SEDU 2026

Rotinas Pedagógicas Escolares

9º Ano

Segundo Trimestre

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Gerência de Currículo
da Educação Básica

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

Governador
RICARDO DE REZENDE FERRAÇO

Secretária de Estado da Educação
ANDRÉA GUZZO PEREIRA

Subsecretário da Educação Básica e Profissional
ANDRÉ MELOTTI ROCHA

Gerente de Currículo da Educação Básica
JOCILENE GADIOLI DE OLIVEIRA

Subgerente de Desenvolvimento Curricular da Educação Básica
KAYODÊ DAVID DE MELO SOUZA

Subgerente de Educação Ambiental
JÉSSICA AFLÁVIO DOS SANTOS

2026

Coordenadores do Componente Curricular
GABRIEL LUIZ SANTOS KACHEL
LAIANA MENEGUELLI
LEOVEGILDO IZIDORO PEREIRA NETO
LILIAN CRISTINA RODRIGUES SARMENTO
RAYANE SALVIANO DE OLIVEIRA SILVA
WELLINGTON ROSA DE AZEVEDO
WILLIAM MANTOVANI

Validadores das Rotinas Pedagógicas Escolares
JÉSSICA MONTEIRO FALQUETTO
THIAGO CÉZAR DE PÁDUA ROSA
CARLOS EDUARDO MORAES PIRES

Professores bolsistas responsáveis pela elaboração das Rotinas Pedagógicas Escolares

5º ano EF
FRANCIELY GOMES FAVERO FERREIRA
PAULA AVAREZ CABANÊZ

6º ano EF
KARLA SOUTO DE AMORIM
MAYARA DOS SANTOS ZANARDI

7º ano EF
DAVI MARCIO BERMUDES LINO
HELIONARDO THOMAZ ALVES LOURENÇO

8º ano EF
NAFTALY CRISTAL FÉLIX
FABIANA BUENO

9º ano EF
AMECKSON DE SOUZA FERREIRA
LILIAN CRISTINA RODRIGUES SARMENTO

Sumário

CAPÍTULO 4 - ESTATÍSTICA: ORGANIZAÇÃO, ANÁLISE E PESQUISA DE DADOS

CAPÍTULO 5 - PROBABILIDADE

CAPÍTULO 6 - FATORAÇÃO E PRODUTOS NOTÁVEIS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

CAPÍTULO 7 - SEMELHANÇA, RELAÇÕES MÉTRICAS E O TEOREMA DE PITÁGORAS

Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

SEDU 2026

Gerência de Currículo
da Educação Básica

Capítulo 4: Estatística: Organização, Análise e Pesquisa de Dados

Apresentação

Prezado(a) estudante,

Você já percebeu como os dados estão presentes no nosso dia a dia, em pesquisas, notícias, redes sociais e decisões importantes? Para compreendê-los, é fundamental aprender a organizar informações em tabelas de frequência e gráficos, que facilitam a visualização e a comparação dos dados, além de utilizar as medidas de tendência central, média, mediana e moda, para resumir e interpretar conjuntos de valores de forma representativa. O planejamento e a execução de uma pesquisa estatística, desde a definição do problema até a análise e comunicação dos resultados, contribuem para o desenvolvimento do pensamento crítico e para a compreensão da realidade por meio da estatística.

O que você vai estudar neste capítulo

Neste capítulo, você será convidado(a) a explorar situações do cotidiano por meio da Estatística, aprendendo a organizar dados em tabelas de frequência e representá-los por meio de gráficos, a interpretar e calcular medidas de tendência central, como média, mediana e moda, e a planejar e executar pesquisas estatísticas. Ao longo do estudo, você desenvolverá habilidades para coletar, analisar e interpretar dados, compreendendo melhor as informações presentes em pesquisas, notícias e diferentes contextos sociais.

Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- Determinar os indivíduos (universo ou população-alvo da pesquisa), as variáveis e os tipos de variáveis (quantitativas ou categóricas) de acordo com o tema da pesquisa;
- Organizar dados em tabelas de frequência;
- Organizar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que elas resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões;

- Conhecer gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados;
- Escolher e construir o gráfico mais adequado para representar um conjunto de dados;
- Utilizar informações apresentadas em tabelas ou gráficos na resolução de problemas;
- Calcular os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média aritmética simples, moda ou mediana);
- Interpretar o significado das medidas de tendência central (média aritmética simples, moda e mediana) ou da amplitude;
- Planejar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social;
- Determinar os indivíduos (universo ou população-alvo da pesquisa), as variáveis e os tipos de variáveis (quantitativas ou categóricas) de acordo com o tema da pesquisa;
- Coletar dados relevantes para investigação sobre o tema da pesquisa;
- Escolher e construir o gráfico mais adequado para representar um conjunto de dados;
- Calcular e interpretar os valores de medidas de tendência central da pesquisa estatística (média aritmética simples, moda ou mediana);
- Comunicar os resultados da pesquisa estatística por meio de relatório;
- Conhecer ambientes digitais que apoiem o planejamento e execução de pesquisa estatística;
- Conhecer ambientes digitais que contribuam para a visualização de dados.

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

PESQUISA ESTATÍSTICA

A estatística está presente em nosso dia a dia muito mais do que imaginamos. Sempre que buscamos informações sobre a realidade que nos cerca, estamos lidando com dados que podem ser organizados e interpretados. Pesquisas de opinião, levantamentos sobre hábitos da população, resultados de eleições ou até mesmo informações coletadas dentro da escola são exemplos do uso da estatística. Quando fazemos uma pesquisa, o objetivo é transformar perguntas em informações que possam ser compreendidas por meio de números, tabelas e gráficos.

Uma pesquisa amostral é um tipo de pesquisa em que não se coleta informação de todos os indivíduos de um grupo, mas apenas de uma parte dele, chamada de amostra. Essa amostra deve ser escolhida de forma que represente bem o conjunto total de pessoas ou elementos, que chamamos de população-alvo ou universo da pesquisa.

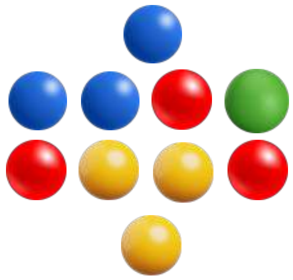


Imagem produzida no Canva

População

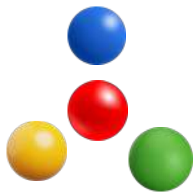


Imagem produzida no Canva

Amostra

Dando continuidade ao estudo sobre pesquisa amostral, após compreender a diferença entre população e amostra, é importante entender também o que são as variáveis, pois são elas que determinam as informações que serão coletadas. Toda pesquisa precisa ter clareza sobre quais características ou aspectos dos indivíduos serão observados. Essas características recebem o nome de variáveis e podem se apresentar de diferentes formas, dependendo do tipo de dado que expressam. As variáveis podem ser classificadas em **quantitativas** ou **qualitativas**.

As **variáveis quantitativas** são aquelas que podem ser medidas ou contadas, expressando resultados em números. Elas se dividem em dois tipos: discretas, quando os valores são números inteiros, como a quantidade de irmãos ou o número de livros lidos no último semestre; e contínuas, quando admitem valores em intervalos, como altura, peso ou tempo de estudo, que podem ser expressos em números decimais.

Já as **variáveis qualitativas**, não são expressas em números, mas em categorias ou grupos. Elas indicam características, preferências ou classificações. Por exemplo: o esporte preferido dos alunos, a cor favorita, o bairro onde moram ou o meio de transporte usado para chegar à escola.

Etapas de uma pesquisa estatística

Para que uma pesquisa estatística seja realizada de forma clara e organizada, é fundamental seguir algumas etapas. Esse planejamento prévio ajuda a prever os recursos que serão necessários, as possíveis dificuldades e as alternativas para solucioná-las.

1ª etapa – Planejamento
A primeira etapa corresponde à preparação da pesquisa. É o momento de decidir se o estudo será do tipo censitário, quando todos os elementos da população são analisados, ou amostral, quando apenas uma parte representativa é observada. Também é necessário definir o tema da investigação, as variáveis que serão estudadas, o tamanho da população ou da amostra, os critérios para a escolha dos participantes, além do local, período de realização e materiais que serão utilizados.

2ª etapa – Coleta de dados
Após o planejamento, inicia-se a fase de coleta. Nesse momento, aplica-se o instrumento de pesquisa, como questionários ou entrevistas, aos indivíduos escolhidos. É essencial registrar cada resposta com atenção, para que nenhuma informação seja perdida ou anotada de forma incorreta.

3ª etapa – Organização dos dados
Depois de coletar as informações, é necessário organizá-las para facilitar a compreensão. Essa organização pode ser feita por meio de listas, tabelas ou gráficos. A escolha da forma de apresentação depende do tipo de dado obtido e do objetivo da pesquisa. Podem ser utilizadas tabelas simples, de dupla entrada ou de distribuição, além de gráficos variados, como de colunas, barras, setores, linhas, histogramas ou pictogramas.

