Governo do Estado do Espírito Santo
Secretaria da Educação
Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental

PRÁTICAS EXPERIMENTAIS DE *Matemática* PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

9º ANO

2º TRI.

Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo

Andrea Guzzo Pereira
Secretária de Estado da Educação

Subsecretaria de Educação Básica e Profissional

Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental - Geief

Rafaela Teixeira Possato de Barros
Gerente

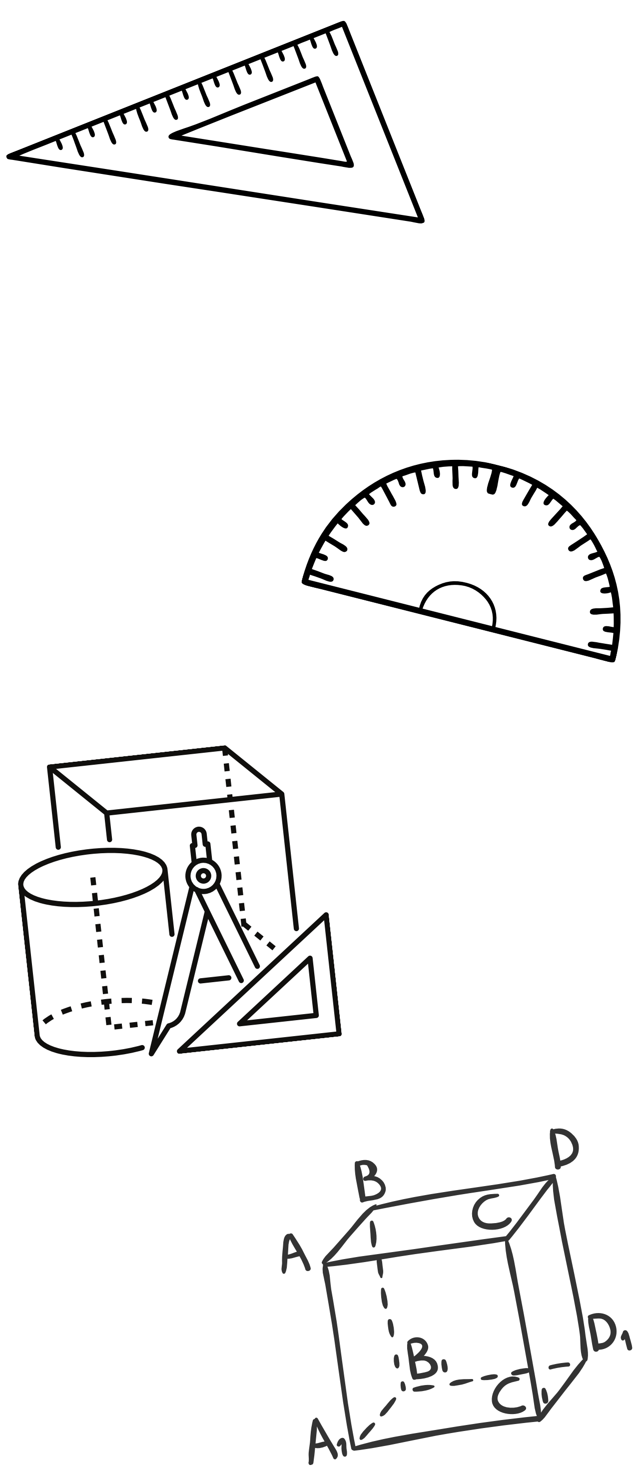
Débora Aparecida Furieri Matos
Subgerente

Euléssia Costa Silva
Guilherme Escarpini Helmer
Equipe responsável

Adriana Lisboa Chaves Rezende
Antonio da Silva Pereira Neto
Euléssia Costa Silva
Guilherme Escarpini Helmer
Ivana Lima Brito
Júlio César Campos
Luara Zucolotto Afonso
Monalisa Di Paula Silva de Albuquerque
Roque Alves da Silva Júnior
Simone Maria Oliveira Gonçalves
Tatiana Gomes dos Santos Peterle
Equipe Técnica da Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental

Adalzira Ribeiro da Hora
Sandra Mara Moura Machado
Equipe de Apoio da Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental

APRESENTAÇÃO



Prezado(a) professor(a),

A educação contemporânea tem sido profundamente marcada por desafios relacionados ao letramento matemático, contexto em que a experimentação matemática emerge como um imperativo educacional e se constitui fator essencial à vivência escolar e cidadã e à intervenção no mundo.

