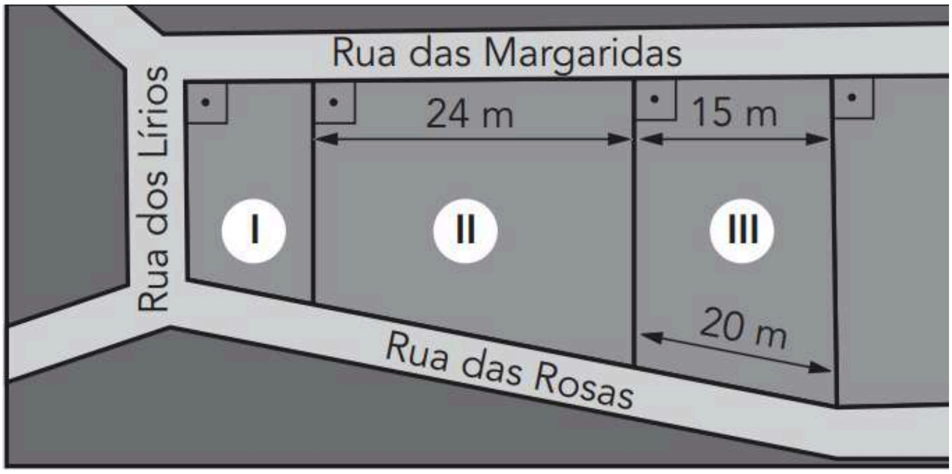


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 9

(SARESP-SP) No desenho abaixo estão representados os terrenos I, II e III. Quantos metros de comprimento deverá ter o muro que o proprietário do terreno II construirá para fechar o lado que faz frente com a Rua das Rosas?



ATIVIDADE 10

Vamos fazer um experimento. Você precisará de uma folha de caderno comum com linhas paralelas, lápis e régua.

(I) Utilizando uma régua, trace uma reta *r* vertical na folha do seu caderno (perpendicular às linhas do caderno), de tal forma que as linhas dessa folha sejam as linhas paralelas cortadas por essa reta *r* que você vai traçar.

(II) Trace uma reta *s*, ao lado da reta *r*, desta vez, na diagonal (não perpendicular às linhas do caderno) para que *r* e *s* não sejam paralelas.

(III) Observe que a reta r, ao cortar as linhas do seu caderno, determinou vários segmentos de reta, que representam a distância entre as linhas paralelas da folha de de caderno. Meça essas distâncias entre as linhas, ou seja, cada segmento formado na reta *r*.

(IV) Observe que as linhas do seu caderno também formaram segmentos na reta *s*. Meça esses segmentos.

a) O tamanho dos segmentos formados na reta *r* são de mesma medida? Justifique.

b) O tamanho dos segmentos formados na reta *s* são de mesma medida? Justifique.

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo desse capítulo. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?

Reflita sobre sua aprendizagem

- Consigo identificar quando duas retas ou segmentos são concorrentes, paralelos ou perpendiculares, observando suas posições no plano?
- Sou capaz de reconhecer as relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, como ângulos correspondentes, alternos e colaterais?
- Consigo resolver problemas que envolvem os ângulos formados por retas paralelas e transversais, aplicando corretamente as propriedades de igualdade e suplementaridade entre eles?
- Sou capaz de resolver problemas que envolvem relações de proporcionalidade em figuras formadas por retas paralelas cortadas por transversais, compreendendo como as medidas se relacionam?
- Consigo elaborar problemas que apliquem as relações de proporcionalidade em situações com retas paralelas e transversais, demonstrando entendimento e criatividade?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Identificar retas ou segmentos de retas concorrentes, paralelas ou perpendiculares.	○	○	○
Identificar relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.	○	○	○
Resolver problemas que envolvam relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.	○	○	○
Resolver problemas que envolvam aplicação das relações de proporcionalidade abrangendo retas paralelas cortadas por transversais.	○	○	○
Elaborar problemas que envolvam aplicação das relações de proporcionalidade abrangendo retas paralelas cortadas por transversais.	○	○	○

Dica: Revise os tópicos que você marcou como “**preciso revisar**” e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências

BARBOSA, M. L. Educação e Tecnologia no Século XXI: Reflexões para o Futuro do Trabalho. Editora Educação e Sociedade, 2022.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

CLUBE DE MATEMÁTICA OBMEP. Problema para ajudar na escola: dois terrenos da rua Arquimedes. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-para-ajudar-na-escola-dois-terrenos-da-rua-arquimedes/. Acesso em: 22 out. 2025.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria da Educação. Matemática – 2ª Série – 3ª Semana. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/wp-content/uploads/2024/03/MAT-2a-Serie-3a-Semana.pdf. Acesso em: 22 out. 2025.

MUNDO EDUCAÇÃO. Teorema da Bissetriz Interna. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/teorema-bissetriz-interna.htm. Acesso em: 22 out. 2025.

NOVA ESCOLA. Plano de aula: Explorando ângulos na intersecção entre retas. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/explorando-angulos-na-interseccao-entre-retas/222. Acesso em: 22 out 2025.

NOVA ESCOLA. Plano de aula: Posição entre retas e seus ângulos. Disponível em: https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/posicao-entre-retas-e-seus-angulos/150. Acesso em: 22 out. 2025.

Orientações curriculares. Currículo ES, 2024. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares/. Acesso em: 22 out. 2025.

QUIZUR. Relações métricas no triângulo retângulo. Disponível em: https://pt.quizur.com/trivia/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo-z9a3. Acesso em: 22 out. 2025.

UNESP – IBILCE. O Teorema de Pitágoras. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/oteoremadepitagoras.pdf. Acesso em: 22 out. 2025.