4ª etapa – Análise e interpretação
Com os dados já organizados, passa-se à análise. É nessa fase que se busca entender o que os números realmente significam. Podem ser calculadas medidas estatísticas como média, moda, mediana e amplitude, que ajudam a identificar padrões, tendências e características do conjunto estudado. Essa interpretação possibilita conclusões mais seguras e próximas da realidade.

TABELA DE FREQUÊNCIAS

A tabela que apresenta uma variável, seus possíveis valores e as respectivas frequências absoluta (FA) e relativa (FR) é chamada de tabela de frequências.
A seguir, organizamos os dados de um exemplo nesse tipo de tabela:

Suponha que queremos analisar quantos gols as seleções campeãs marcaram nas 22 finais da Copa do Mundo realizadas até 2022. A partir dos dados históricos, podemos organizar essas informações em uma tabela de frequências que apresenta:

- A quantidade de gols (variável estudada)
- Quantas vezes cada quantidade ocorreu (frequência absoluta - FA)
- A proporção que essa frequência representa no total (frequência relativa - FR).

Gols marcados	FA (Frequência Absoluta)	FR (Frequência Relativa)
0	1	0,0455 (4,55%)
1	5	0,227 (22,7%)
2	4	0,182 (18,2%)
3	6	0,273 (27,3%)
4	5	0,227 (22,7%)
5	1	0,0455 (4,55%)
Total	22	1,00 (100%)

Neste caso, foram analisadas 22 finais da Copa do Mundo realizadas até 2022, considerando os gols marcados pelas seleções campeãs. O resultado mais frequente foi 3 gols, ocorrido em 6 finais (27,3%).
Em cerca de 70% das finais, o campeão marcou entre 2 e 4 gols. Houve também uma final em que a seleção campeã não marcou gols no tempo regulamentar, vencendo a partida nos pênaltis.
A tabela evidencia padrões nos resultados, destacando os valores mais frequentes e facilitando a análise dos dados.

Uma **tabela de frequências** organiza os valores de uma variável e suas ocorrências em frequência absoluta (FA) e relativa (FR).

Tabela de Frequências por Classes

Considere a tabela abaixo, que apresenta as alturas e as idades de 26 jogadores da Seleção Brasileira:

Jogador	Altura (m)	Idade (anos)
Alisson	1,93	33
Ederson	1,88	32
Bento	1,9	26
Marquinhos	1,83	31
Danilo	1,84	34
Bremer	1,88	29
Gabriel Magalhães	1,9	28
Fabinho	1,88	32
Rayan	1,87	19
Douglas Santos	1,73	32
Wesley	1,73	22
Raphinha	1,76	29
Andrey Santos	1,8	22
Bruno Guimarães	1,82	28
Vinícius Júnior	1,76	25
Endrick	1,73	19
Igor Thiago	1,9	24
Casemiro	1,85	34
Gabriel Sara	1,77	26
Richarlison	1,84	28
Matheus Cunha	1,83	26
João Pedro	1,86	24
Gabriel Martinelli	1,78	24
Roger Ibanez	1,86	27
Léo Pereira	1,89	30
Kaiki Bruno	1,72	23

Para elaborar as tabelas de frequências das variáveis altura e idade, organizamos os dados em grupos. Para cada grupo, identificamos o número de ocorrências (frequência absoluta – FA) e a proporção que esse valor representa em relação ao total (frequência relativa – FR), que pode ser expressa em forma de fração ou porcentagem.

Exemplo: **Idade de um grupo de jogadores**

Para o agrupamento em intervalos de classes, calculamos primeiro a **amplitude** total: a diferença entre a idade máxima (34) e a mínima (19), resultando em 15 anos. Para facilitar os cálculos, vamos considerar que seja 16. Esse valor é dividido em 4 classes de mesma largura (4 anos cada). Com os intervalos definidos, contamos quantos jogadores pertencem a cada faixa (FA) e determinamos sua respectiva porcentagem (FR).

Classe de idade (anos)	Contagem	FA	FR (fração)	FR (%)
19 ├ 23	⚽⚽⚽⚽	4	4/26	15,39%
23 ├ 27	⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽	8	8/26	30,77%
27 ├ 31	⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽	7	7/26	26,92%
31 ├┤ 34	⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽	7	7/26	26,92%
Total	—	**26**	**1**	**100%**

O símbolo ├ é utilizado para representar um intervalo fechado à esquerda e aberto à direita. Por exemplo: o intervalo 19 ├ 23 abrange todos os valores maiores ou iguais a 19 e menores que 23. Ou seja, inclui o valor à esquerda e exclui o valor à direita.

O símbolo ├┤ representa um intervalo fechado em ambos os extremos. Por exemplo: o intervalo ├┤ inclui tanto o valor inicial (31) quanto o valor final (34).

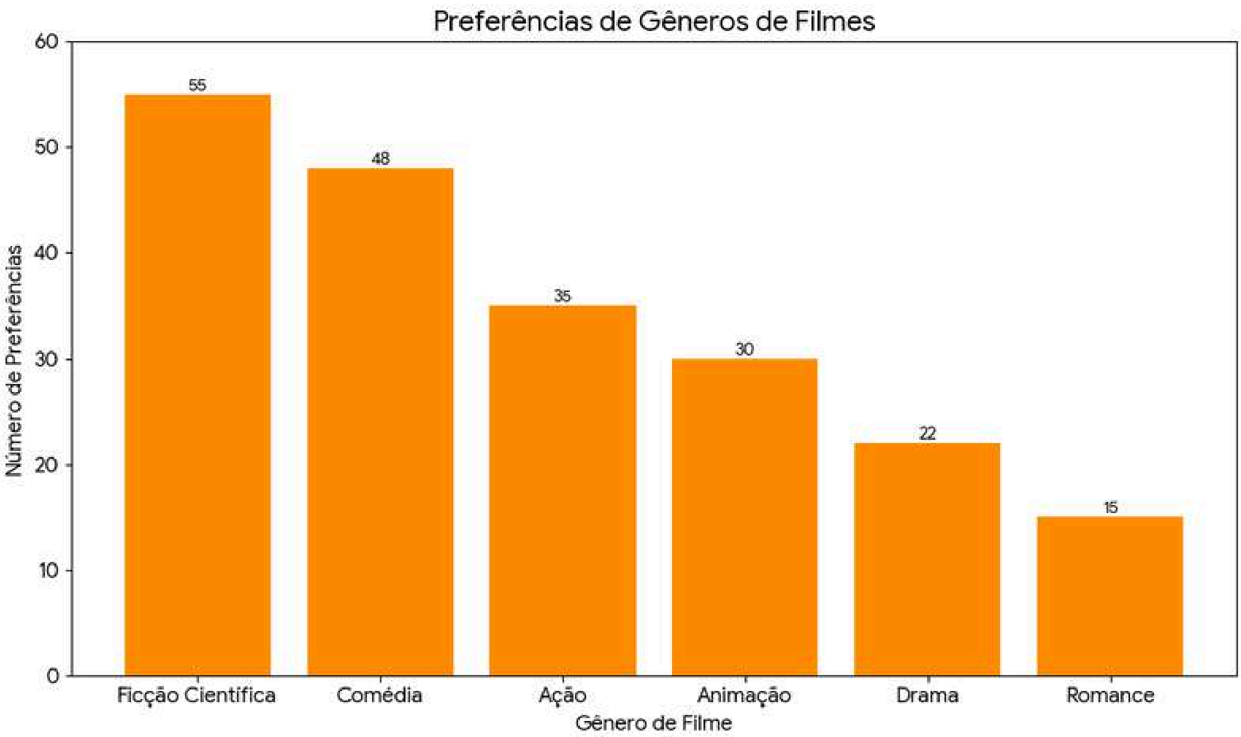
Altura dos jogadores (em classes)

Classe de altura (m)	Contagem	FA	FR (fração)	FR (%)
1,70 ├ 1,75	⚽⚽⚽⚽	4	4/26	15,39%
1,75 ├ 1,80	⚽⚽⚽⚽	4	4/26	15,39%
1,80 ├ 1,85	⚽⚽⚽⚽⚽⚽	6	6/26	23,07%
1,85 ├ 1,90	⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽⚽	8	8/26	30,76%
1,90 ├ 1,95	⚽⚽⚽⚽	4	4/26	15,39%
Total	26	**26**	**1**	**100%**