Pensando nisso, e com vistas a subsidiar o desenvolvimento da experimentação matemática do 6º ao 9º ano, a Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental - Geief elaborou o documento *Práticas Experimentais de Matemática no Ensino Fundamental.*

O objetivo é que, a partir deste material, os(as) professores de Matemática disponham de mais um subsídio para desenvolver as aprendizagens dos(as) estudantes de forma contextualizada e significativa.

Assim, abarcando diferentes metodologias de ensino e considerando as distintas formas de aprender dos(as) estudantes, propomos o desenvolvimento de práticas que contribuam para a ampliação e o aprofundamento de importantes conhecimentos matemáticos do 5º ao 9º ano do ensino fundamental.

Desse modo, professor(a), desejamos que estas práticas fomentem a sua práxis pedagógica voltada à abordagem crítica e reflexiva dos conhecimentos matemáticos, contando, para isso, com a sua preciosa contribuição, elemento essencial para o sucesso educacional pelo qual almejamos.

Bom trabalho!

Por que promover práticas experimentais de Matemática?

Professor(a), o dinamismo que marca a sociedade contemporânea exige práticas de ensino cada vez mais diversificadas, que atendam às diferentes expectativas e necessidades de aprendizagem dos(as) estudantes. Desse modo, concebemos que o trabalho com práticas experimentais de Matemática pode fomentar o(a):

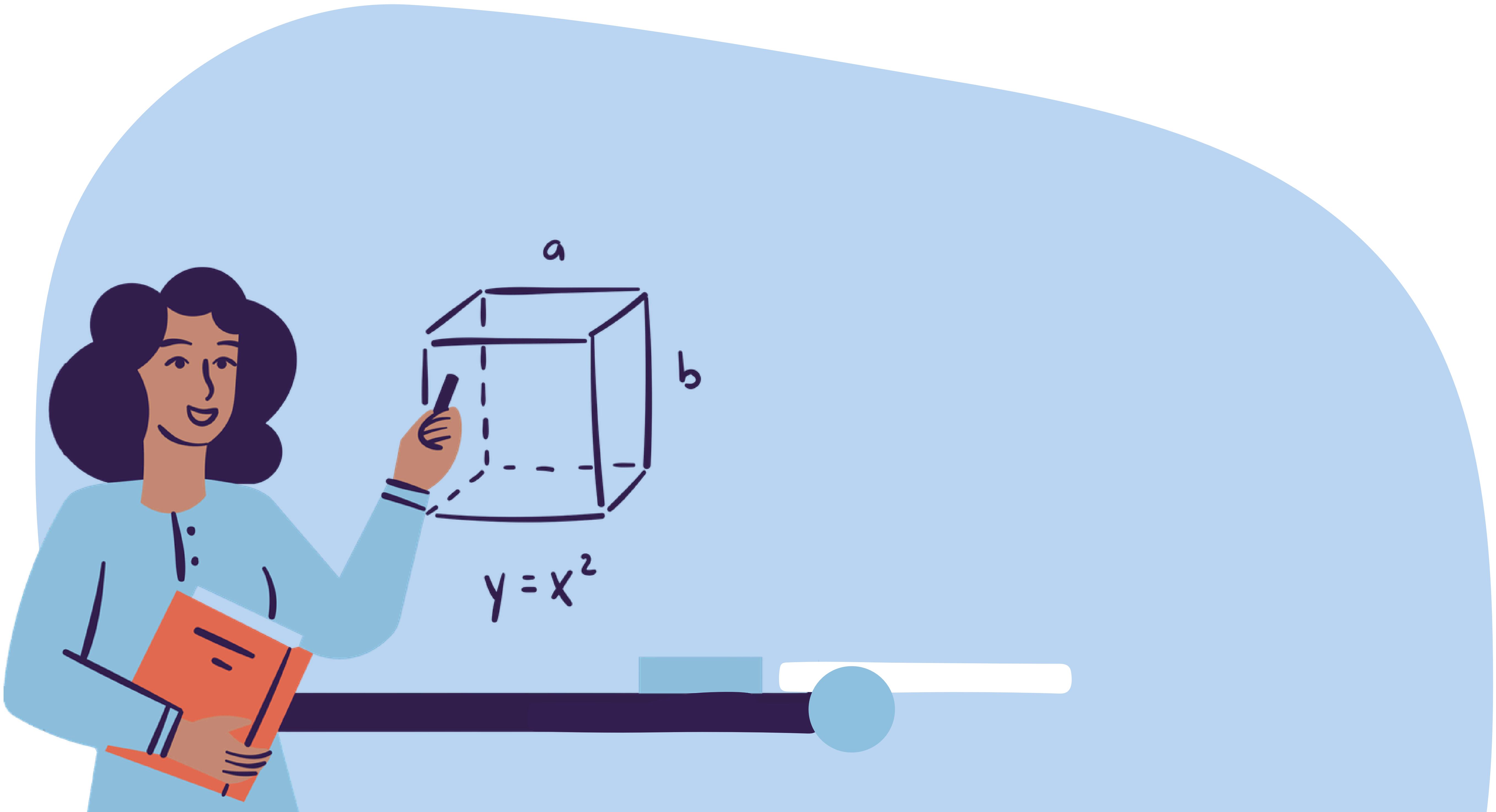
Desenvolvimento e consolidação de habilidades: a realização de experimentos contribui para o desenvolvimento de habilidades essenciais, sobretudo aquelas cujos resultados estão fragilizados no ensino fundamental anos finais. A abordagem prática, aliada à ludicidade, ajuda a ilustrar conceitos, evidenciando sua aplicabilidade em situações concretas, o que amplia as possibilidades de aprendizagem dos(as) estudantes.