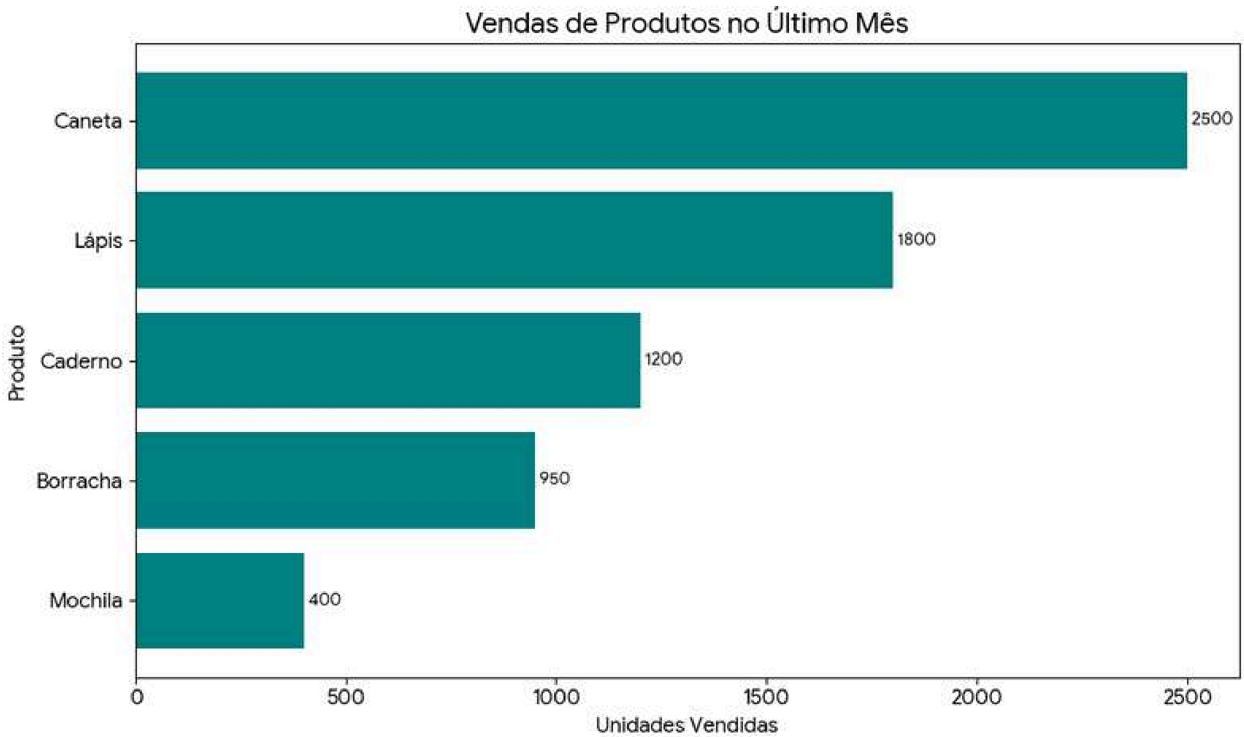
TIPOS DE GRÁFICOS

Depois de coletar e organizar os dados em tabelas, é importante apresentá-los de forma visual, para que a interpretação seja mais rápida e clara. Os gráficos cumprem exatamente esse papel: transformar números em imagens que facilitam a comparação e a análise. Cada tipo de gráfico tem uma função específica e deve ser escolhido de acordo com o tipo de variável estudada e com o objetivo da pesquisa.

O **gráfico de colunas** apresenta as informações por meio de colunas dispostas na posição vertical. A altura de cada coluna representa a frequência (ou seja, a quantidade observada) em cada categoria. Esse tipo de gráfico é muito útil quando queremos comparar grupos diferentes e visualizar rapidamente qual tem maior ou menor valor. Um exemplo seria ilustrar a preferência por gêneros de filmes, mostrando no eixo horizontal as categorias (ficção científica, comédia, ação, animação, drama, romance) e, no eixo vertical, a quantidade de pessoas que escolheram cada uma delas.

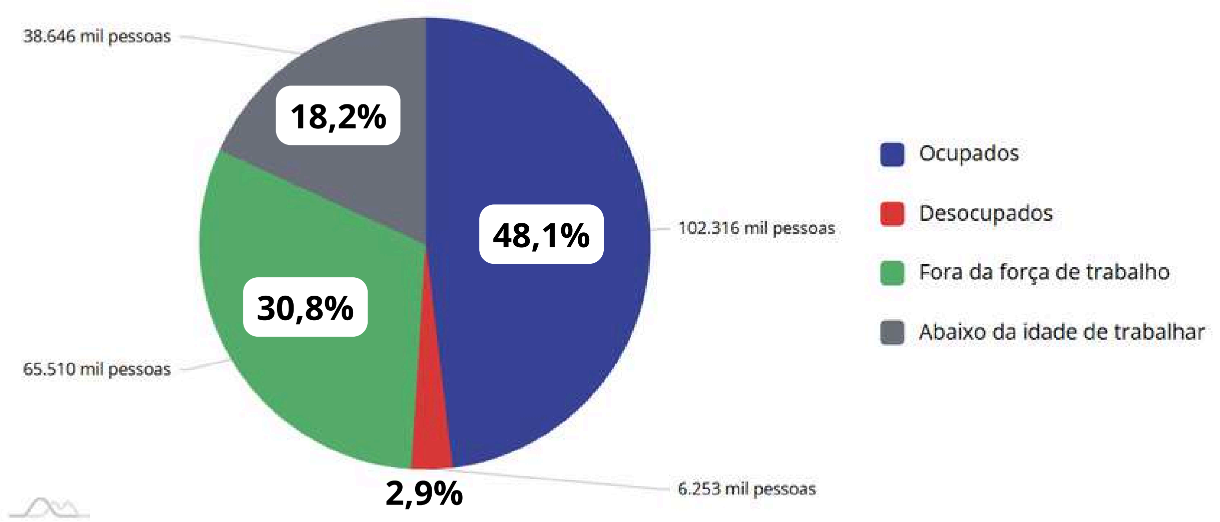


Já o **gráfico de barras** utiliza retângulos na posição horizontal, em vez de vertical. A leitura é feita observando-se o comprimento de cada barra, que indica a frequência. Esse formato é especialmente útil quando os nomes das categorias são grandes, pois facilita a visualização. Por exemplo, se quisermos mostrar a quantidade de produtos vendidos no último mês (canetas, lápis, cadernos, borrachas e mochilas), as barras horizontais deixam o gráfico mais claro e fácil de interpretar, pois indicam visualmente o número de unidades vendidas de cada item.



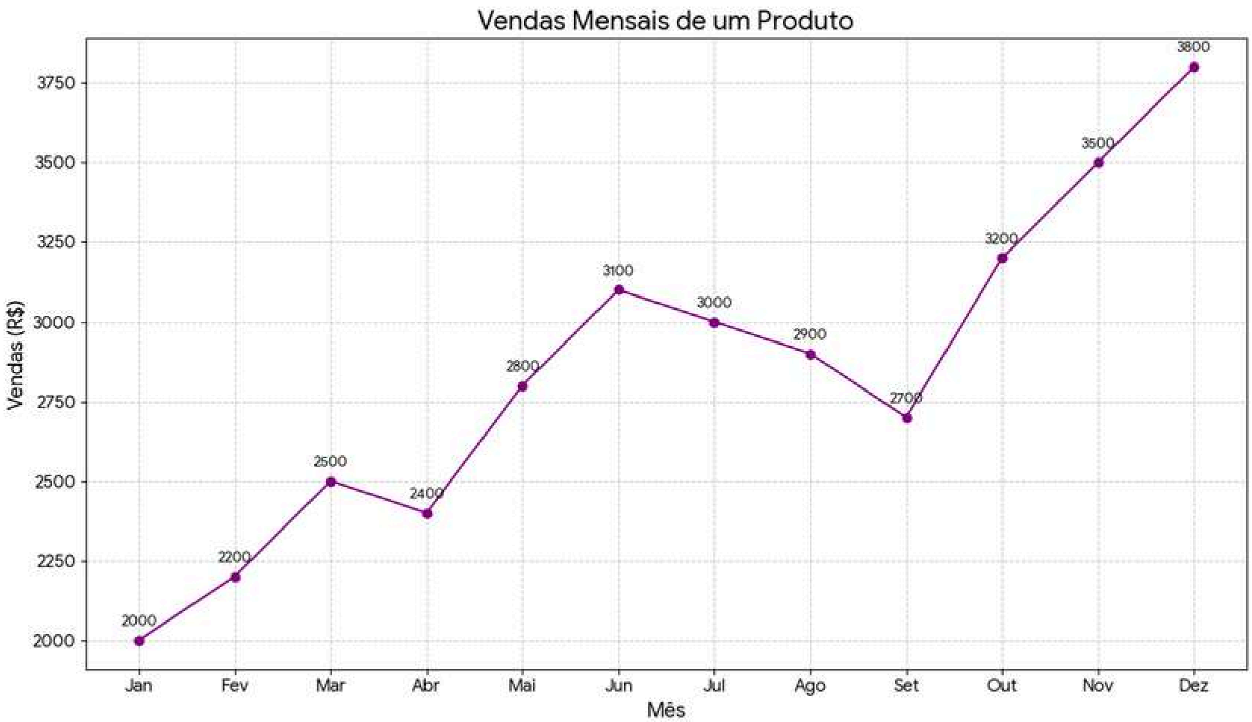
O **gráfico de setores** mostra como cada parte se relaciona com o todo. Nesse gráfico, um círculo é dividido em setores proporcionais às porcentagens observadas em cada categoria. É muito útil quando se deseja destacar a participação relativa de cada grupo dentro do total pesquisado. Por exemplo, podemos representar a distribuição da população brasileira, no 2º trimestre de 2025, de acordo com a situação no mercado de trabalho: 48,1% ocupados, 2,9% desocupados, 30,8% fora da força de trabalho e 18,2% abaixo da idade de trabalhar.

População brasileira, de acordo com as divisões do mercado de trabalho, 2º trimestre 2025



Fonte: https://www.ibge.gov.br/explica/desemprego.php

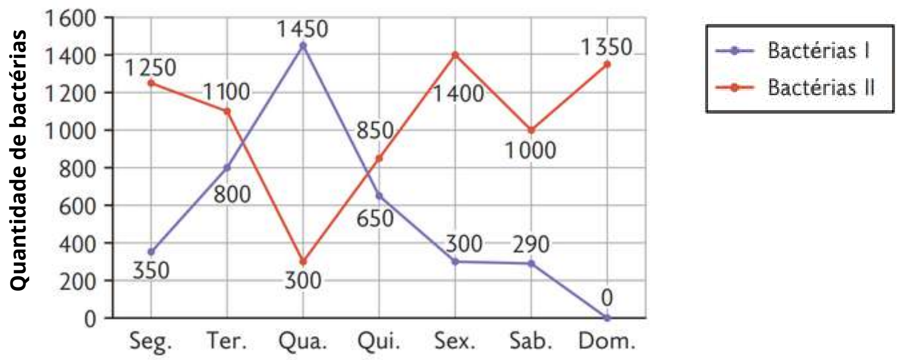
Já o **gráfico de linhas** é indicado para representar dados que mudam ao longo do tempo, permitindo observar tendências de crescimento ou diminuição. Nesse caso, marcamos pontos correspondentes aos valores de cada período e os ligamos com segmentos de reta. Esse tipo de gráfico é muito usado em situações como o acompanhamento da temperatura ao longo dos dias, o crescimento de uma população em diferentes anos ou a variação das notas de uma turma ao longo dos bimestres.



Exercícios Resolvidos

1) Em um laboratório de cultivo, um pesquisador iniciou o crescimento de bactérias das espécies I e II. Observe o gráfico a seguir, que mostra a quantidade dessas bactérias ao longo dos dias, durante a primeira semana de janeiro de 2023. Em qual dia dessa semana foi registrado o maior número total de bactérias?

Bactérias das espécies I e II - primeira semana do mês de janeiro de 2023



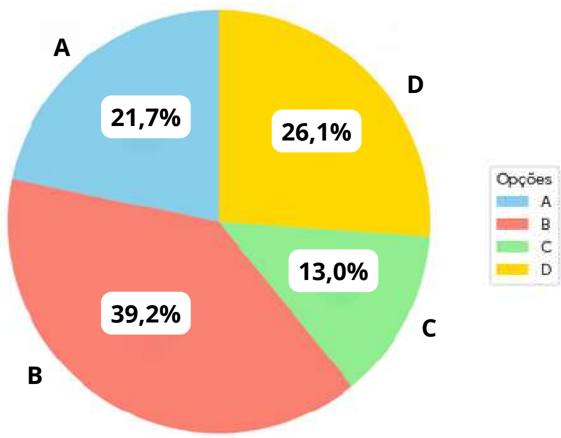
Fonte: Teixeira (2022).

RESOLUÇÃO:

Para identificar em qual dia da semana houve a maior quantidade de bactérias no ambiente de cultivo, não basta observar cada espécie separadamente. É necessário somar o número de bactérias da espécie I com o número da espécie II, obtendo assim o total de micro-organismos presentes em cada dia. Ao realizar essa soma, percebe-se que o dia com a maior quantidade de bactérias é a terça-feira, já que nesse dia a soma das duas espécies alcançou o valor mais elevado da semana.

2) Com base no gráfico de setores que mostra o resultado de uma votação, qual das opções recebeu a maior quantidade de votos? Se os candidatos A e D se unirem em uma frente única para disputar o segundo turno da eleição, é garantido que eles vencerão? Justifique sua resposta utilizando os valores do gráfico.

Resultado da votação



RESOLUÇÃO:

A justificativa da vitória da Opção B é que ela obteve o maior número de votos entre todas as opções. A Opção B conquistou a maior parte do total, o que é visualmente representado pela maior fatia do gráfico de setores, correspondendo a 39,2% do resultado total da votação.

Mesmo com a união de A e D, que totalizam 47,8%, não é garantida a vitória.

3) Em uma turma com 38 alunos, foi realizada uma eleição para escolher o(a) líder da classe. Os resultados foram:

- Candidato A: 10 votos;
- Candidato B: 14 votos;
- Candidato C: 9 votos;
- Branco e nulos (BN): 5 votos.

Os dados da eleição precisam ser organizados e representados para facilitar a análise dos resultados.

a) Monte uma tabela de frequências simples, indicando as opções de voto e a quantidade de votos.

b) Confira se o total de votos corresponde ao número de alunos da turma.

c) Qual candidato foi o mais votado?

d) Qual opção recebeu o menor número de votos?

e) Construa um gráfico de barras no caderno com as seguintes características:

- Eixo horizontal: candidatos (opções de voto);
- Eixo vertical: número de votos;
- Título: "Eleição de líder de turma".

f) Com base no gráfico, responda:

- Qual barra é a mais alta? O que isso indica?
- O gráfico facilita a comparação dos votos? Explique.
- Seria possível chegar às mesmas conclusões sem o gráfico? Justifique.

g) Calcule a frequência relativa dos votos de cada opção, considerando uma casa decimal.

RESOLUÇÃO

a)

Candidato	Votos
A	10
B	14
C	9
BN	5

b) Sim, o total de votos é 10 + 14 + 9 + 5 = 38, que corresponde ao número de alunos da turma.

c) O candidato mais votado foi o Candidato B, com 14 votos.

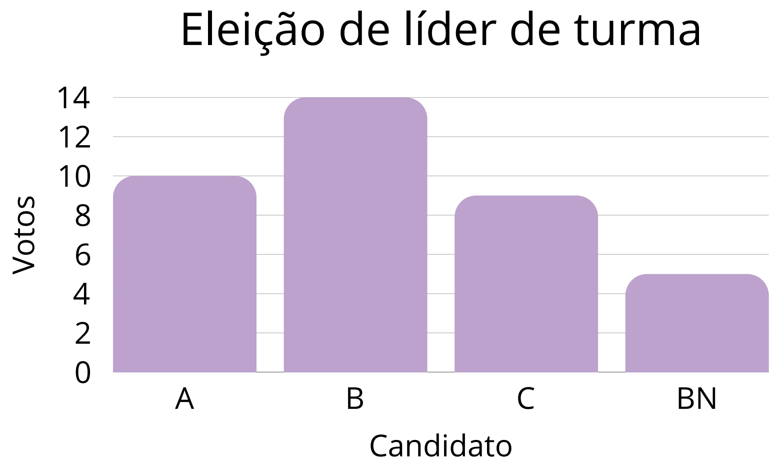
d) d) A opção com menor número de votos foi Branco e nulos (BN), com 5 votos.

e) (Gráfico de barras)

O gráfico deve apresentar:

- eixo horizontal com as opções (A, B, C, BN);
- eixo vertical com a quantidade de votos;

- barras com alturas 10, 14, 9 e 5;
- título: Eleição de líder de turma.



f)

- A barra mais alta é a do Candidato B, indicando que foi o mais votado.
- Sim, o gráfico facilita a comparação, pois permite visualizar rapidamente as diferenças entre as quantidades de votos.
- Sim, seria possível chegar às mesmas conclusões apenas com os números, mas o gráfico torna a análise mais rápida e visual.

g) Frequência relativa (em porcentagem)

- Candidato A: 10/38 ≈ 26,3%
- Candidato B: 14/38 ≈ 36,8%
- Candidato C: 9/38 ≈ 23,7%
- Branco e nulos: 5/38 ≈ 13,2%
- (Soma ≈ 100%)

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

As medidas de tendência central são ferramentas estatísticas usadas para identificar um valor que represente, de forma resumida, um conjunto de dados. Elas indicam qual é o "centro" ou o valor mais característico desses dados, ajudando a compreender rapidamente onde eles se concentram. As principais são: média aritmética, moda e mediana.

Média Aritmética (ou simplesmente Média)

A média aritmética de um conjunto de valores é o quociente entre a soma dos valores e a quantidade de valores do conjunto. Para encontrar a média, somamos todos os valores e dividimos pelo número de elementos. É uma ferramenta muito útil para resumir informações, como notas, preços ou temperaturas, de forma simples e representativa.