Pensamento crítico: a experimentação matemática instiga o pensamento crítico, uma vez que, por meio de experiências, os(as) estudantes aprendem a formular perguntas e a levantar hipóteses, tendo a oportunidade de refletir, a partir da mediação do(a) professor(a), sobre a própria construção de conhecimentos.

Compreensão e aplicação da lógica matemática: os diferentes conhecimentos que compõem a vida cotidiana são fundamentalmente perpassados pela lógica matemática, o que torna imprescindível sua compreensão e aplicação pelos(as) estudantes.

Engajamento: A vivência com práticas experimentais pode motivar os(as) estudantes ao promover um contato mais dinâmico e lúdico com os diferentes conhecimentos, constituindo um contexto mais propício ao estreitamento do vínculo dos(as) estudantes com os seus estudos.

Combate ao estigma de que a matemática é difícil e inacessível: a cultura de que a matemática é difícil e inacessível se configura como um obstáculo ao processo educacional que urge ser mitigado. Ao vivenciar experiências com a matemática, intencionamos que os(as) estudantes percebam que é possível aprendê-la (e de diferentes formas).



As práticas experimentais de matemática estão estruturadas nas seguintes seções:

APRESENTAÇÃO E CONCEITUAÇÃO

Nesta seção, apresentamos a fundamentação teórica que embasa a prática proposta.

OBJETIVO DA AULA

Nesta seção, detalhamos o objetivo da aula, com vistas a contribuir para a orientação do trabalho docente.

UM POUCO DE HISTÓRIA

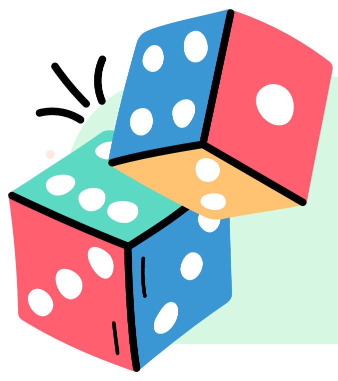
Nesta seção, apresentamos alguns momentos e personagens da história da matemática.