Por exemplo, em Venda Nova do Imigrante (ES), município localizado na região serrana, as temperaturas de inverno costumam ser mais amenas do que nas áreas litorâneas. Vamos supor que, em uma semana de inverno, as temperaturas mínimas diárias tenham sido as seguintes (°C): 16, 15, 14, 15, 17.

$$\text{Média} = \frac{16+15+14+15+17}{5} = \frac{77}{5} = 15,4\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

Essa média de 15,4 °C está de acordo com o clima mais fresco característico da serra capixaba. Agora imagine que, após esses cinco dias, foram registrados mais três dias com temperaturas mínimas de 14 °C, 15 °C e 16 °C. A nova média para os 8 dias seria:

$$\text{Média} = \frac{16+15+14+15+17+14+15+16}{8} = \frac{122}{8} = 15,25\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

A média aritmética é uma maneira eficiente de resumir informações e identificar padrões em um conjunto de dados.

Moda

A moda de um conjunto de valores é o número que aparece com maior frequência. Ela nos mostra qual valor é o mais comum, o mais repetido em um conjunto de dados. Por isso, a moda é bastante útil em situações do dia a dia em que queremos identificar a preferência ou a ocorrência mais frequente de algo.
Um exemplo simples é em uma pesquisa sobre as cores favoritas de uma turma: se 12 alunos escolherem a cor azul, 8 a cor vermelha e 5 a cor verde, a moda é azul, pois foi a cor mais citada.

É importante destacar que nem todo conjunto de dados terá uma moda única. Em alguns casos, pode haver:

- Bimodal: quando existem duas modas, ou seja, dois valores aparecem com a mesma maior frequência. Exemplo: no conjunto {2, 2, 4, 4, 5}, as modas são 2 e 4.
- Multimodal: quando existem três ou mais modas, pois três ou mais valores aparecem com a mesma maior frequência. Exemplo: no conjunto {6, 6, 8, 8, 10, 10}, as modas são 6, 8 e 10.
- Amodal: quando não existe moda, isto é, quando nenhum valor se repete. Exemplo: no conjunto {1, 2, 3, 4, 5}, todos os números aparecem apenas uma vez, logo não há moda.

Mediana

A mediana é a medida de tendência central que representa o valor que ocupa a posição central de um conjunto de dados quando eles estão organizados em ordem crescente ou decrescente. Ela divide os dados em duas partes: metade dos valores ficam abaixo da mediana e metade ficam acima.

- Se o conjunto tiver uma quantidade ímpar de valores, a mediana será o número que está exatamente no meio.

  Exemplo: Para compreender a mediana, vamos usar as temperaturas mínimas registradas em Venda Nova do Imigrante. No primeiro caso, temos os valores 16°C, 15°C, 14°C, 15°C e 17°C. Organizando em ordem crescente, obtemos 14°C, 15°C, 15°C, 16°C e 17°C. Como há cinco dados (quantidade ímpar), a mediana é o valor central, ou seja, 15 °C.

- Se o conjunto tiver uma quantidade par de valores, a mediana será a média aritmética dos dois valores centrais.

Exemplo: No segundo caso, acrescentamos mais três dias: 16°C, 15°C e 14°C, totalizando oito valores. Em ordem crescente, ficam 14°C, 14°C, 15°C, 15°C, 15°C, 16°C, 16°C e 17°C. Como há oito dados (quantidade par), a mediana é a média dos dois valores centrais, que são 15 e 15. Assim, a mediana é 15°C, pois:

$$\frac{15+15}{2}=15$$

A mediana é bastante útil em situações em que queremos um valor que não seja tão influenciado por valores muito altos ou muito baixos (chamados de extremos). Por exemplo, se em uma turma a maioria dos alunos tirou notas entre 6 e 8, mas um aluno tirou 0 e outro tirou 10, a média pode ser bastante alterada, enquanto a mediana continua representando melhor a posição central dos dados.

AMPLITUDE

Em um grupo de amigos, foi pesquisado o número de horas que cada um joga videogame por dia:

- **Grupo A:** 1, 4, 3, 3, 7 (horas)
- **Grupo B:** 2, 3, 3, 4, 6 (horas)

Média do Grupo A: $\frac{1+4+3+3+7}{5} = \frac{18}{5} = 3,6$

Média do Grupo B: $\frac{2+3+3+4+6}{5} = \frac{18}{5} = 3,6$

- Moda do Grupo A: 3.
- Moda do Grupo B: 3.
- Mediana do Grupo A: 3.
- Mediana do Grupo B: 3.

Ao observar os cálculos acima, notamos que: a média, a moda e a mediana são iguais para ambos os grupos (3,6; 3; e 3, respectivamente). No entanto, os grupos não se comportam da mesma forma. É aqui que a amplitude nos ajuda a ver a diferença real.

A **amplitude** de um conjunto de valores é calculada fazendo a **diferença** entre o maior valor e o menor valor observados.

Grupo A

- Maior valor: 7
- Menor valor: 1

Amplitude: 7 − 1 = 6

Grupo B

- Maior valor: 6
- Menor valor: 2

Amplitude: 6 − 2 = 4

Podemos dizer que, quanto menor a amplitude dos dados, mais próximos eles estarão da média, da moda e da mediana.

Isso quer dizer que os valores do grupo A ficaram mais afastados entre si do que os do **Grupo B**, ou seja, os valores do **Grupo B** estão mais próximos das medidas calculadas.
Em outras palavras:

- No grupo A, há maior diferença entre quem joga pouco e quem joga muito.
- No grupo B, os amigos jogam tempos mais parecidos.

Por isso, dizemos que o grupo A é mais disperso, e o grupo B é mais concentrado.

Em uma sequência de jogos da Seleção Brasileira Feminina de Futebol, foram registrados os seguintes números de gols por partida:

0 — 2 — 1 — 3 — 2 — 4 — 1

Como a amplitude é a diferença entre o maior e o menor valor registrado, temos: **amplitude total é: 4 - 0 = 4 gols.**
Isso indica que a variação entre o desempenho mínimo e o máximo da equipe, nesse conjunto de jogos, foi de 4 gols.

1) A fatura de energia elétrica de uma residência apresenta o consumo mensal (em kWh) durante os cinco primeiros meses de 2026:

Mês	Consumo (kWh)
Janeiro	180
Fevereiro	220
Março	200
Abril	260
Maio	240

Com base nesses dados, responda:
a) Qual foi o consumo médio mensal de energia elétrica dessa residência no período analisado?
b) Determine a mediana dos consumos mensais.
c) Existe moda nesses dados? Justifique sua resposta.
d) Calcule a amplitude do consumo de energia elétrica no período.

RESOLUÇÃO
a)
$MA = \frac{180 + 220 + 200 + 260 + 240}{5} = \frac{1\ 100}{5} = 220$ → **média do consumo é 220 kWh.**

b) A mediana é o valor que fica no meio, depois que os dados são colocados em ordem crescente ou decrescente.
Passo 1 - organizar os dados (Rol): 180, 200, 220, 240, 260.
Passo 2 - identificar o valor central. Como temos 5 valores, o número que fica no meio é o 3º valor: 180, 200, **220**, 240, 260
Resposta: A mediana é 220 kWh.

c) Não existe moda, porque todos os valores aparecem uma única vez.

d) A amplitude é a diferença entre o maior e o menor valor.
Passo 1 - identificar o maior valor: Maior consumo: 260 kWh
Passo 2 - identificar o menor valor: Menor consumo: 180 kWh
Passo 3 - fazer a subtração: 260−180=80
Resposta: A amplitude é 80 kWh.

2) A tabela apresenta a produção (em toneladas) de diferentes culturas permanentes no Espírito Santo, distribuídas pelas regiões do estado.

a) Calcule a média da produção de banana entre as quatro regiões do estado.
b) Compare o valor obtido da média com a produção da região Central. A região Central produziu mais ou menos que a média? Explique.
c) Se desconsiderássemos a produção da região Central, como a nova média entre as três regiões restantes (Noroeste, Litoral Norte e Sul) se compararia à primeira média calculada?