DESENVOLVIMENTO

Nesta seção, detalhamos os procedimentos metodológicos necessários à realização da prática, indicando as etapas de execução da prática experimental.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E AVALIAÇÃO

Aqui, dispomos os pontos de diálogo necessários ao encerramento da execução da prática, com reflexões e possíveis conclusões que devem ser pensadas com os(as) estudantes.



JOGOS MATEMÁTICOS

Pensando na utilização de jogos analógicos e digitais como ferramentas de promoção da aprendizagem lúdica, as práticas experimentais são complementadas com jogos que versam sobre as temáticas das práticas propostas.

SUMÁRIO

CLIQUE NA AULA PARA ACESSÁ-LA

PRÁTICA 1: EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS INDEPENDENTES E DEPENDENTES

Habilidade: (EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Objeto de conhecimento: Cálculo de probabilidade e eventos dependentes e independentes

Expectativas de aprendizagem:
- Compreender a diferença entre eventos independentes e dependentes
- Calcular probabilidades em ambos os casos
- Comparar resultados experimentais com resultados teóricos

Materiais necessários:
- 1 dado por grupo.
- Sacola opaca ou um envelope para cada grupo.
- 10 papéis de duas cores diferentes (exemplo: 6 azuis e 4 vermelhos) para cada grupo.
- Ficha para registro.

APRESENTAÇÃO E CONCEITUAÇÃO

A teoria das probabilidades é o ramo da matemática que nos permite modelar a incerteza e prever as chances de ocorrência de eventos em experimentos aleatórios. Longe de ser apenas um jogo de azar, ela é uma ferramenta essencial em campos como a genética, a meteorologia, a economia e a inteligência artificial. Compreender como eventos se relacionam, se o resultado de um interfere ou não no próximo, é o que separa um palpite de uma análise estatística rigorosa.

Professor(a), nesta prática, os(as) estudantes realizarão um experimento de amostragem para coletar e analisar dados, por meio da manipulação de urnas e de outros objetos. A ideia é que eles observem a diferença entre a reposição e a não reposição de elementos, noções que dão origem aos eventos independentes e dependentes. Esta prática foi elaborada com o intuito de transformar o cálculo abstrato de frações e porcentagens em uma percepção tátil de como o "espaço amostral" se comporta na prática.

Para que os(as) estudantes dominem esse objeto, eles(as) precisam compreender conceitos fundamentais que servem de base, tais como:
- Espaço Amostral: O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.
- Análise Combinatória Simples: Frequentemente utilizada para contar as possibilidades totais e favoráveis.
- Probabilidade Condicional (Intuitiva): A compreensão de que, ao não repor um item (evento dependente), o "todo" (denominador da fração) diminui e as chances mudam.
- Multiplicação de Probabilidades: A regra do "e", utilizada para calcular a probabilidade de dois ou mais eventos ocorrerem em sequência.

Professor(a), se possível, revise com os(as) estudantes as operações básicas com frações e a noção de razão, pois esses conceitos serão a base para o cálculo das probabilidades compostas que eles(as) encontrarão ao longo desta prática experimental.

OBJETIVO DA AULA

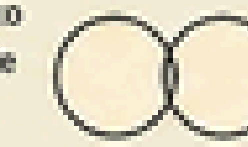
Identificar e diferenciar eventos dependentes e independentes por meio de experimentos de amostragem com e sem reposição.

A HISTÓRIA DA PROBABILIDADE:
EVENTOS, RELAÇÕES E DESCOBERTAS QUE EXPLICAM O ACASO

A probabilidade evoluiu da análise de eventos isolados para o estudo das relações entre acontecimentos. Essa evolução permitiu compreender e modelar situações cada vez mais complexas. O conceito de eventos independentes e dependentes é essencial para essa análise.

EVENTOS INDEPENDENTES

A ocorrência de um evento não altera a probabilidade do outro.



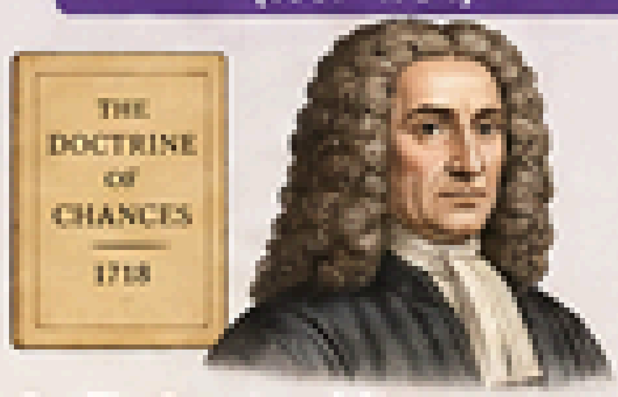
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

EVENTOS DEPENDENTES

A ocorrência de um evento altera a probabilidade do outro.
Usamos a probabilidade condicional: $P(A|B)$

DO SÉCULO XVIII AO XX: O AVANÇO DAS IDEIAS

ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754)



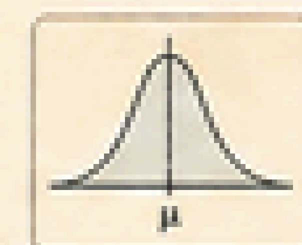
Em *The Doctrine of Chances* (1718), sistematizou a teoria das probabilidades e difundiu a regra do produto para eventos independentes (ideias já discutidas por Pascal e Fermat).

THOMAS BAYES (1702–1761)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Formulou o Teorema de Bayes, que permite atualizar probabilidades com novas informações. Base da probabilidade condicional e da análise de eventos relacionados.

PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827)



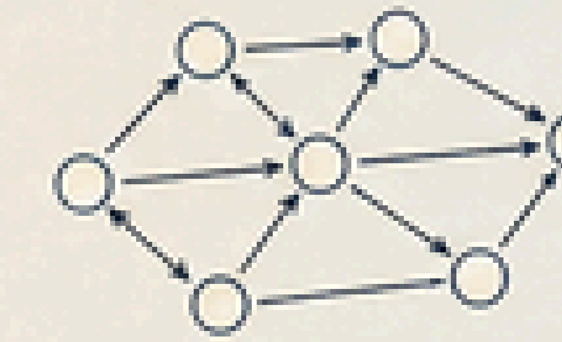
Ampliou as ideias de Bayes e aplicou a probabilidade em problemas reais da ciência e da estatística, trazendo mais rigor e métodos para cálculos em cadeias de eventos.

ANDREY KOLMOGOROV (1903–1987)

AXIOMAS DA PROBABILIDADE
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \geq 0$
- Aditividade (contável)

Estabeleceu os axiomas da probabilidade (1933), criando as bases da teoria moderna e definindo com precisão conceitos como independência e dependência.

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (SÉCULO XX)



Estudam sistemas em que o próximo estado depende do anterior. Usados em física, economia, genética, finanças e muitas outras áreas.

RAÍZES ANTIGAS: CONTRIBUIÇÕES FORA DA EUROPA

MUNDO ISLÂMICO

Al-Khalil ibn Ahmad
(718–786)

Explorou combinações de palavras na língua árabe, antecipando ideias da análise combinatória.

Al-Kindi
(c. 801–873)

Em seu *Manuscrito sobre a Decifração de Mensagens Criptográficas*, usou a análise de frequência para quebrar códigos – uma aplicação prática da estatística.

Al-Karaji (al-Karaji)
(953–1029) e
Omar Khayyam
(1048–1131)

$$(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Trabalharam com o teorema binomial e técnicas algébricas que depois se tornaram ferramentas para cálculo de probabilidades.

ÍNDIA ANTIGA

Pingala
(c. século II a.C.)

Sílabas (curta/longa)	Padrões possíveis
0	0 →
0	1 →
1	0 →
1	1 →

Ao estudar a poesia sânscrita, desenvolveu métodos para contar combinações de sílabas curtas e longas, antecipando o sistema binário e os coeficientes binomiais.

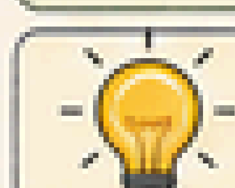
Bhaskara II
(1114–1185)

Em sua obra *Lilavati*, apresenotou problemas de permutação e combinação. Ex.: "De quantas maneiras podemos formar uma pulseira usando 8 tipos de joias?" – Base para o espaço amostral.