Produção, em toneladas, de culturas permanentes por mesorregião no ES

CULTURAS PERMANENTES	Noroeste	Litoral Norte	Central	Sul
Café (em grão) conilon	278.917	238.111	99.868	67.270
Mamão	34.611	401.087	2.785	1.067
Banana (cacho)	39.721	58.506	287.370	27.087
Café (em grão) arábica	8.921	43	61.750	84.824
Coco-da-baía*	29.275	110.101	2.710	2.172
Pimenta-do-reino	19.040	52.721	285	38
Tangerina	40	1.635	27.522	1.135
Laranja	2.269	5.746	6.064	6.094
Limão	394	12.829	5.804	741
Maracujá	1.938	9.752	2.791	966
Borracha (látex coagulado)	1.134	7.136	5.453	839
Manga	8.313	193	3.448	511
Abacate	-	-	9.319	2.338
Cacau (em amêndoa)	1.586	9.659	293	6
Aroeira*	800	670	500	500

Fonte: IBGE-PAM, 2021; * COOPBAC, 2022. Disponível em: https://seag.es.gov.br/Media/Seag/Documentos/Plano_ABC_ES_2020_2030.pdf

RESOLUÇÃO:
Primeiro, para encontrar a média da produção entre as quatro regiões, somamos os valores e dividimos por quatro. Esse resultado nos dará uma visão equilibrada da produção, considerando todas as regiões. Depois encontraremos a média desconsiderando a região central.

$$\mathrm{Ma}_1 = \frac{39721 + 58506 + 287370 + 27087}{4} = \frac{412684}{4} = 103171 \text{ t}$$

$$\mathrm{Ma}_2 = \frac{39721 + 58506 + 27087}{3} = \frac{125314}{3} = 41771,33 \text{ t}$$

a) A média da produção de banana entre as quatro regiões é 103.171 toneladas.
b) A região Central produziu bem mais do que a média, com 287.370 toneladas.
c) Ao desconsiderar a região Central, a média cai para aproximadamente 41.771 toneladas, mostrando como a produção da região Central eleva significativamente a média estadual.

3) Uma professora registrou o tempo (em minutos) que cada aluno de uma turma levou para concluir uma atividade avaliativa. Os resultados estão apresentados na tabela:

Tempo (min)	Número de alunos
20	6
25	8
35	3
40	2
115	1

Com base nesses dados:

a) Calcule a média, a mediana e a moda do tempo gasto pelos alunos.
b) Um aluno afirmou: "*A média representa bem o tempo que a turma levou para fazer a atividade.*" Você concorda? Justifique.
c) Qual medida de tendência central você considera mais adequada para representar esse conjunto de dados? Explique.

RESOLUÇÃO:

Total de alunos:
6 + 8 + 3 + 2 + 1 = 20 alunos.

a)

$$\text{Média} = \frac{(20 \times 6) + (25 \times 8) + (35 \times 3) + (40 \times 2) + (115 \times 1)}{20}$$

$$= \frac{120 + 200 + 105 + 80 + 115}{20} = \frac{620}{20} = 31$$

Mediana (valor central)

Como há 20 alunos, a mediana é a média entre o 10º e o 11º valores:

- 20 min → posições 1 a 6
- 25 min → posições 7 a 14

Logo, o 10º e o 11º valores são, ambos, 25 → **Mediana = 25.**

Moda (valor mais frequente)
Valor que mais se repete: 25 minutos
Neste caso, 25 minutos foi o tempo que mais alunos gastaram para concluir a atividade.

b) Embora a média seja 31 minutos, ela não representa bem a turma, pois quase ninguém levou esse tempo para terminar a atividade. A maioria dos alunos gastou 20 ou 25 minutos. Isso acontece porque um aluno levou 115 minutos, um valor muito alto que "puxa" a média para cima, distorcendo o resultado.

c) **Escolha da medida mais adequada**
A mediana (25 minutos) é a medida mais adequada.
Isso porque:

- ela representa melhor o tempo da maioria dos alunos;
- não é influenciada pelo valor extremo (115 minutos).

Assim, se quisermos descrever o tempo típico da turma, **nesse caso**, a mediana é a melhor escolha.

Prezado(a) Professor(a), ao trabalhar este problema, é importante chamar a atenção dos alunos para uma ideia importante: **nem sempre a média é a melhor medida para representar um conjunto de dados.**
No caso que analisamos, embora a média seja 31 minutos, ela é influenciada por um valor extremo (115 minutos), o que a torna pouco representativa do comportamento da maioria da turma. A mediana, por outro lado, descreve melhor o tempo típico dos alunos.
Esse tipo de discussão contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e da leitura significativa de dados.

Material Extra

VÍDEO

Introdução à Estatística
https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=64

Atividades

ATIVIDADE 1

Leitura de dados e construção de gráfico de barras
Observe a tabela a seguir, que apresenta a quantidade de jogadores por posição:

Posição	Quantidade
Goleiro	3
Zagueiro	4
Lateral	3
Meio-campo	4
Atacante	7

a) Qual é a posição com maior número de jogadores?
b) Quais posições possuem a menor quantidade de jogadores?
c) Quantos jogadores há no total?
d) Construa um gráfico de barras com base nos dados da tabela, indicando o título e nomeando os eixos.
e) O que o eixo horizontal (X) representa nesse gráfico?
f) O que o eixo vertical (Y) representa?
g) Para que serve o título do gráfico?

ATIVIDADE 2

Considere a tabela de temperatura:

Dia	Temperatura (°C)
1	28
2	25
3	38
4	32
5	29

a) Em qual dia ocorreu a maior temperatura?
b) A temperatura aumentou ou diminuiu do dia 3 para o dia 5?
c) Decida e construa um gráfico que melhor representa o conjunto de dados.

ATIVIDADE 3

O relatório "Digital 2024" revela que os brasileiros passam, em média, 9 horas e 13 minutos por dia online, sendo 3 horas e 37 minutos exclusivamente em redes sociais.
Considere os seguintes tempos (em minutos) que 10 estudantes afirmaram passar nas redes sociais por dia:

180, 200, 220, 240, 180, 200, 180, 220, 240, 200

Qual é a média, mediana e moda do tempo gasto nas redes sociais?
A) Média: 206 min; Mediana: 200 min; Moda: 180 min e 200 min
B) Média: 200 min; Mediana: 210 min; Moda: 220 min
C) Média: 210 min; Mediana: 210 min; Moda: 200 min
D) Média: 206 min; Mediana: 200 min; Moda: 180 min

ATIVIDADE 4

Segundo a notícia publicada no portal Negócios SC (2023), os brasileiros passam, em média, 5h14min por dia assistindo à TV linear e 2h23min consumindo vídeos online.
Em uma turma, 4 estudantes foram entrevistados sobre quanto tempo gastam por dia assistindo a vídeo online, e os resultados foram:

- João: 3h
- Maria: 2h30min
- Pedro: 2h10min
- Ana: 1h50min

Qual é a média de tempo diário de vídeo online desse grupo?
A) 2h15min
B) 2h22min
C) 2h30min
D) 2h40min

ATIVIDADE 5

Uma pesquisa inédita do Ministério da Educação (MEC), realizada em 2024, avaliou a implementação da educação para as relações étnico-raciais (Erer) nas redes de ensino brasileiras. Foram calculados seis sub-índices (como institucionalização, formação, gestão escolar etc.) e, com base nisso, criou-se o Índice Geral de Erer. Na esfera municipal, o índice foi de 27,1, enquanto na estadual chegou a 47,7.

Considerando uma amostra de 6 estados com os seguintes índices:

30, 25, 47, 50, 28, 47

Analise as afirmativas sobre esse conjunto de dados:

I. A média dos índices é aproximadamente 37,8.
II. A moda é 47, pois aparece mais vezes.
III. A mediana é 48,5.
IV. A mediana é 38,5.

Quais afirmativas são verdadeiras?

A) Apenas I e III
B) Apenas II e IV
C) Apenas I, II e IV
D) Apenas I, II e III

ATIVIDADE 6

A educação de trânsito deveria ser implementada nas escolas desde a educação infantil até o ensino médio, conforme previsto no Código de Trânsito Brasileiro (Lei nº 9.503/1997, art. 76) Acessa Trânsito. Apesar disso, apenas cerca de 30% das escolas brasileiras desenvolvem alguma ação educativa sobre trânsito, conforme dados do Observatório Nacional de Segurança Viária.
Em uma pesquisa com 9 escolas de uma região, o número de atividades realizadas no ano passado (2024) foi registrado na tabela abaixo:

Escola	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Número de atividades	2	0	3	1	4	0	2	5	3

Com base nos dados, aproximadamente quantas atividades, em média, foram realizadas por cada escola no ano de 2024?

A) 4
B) 3
C) 2
D) 1

ATIVIDADE 7

O quadro a seguir apresenta as notas de quatro estudantes do 9º ano na disciplina de Matemática em uma escola:

Estudante	Nota 1	Nota 2	Nota 3
Lucas	5	7	6
Marina	8	6,5	7
Rafael	4,5	5	6
Júlia	7	6	5,5

Para ser aprovado na disciplina o estudante deve alcançar média maior ou igual a 6,0. Com base nesses dados, determine quais alunos foram aprovados.