OUTRAS INFLUÊNCIAS IMPORTANTES

Essas contribuições mostram que o estudo do acaso, das combinações e dos dados não surgiu de um único lugar. Ele foi construído coletivamente por diferentes povos, com diferentes necessidades: linguagem, comércio, ciência, criptografia, poesia e muito mais.

Hoje, a compreensão de eventos independentes e dependentes está presente em diversas áreas: genética, epidemiologia, inteligência artificial, economia, finanças, meteorologia e muitas outras.



ENTENDER ESSA HISTÓRIA É COMPREENDER QUE A PROBABILIDADE NÃO É APENAS FÓRMULA, MAS UMA FORMA DE INTERPRETAR O MUNDO E TOMAR DECISÕES EM MEIO À INCERTEZA.

EXEMPLOS PARA A SALA DE AULA

- Dois dados lançados: eventos independentes.
- Cartas retiradas de um baralho sem reposição: eventos dependentes.
- Teste médico + sintomas: aplicação do Teorema de Bayes.

DESENVOLVIMENTO

Professor(a), para começar a aula, apresente a seguinte situação provocativa e depois lance uma questão desafiadora:

Se eu jogar um dado duas vezes, o resultado do primeiro lançamento interfere no segundo?
E se eu retirar uma ficha de uma sacola sem devolver, isso muda o próximo resultado?

Deixe que os(as) estudantes levantem hipósteses para essas questões. Se possível, anote as hipóteses levantadas pelos(as) estudantes no quadro e guarde essas falas para o fechamento.

Após o tempo destinado para as discussões iniciais, solicite aos(às) estudantes que formem grupos e entregue para cada componente uma ficha de investigação.

Além disso, cada grupo deve receber um kit para investigação formado por: 10 fichas coloridas (6 azuis e 4 vermelhas), 1 dado e 1 envelope.

Comece incentivando os(as) estudantes a registrarem suas hipóteses nas questões iniciais da ficha. Essas respostas serão fundamentais para confrontar os resultados obtidos e mediar o debate ao final da atividade. **Professor(a)**, é importante que, no momento inicial, nenhuma hipótese seja descartada como 'errada'. Lembre-se de que o objetivo da prática é justamente que o experimento funcione como o juiz que confirmará ou refutará o que foi pensado anteriormente, gerando um conflito cognitivo produtivo.

Após essa etapa inicial, cada grupo deverá realizar 20 lançamentos do dado, registrando cada resultado na ficha de investigação. A tabela está estruturada em 10 rodadas de dois lançamentos consecutivos. O objetivo é que, ao comparar esses pares de resultados, os(as) estudantes consigam identificar se o desfecho do primeiro lançamento interfere ou não no segundo, diferenciando eventos dependentes de independentes. Aqui, os(as) estudantes perceberão que o espaço amostral permanece idêntico a cada jogada. A probabilidade de sair o número 6 é sempre 1/6, independentemente do que saiu antes. Esse é o exemplo clássico de Eventos Independentes.

Para a segunda investigação, utilizaremos o envelope com as dez fichas. Os grupos realizarão 10 rodadas, cada uma composta por duas retiradas consecutivas sem reposição. Atenção: após registrar os resultados de uma rodada, as duas fichas retiradas devem retornar ao envelope antes de iniciar a próxima, garantindo que cada rodada comece com o mesmo total de fichas. Registre cada par de resultados na tabela de experimentos. Ao realizar a retirada sem reposição, o grupo perceberá uma alteração direta no espaço amostral. Se o total inicial era 10 e uma ficha azul foi removida, o novo espaço amostral passa a ser 9, com a quantidade de favoráveis reduzida. Essa interdependência entre as rodadas define o conceito de Eventos Dependentes: o 'passado' do experimento modifica as condições do seu 'presente'.

Para finalizar a tarefa, cada estudante deverá registrar, com suas próprias palavras, as definições de eventos independentes e eventos dependentes com base no que observaram. **Professor(a)**, este é o momento ideal para mediar as discussões, confrontando as hipóteses iniciais com os resultados experimentais. Utilize as falas dos(as) estudantes para sistematizar as noções trabalhadas, formalizando os conceitos e as propriedades probabilísticas exploradas durante a prática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E AVALIAÇÃO

Após a discussão, os(as) estudantes devem chegar à conclusão de que:

Eventos Independentes (Cenário A): A ocorrência de um não afeta a probabilidade do outro, ou seja, quando a ocorrência de um evento A não altera a probabilidade de um evento B.

- Exemplo: Lançar dados, moedas ou sorteios com reposição.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Eventos Dependentes (Cenário B): A ocorrência do primeiro altera o espaço amostral do segundo, ou seja, quando a ocorrência de A modifica o espaço amostral ou a probabilidade de B.

- Exemplo: Retirada de cartas de um baralho ou fichas de uma urna sem devolução.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Professor(a), você pode avaliar todo o processo de desenvolvimento da prática desde a interação entre os grupos até a compreensão das noções trabalhadas. Uma estratégia que pode ser utilizada é a análise dos registros nas fichas de investigação: observe se o(a) estudante consegue identificar a ruptura da constância no experimento sem reposição e se a sua conclusão final demonstra a compreensão de que a dependência está atrelada à modificação do espaço amostral. Essa avaliação permite identificar se o(a) estudante apenas seguiu o roteiro ou se, de fato, compreendeu a natureza aleatória e condicional dos eventos explorados.

🧪FICHA DO ESTUDANTE – Prática Experimental: Sorte ou Influência?

Habilidade: EF09MA20

Nome: ____

Turma: ___________ Data: ______ /_______/______

Levantamento de hipóteses: antes de iniciar os experimentos, responda:

1. Ao lançar um dado duas vezes, o primeiro resultado influencia o segundo?

( ) Sim ( ) Não

Por quê? ____

____

____

____

2. Ao retirar duas fichas de uma sacola sem reposição, o primeiro resultado influencia o segundo?

( ) Sim ( ) Não

Por quê? ____

____

____

____

3. Experimento 1 – Lançamento de dado (eventos independentes)

➡️ Lance o dado duas vezes e registre os resultados. Repita o mesmo processo por dez vezes.

Tentativa	**1º lançamento**	**2º lançamento**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Quantas vezes saíram dois números pares? _______________________________________

O primeiro lançamento influenciou o segundo?____________________________________

Experimento 2 – Retirada de fichas (Eventos Dependentes)
➡ Retire uma ficha e depois outra sem reposição e registre. Devolva as fichas para o envelope e repita o mesmo processo 10 vezes.

Tentativa	1º ficha	2º ficha
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Quantas vezes saíram duas fichas azuis? ______________________________

O primeiro lançamento influenciou o segundo?______________________________

4. Calculando as probabilidades:

a) Probabilidade de sair dois números pares ao lançar o dado duas vezes seguidas:

____

____

b) Probabilidade de retirar duas fichas azuis sem reposição:

____

____

c) Os resultados experimentais foram iguais aos cálculos? ( ) Sim ( ) Não

Se não foram iguais, por que isso pode ter acontecido? ______________________________

____

____

5. Complete:

a) Eventos independentes são aqueles em que: ______________________________

____

____

b) Eventos dependentes são aqueles em que:______________________________

____

____

1	2	1	2
1	2	1	2
1	2	1	2
1	2	1	2
1	2	1	2
1	2	1	2
1	2	1	2
1	2	1	2
1	2	1	2

JOGOS MATEMÁTICOS - QUEM CHEGA PRIMEIRO?

Habilidade: (EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Objeto de conhecimento: Cálculo de probabilidade e eventos independentes

Expectativas de aprendizagem:

- Calcular probabilidades em eventos indepedentes.
- Comparar resultados experimentais com resultados teóricos

Materiais necessários:

- 2 dados comuns por grupo ou dois para a turma;
- Fita colorida ou barbante.

OBJETIVO DA AULA

Compreender eventos independentes por meio de experimentos de amostragem.