A) Lucas, Marina e Júlia
B) Marina, Rafael e Júlia
C) Lucas e Rafael
D) Marina e Júlia

ATIVIDADE 8

(PAEBES) Uma loja de calçados fez uma promoção no dia de comemoração de seu aniversário de 1 ano de inauguração para todos os clientes que concluíssem alguma compra na loja, nesse dia. Todos os clientes participantes dessa promoção deveriam informar o número que calçavam e, ganhariam um par de calçados a sua escolha, aqueles cujo número de calçado fosse igual à moda dos valores informados por todos os clientes participantes. Os números informados foram: 34, 37, 42, 38, 39, 34, 35, 35, 38, 40, 42, 35, 34, 35. Quantos clientes dessa loja ganharam um par de sapatos nessa promoção?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

ATIVIDADE 9

(PAEBES) O diretor financeiro de uma empresa fez um relatório sobre um determinado setor dessa empresa no qual trabalham 6 funcionários, cujos salários são R$ 3 528,50; R$ 1 604,40; R$ 2 458,70; R$ 1 254,10; R$ 1 254,10 e R$ 1 435,20. Entre outras informações, a pedido do dono da empresa, nesse relatório constava o salário mediano dos funcionários desse setor. Qual é o valor desse salário?

A) R$ 1 435,20
B) R$ 1 519,80
C) R$ 1 922,50
D) R$ 1 856,40

ATIVIDADE 10

Atividade em grupo

Realize uma pesquisa estatística sobre um tema de sua preferência (como hábitos de leitura, esportes preferidos ou meios de transporte utilizados para chegar à escola). Realize a coleta dos dados, registre os resultados, elabore tabelas e gráficos que representem as informações obtidas e analise-os, destacando tendências, comparações e possíveis conclusões.

HABILIDADE DA COMPUTAÇÃO

EF09CO06 Analisar problemas sociais de sua cidade e estado a partir de ambientes digitais, propondo soluções.

Leia um trecho da reportagem, retirado do site oficial da prefeitura da Serra, no estado do Espírito Santo.

Serra recolhe cerca de 92 mil toneladas de lixo domésticos em apenas 7 meses

A Serra recolheu cerca de 92 mil toneladas de lixo doméstico em apenas sete meses deste ano. O levantamento de acordo com a Secretaria de Serviços da Prefeitura da Serra compreende o período de janeiro a julho de 2025. Além do lixo doméstico, o município recolheu mais de 66 mil toneladas de entulhos descartados irregularmente pela população. (...)

Texto: Roberta Pelissari
Foto: Arquivo Secom/PMS

ANÁLISE DE UM PROBLEMA SOCIAL A PARTIR DE DADOS DIGITAIS

A notícia sobre a grande quantidade de lixo recolhida no município da Serra foi encontrada em ambiente digital, no site oficial da Prefeitura. Isso mostra que muitos problemas sociais da cidade e do estado podem ser conhecidos por meio da internet, em páginas oficiais, aplicativos e plataformas digitais.

Por meio da ***Computação***, é possível acessar essas informações digitais e organizá-las usando ferramentas simples, como ***planilhas eletrônicas***, ***tabelas*** e ***gráficos***. Essas ferramentas ajudam a visualizar melhor os dados e facilitam a compreensão das informações.

Como vimos nas páginas anteriores, a ***Estatística*** ajuda a analisar esses dados. Com ela, podemos comparar quantidades, observar valores e perceber padrões. Ao analisar dados reais da cidade ou do estado, fica mais fácil entender o problema apresentado e pensar em possíveis soluções, como cuidar melhor do descarte do lixo, usar corretamente os locais adequados e utilizar canais digitais até para fazer denúncias.

Agora você deve estar se perguntando onde encontro esses dados e fontes digitais oficiais?

ONDE ENCONTRAR DADOS OFICIAIS DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO?

Os dados e informações oficiais sobre o Estado do Espírito Santo estão disponíveis em ambientes digitais confiáveis, mantidos por órgãos públicos. Esses sites e plataformas ajudam a conhecer melhor os problemas da cidade e do estado por meio de números, tabelas e gráficos. Veja alguns exemplos:

- ***Site do Governo do Estado do Espírito Santo***

Reúne informações sobre saúde, educação, meio ambiente, transporte e outros temas importantes para a sociedade.

- ***Instituto Jones dos Santos Neves (IJSN):***

Apresenta dados estatísticos, pesquisas e estudos que ajudam a entender a realidade social e econômica do estado.

- ***IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística***

Disponibiliza dados sobre população, renda, trabalho, educação e meio ambiente, incluindo informações específicas do Espírito Santo.

- ***Sites das Prefeituras Municipais***

Divulgam notícias, dados e ações realizadas em cada município, como informações sobre coleta de lixo e serviços públicos.

- ***Portais de Dados Abertos***

Reúnem tabelas, gráficos e planilhas, que podem ser usados para organizar, comparar e analisar dados.

AGORA É A SUA VEZ!

Atividade investigativa – Dados digitais e problemas sociais

Vocês irão pesquisar, em ambientes digitais oficiais, dados sobre um problema social do município ou do Estado do Espírito Santo, organizar essas informações e pensar em possíveis soluções.

Etapa 1 – Definição do problema e das perguntas de pesquisa

Em grupo, escolham um problema social do município ou do nosso Estado (como descarte de lixo, saúde, educação ou transporte).
Após a escolha do tema, elaborem duas ou três perguntas que possam ser respondidas com dados numéricos encontrados em sites oficiais. As perguntas devem envolver: quantidades, comparações, ou dados ao longo do tempo.

Anotem no caderno:

1. Tema escolhido
2. Perguntas que a dupla deseja responder com a pesquisa

Essas perguntas irão orientar a pesquisa e a análise dos dados nas próximas etapas.

Etapa 2 –Pesquisa em ambiente digital

Acessem sites oficiais (Prefeitura, Governo do ES, IBGE ou IJSN) para buscar dados numéricos que ajudem a responder às perguntas formuladas na Etapa 1.
Durante a pesquisa, procurem por:

- quantidades (números, valores, porcentagens);
- dados organizados por ano, mês ou período;
- informações que permitam comparações.

Anotem no caderno:

1. Nome do site acessado
2. Dados numéricos encontrados
3. Ano ou período a que esses dados se referem

Atenção: Escolham dados que possam ser organizados em tabelas ou gráficos.

Etapa 3 – Organização dos dados (Estatística + Computação)

Com os dados pesquisados, organizem as informações da seguinte forma:

- Construam uma tabela simples com os dados coletados;
- Escolham um tipo de gráfico (barras, colunas ou setores) que represente melhor esses dados.

Essa organização pode ser feita no caderno ou com o uso de planilhas eletrônicas, quando disponível.

Etapa 4 – Análise dos dados (Estatística)

Agora, utilizem a tabela e o gráfico para responder às perguntas elaboradas na Etapa 1.
Reflitam e respondam:

- O que os dados mostram sobre o problema pesquisado?
- As perguntas iniciais foram respondidas com os dados encontrados? Explique.
- Que informação chamou mais atenção?

Etapa 5 – Proposta de solução

Com base na análise dos dados, o grupo deve pensar em uma possível solução para o problema estudado.
Reflitam e respondam:

- Que solução vocês propõem para esse problema?
- Como a tecnologia e os ambientes digitais podem ajudar nessa solução?
  (aplicativos, sites, canais de denúncia, divulgação de informações, etc.)

CHECK LIST DA ENTREGA DA ATIVIDADE

- ☑ Tema escolhido
- ☑ Perguntas de pesquisa
- ☑ Fonte digital utilizada
- ☑ Tabela /Gráfico
- ☑ Respostas da análise e da proposta de solução

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo desse capítulo. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?

Reflita sobre sua aprendizagem

- Sou capaz de identificar os indivíduos de uma pesquisa (universo ou população-alvo), bem como as variáveis envolvidas e seus tipos (quantitativas ou categóricas), de acordo com o tema investigado?
- Consigo organizar dados coletados em tabelas de frequência, representando as informações de forma clara e organizada?
- Sou capaz de agrupar os valores de uma variável contínua em classes, resumindo os dados de maneira adequada para apoiar a análise e a tomada de decisões?
- Conheço os diferentes tipos de gráficos (barras, colunas, linhas e setores) reconhecendo seus elementos constitutivos e identificando qual é o mais adequado para cada conjunto de dados?
- Consigo escolher e construir o gráfico mais apropriado para representar um conjunto de dados, garantindo clareza e fidelidade às informações?
- Sou capaz de utilizar informações apresentadas em tabelas ou gráficos para resolver problemas e interpretar situações do cotidiano?
- Consigo calcular as medidas de tendência central (média aritmética simples, moda e mediana) em uma pesquisa estatística?
- Sou capaz de interpretar o significado das medidas de tendência central e da amplitude, compreendendo o que elas revelam sobre o conjunto de dados analisado?
- Consigo planejar uma pesquisa amostral relacionada a temas da realidade social, definindo objetivos, público-alvo e procedimentos?
- Sou capaz de coletar dados relevantes para a investigação, utilizando instrumentos adequados ao tema da pesquisa?
- Consigo comunicar os resultados de uma pesquisa estatística por meio de relatórios, organizando e apresentando informações de forma clara e coerente?
- Conheço e utilizo ambientes digitais que apoiam o planejamento e a execução de pesquisas estatísticas, bem como ferramentas que contribuem para a visualização e análise de dados?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Determinar os indivíduos, as variáveis e os tipos de variáveis de acordo com o tema da pesquisa;	◯	◯	◯
Organizar dados em tabelas de frequência;	◯	◯	◯
Organizar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes;	◯	◯	◯
Conhecer gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados;	◯	◯	◯
Escolher e construir o gráfico mais adequado para representar um conjunto de dados;	◯	◯	◯
Utilizar informações apresentadas em tabelas ou gráficos na resolução de problemas;	◯	◯	◯
Calcular os valores de medidas de tendência central (média, moda, mediana);	◯	◯	◯
Interpretar o significado das medidas de tendência central ou da amplitude;	◯	◯	◯
Planejar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social;	◯	◯	◯
Determinar os indivíduos, as variáveis e os tipos de variáveis;	◯	◯	◯
Coletar dados relevantes para investigação sobre o tema da pesquisa;	◯	◯	◯
Escolher e construir o gráfico mais adequado para representar um conjunto de dados;	◯	◯	◯