DESENVOLVIMENTO

Professor(a), ao aplicar esta prática, intitulada *Quem chega primeiro?*, incentive que os(as) estudantes levantem hipóteses antes mesmo do primeiro lançamento de dados. Este jogo ajuda a demonstrar como eventos aleatórios independentes, quando somados, geram padrões previsíveis.
É comum que os(as) estudantes iniciem a atividade acreditando na equiprobabilidade (que todos terão a mesma chance). No entanto, a prática revelará que o(a) estudante que ficar na casa 7 cruzará a linha de chegada com muito mais frequência que os que ficarem nas casas 2 e 12. Utilize esse momento para explorar dois conceitos fundamentais:

- Eventos Independentes: O resultado obtido no Dado A não exerce influência sobre o resultado do Dado B.

- Espaço Amostral: Ao mapearem as 36 combinações possíveis, os(as) estudantes perceberão visualmente que existem 6 formas de obter a soma 7, enquanto há apenas 1 forma de obter a soma 2 (1+1).

A prática consiste em uma caminhada dos(as) estudantes: eles(as) irão se posicionar em um tabuleiro com 12 pistas. Serão jogados dois dados e o(a) estudante que estiver na casa com número igual à soma dos dados andará uma casa. Ganha a caminhada o(a) estudante que percorrer as 20 casas do tabuleiro primeiro.

Nessa proposta, você pode utilizar a lousa, o chão da sala ou até mesmo o pátio e a quadra como a pista.

- Preparação: Prepare o tabuleiro no chão da escola, no quadro ou no pátio e na quadra da escola. O tabuleiro é uma tabela de 13 linhas e 21 colunas (Anexo I).

- Desenvolvimento: Solicite que cada estudante escolha uma casa do tabuleiro de sua preferência. Alternadamente, os(as) estudantes lançam os dados; a soma dos valores indica o(a) estudante que avança uma casa no tabuleiro. Caso esteja utilizando o quadro, pode marcar com um X no tabuleiro as casas que saírem com a soma dos dados.

- Finalização: O jogo termina quando o(a) primeiro(a) estudante chegar à coluna "Fim". Vencem os(as) estudantes que escolheram a casa vitoriosa.

Após a finalização do jogo, sistematize os resultados no quadro, comparando as previsões iniciais feitas pelos(as) estudantes com a frequência real das vitórias.

Considerações finais:

Para encerrar a aula de forma que os(as) estudantes consigam conectar a experiência prática com o rigor matemático, propomos um fechamento focado na análise de dados e na formalização do espaço amostral. Professor(a), essa finalização pode se feita a partir de questionamentos, tais como:

- *O(a) estudante que venceu estava em qual casa?*
- *Por que alguns(mas) estudantes quase não saíram do lugar enquanto outros caminharam rapidamente?* Incentive que os(as) estudantes relatem suas percepções sobre a "sorte" *versus* a frequência dos resultados.
- *Alguém não andou? Quem? Por quê?* Fale sobre eventos impossíveis: o(a) estudante que estiver na casa 1 nunca irá andar, pois estamos utilizando dois dados, assim, a soma deles nunca será 1.

Peça que os(as) estudantes ajudem a preencher uma tabela de dupla entrada (6x6) no quadro, representando os dois dados. Ao somar os resultados de cada célula, os(as) estudantes visualizarão que com dois dados:

- Existem 36 combinações possíveis (Eventos Independentes).
- A soma 7 é a que mais tem possibilidades de ocorrer, com 6 combinações (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1).
- As somas 2 e 12 são as mais raras, com apenas 1 combinação cada.

Explique para os(as) estudantes que, embora cada lançamento de dado seja um evento independente (o resultado de um não muda o do outro), a soma desses eventos cria uma distribuição de probabilidades desigual.

- Mostre que a probabilidade de o(a) estudante da pista 7 avançar é de 6/36 (ou 1/6), enquanto a do(a) estudante da pista 2 é de apenas 1/36.

+	**1**	5	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4		6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Início	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Fim

REFERÊNCIAS

https://pt.khanacademy.org/math/statistics-probability/probability-library/conditional-probability-independence/a/check-independence-conditional-probability

https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/wp-content/uploads/2024/04/mat3seriesemana8120424.pdf

A Matemática pura é, à sua maneira,
a poesia das ideias lógicas.

Albert Einstein