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Calcular e interpretar os valores de medidas de tendência central da pesquisa estatística;	◯	◯	◯
Comunicar os resultados da pesquisa estatística por meio de relatório;	◯	◯	◯
Conhecer ambientes digitais que apoiem o planejamento e execução de pesquisa estatística;	◯	◯	◯
Conhecer ambientes digitais que contribuam para a visualização de dados.	◯	◯	◯

Dica: Revise os tópicos que você marcou como "**preciso revisar**" e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Diagnóstico inédito avalia educação étnico-racial pelo Brasil. Brasília, 2024. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias/2024/novembro/diagnostico-inedito-avalia-educacao-etnico-racial-pelo-brasil. Acesso em: 20 ago. 2025.

DANTE, L. R. Teláris Essencial: Matemática 9o ano (ALUNO). SÃO PAULO, SP: Editora Ática S.A, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. A Conquista Matemática 9º Ensino Fundamental – Anos Finais. São Paulo, SP: Editora FTD, 2022.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. Equação do 2º grau. Portal da OBMEP. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=64. Acesso em: 22 ago 2025.

INSTITUTO JONES DOS SANTOS NEVES. Cenários prospectivos para o Estado do Espírito Santo 2030 – Volume 8. Vitória: IJSN, 2013.

NEGÓCIOS SC. Brasileiros veem mais de 5 horas de televisão por dia. 2023. Disponível em: https://www.negociossc.com.br/blog/brasileiros-veem-mais-de-5-horas-de-televisao-por-dia/. Acesso em: 20 ago. 2025.

Orientações curriculares. Currículo ES, 2024. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares/. Acesso em: 10 jun. 2025.

TEIXEIRA, L. A. SuperAÇÃO! Matemática 9º ano: Manual do Professor. Moderna, 2022.

WARLES, Prof. Questões por descritor. Blogspot, maio 2013. Disponível em: https://profwarles.blogspot.com/2013/05/questoes-por-descritor.html. Acesso em: 21 ago. 2025.

We Are Social; Meltwater. Digital 2024: 5 billion social media users. [S.l.], 2024. Relatório global elaborado em parceria entre We Are Social e Meltwater. Apontado em veículos como RH Pra Você (03 dez. 2024), Bahia Econômica (03 dez. 2024) e Metrópoles (abr. 2024).

Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

SEDU 2026

Gerência de Currículo
da Educação Básica

Capítulo 5: Probabilidade

Apresentação

Prezado(a) estudante,

Você já percebeu como, em muitas situações do cotidiano, lidamos com chances e possibilidades, como ao lançar uma moeda, sortear um número ou tomar decisões baseadas em previsões? Para compreender esses fenômenos, estudamos a probabilidade, em especial os eventos independentes, nos quais a ocorrência de um evento não interfere na probabilidade de outro. Ao analisar esse tipo de situação, aprendemos a calcular probabilidades de forma correta, interpretar resultados e desenvolver o raciocínio lógico, ampliando nossa capacidade de compreender e tomar decisões em diferentes contextos.

O que você vai estudar neste capítulo

Neste capítulo, você será convidado(a) a compreender o conceito de probabilidade, explorando situações do cotidiano em que analisamos chances e possibilidades. O estudo dos eventos independentes permitirá entender casos em que a ocorrência de um evento não interfere na probabilidade de outro, como em lançamentos sucessivos de moedas ou dados. Ao longo das atividades, você desenvolverá o raciocínio probabilístico, aprendendo a calcular probabilidades, interpretar resultados e tomar decisões fundamentadas em diferentes contextos.

Expectativas de aprendizagem

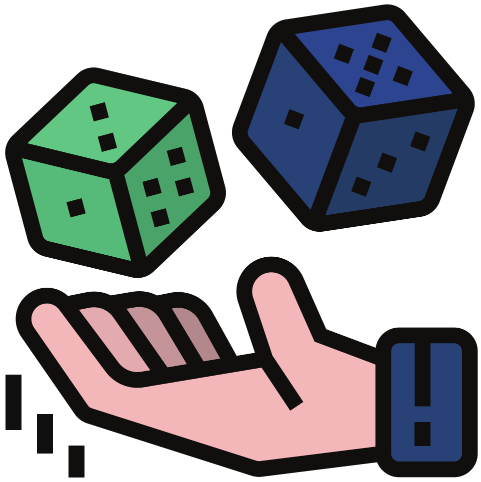
Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- Calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado evento e expressá-la na forma de fração, decimal e percentual;
- Reconhecer em experimentos aleatórios eventos independentes;
- Calcular a probabilidade da ocorrência de eventos independentes;
- Compreender o funcionamento de malwares e outros ataques cibernéticos;
- Conhecer medidas de segurança para reduzir os riscos de ataques cibernéticos;

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

PROBABILIDADE

A probabilidade é um ramo da Matemática que estuda as chances de um evento ocorrer. No dia a dia, utilizamos esse conceito para tomar decisões, como levar um guarda-chuva ao perceber nuvens escuras no céu. No entanto, a probabilidade também está presente em jogos e apostas, onde muitas pessoas acreditam que podem prever resultados e obter grandes ganhos. Entretanto, entender a Matemática por trás desses jogos ajuda a perceber que, na maioria das vezes, as chances estão contra o jogador.


Design: WiStudio Elements, Fonte: Canva

Nos últimos anos, as apostas esportivas e jogos de azar se tornaram cada vez mais populares, principalmente entre os jovens. Muitas dessas plataformas utilizam publicidade agressiva e promovem a ilusão de ganhos fáceis, sem destacar os riscos envolvidos. Do ponto de vista matemático, as casas de apostas sempre possuem uma vantagem estatística sobre os jogadores, o que significa que, no longo prazo, a maioria das pessoas perde mais dinheiro do que ganha. Essa estratégia é chamada de "valor esperado negativo", ou seja, a expectativa matemática de lucro para o apostador é sempre desfavorável.

Compreender a probabilidade de forma crítica pode ajudar a tomar decisões mais conscientes e evitar armadilhas financeiras. Em vez de contar com a sorte, é fundamental avaliar os riscos e entender que, em apostas, a vitória da casa é uma certeza matemática. Assim, desenvolver o pensamento probabilístico não apenas auxilia nos estudos, mas também na vida cotidiana, protegendo-nos de escolhas impulsivas que podem levar a prejuízos.

Neste material, vamos estudar probabilidade; reconhecer em experimentos aleatórios eventos independentes e eventos dependentes; calcular a probabilidade da ocorrência de eventos independentes e calcular a probabilidade da ocorrência de eventos dependentes.

Ao lançar um dado, não é possível prever qual será o resultado. Isso ocorre porque o lançamento de um dado é um exemplo de experimento aleatório.

Experimentos aleatórios são aqueles que, mesmo repetidos várias vezes sob as mesmas condições produzem resultados imprevisíveis.

O espaço amostral é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Ele pode ser representado pela letra S.

Por exemplo:

- No lançamento de um dado de seis faces, o espaço amostral é S={1, 2, 3, 4, 5, 6}, pois qualquer um desses números pode ser o resultado.
- No lançamento de uma moeda, o espaço amostral é S = {cara, coroa}, pois há apenas essas duas possibilidades.

Em probabilidade, um evento é qualquer subconjunto do espaço amostral, ou seja, um conjunto de resultados possíveis de um experimento aleatório.

Alguns exemplos de eventos são:

- Obter um número par no lançamento de um dado: E = {2, 4, 6}.
- Obter a face “coroa” voltada para cima no lançamento de uma moeda:

E = {coroa}.

Neste material, iremos calcular a probabilidade de ocorrência de eventos independentes e dependentes. Antes disso, é importante lembrar que a probabilidade de um evento X acontecer é determinada por:

$$P(X) = \frac{\text{quantidade de resultados favoráveis ao evento}}{\text{quantidade de resultados possíveis}}$$

EVENTOS INDEPENDENTES

Dois eventos, A e B, pertencentes ao mesmo espaço amostral, são considerados independentes quando a ocorrência de um não interfere na ocorrência do outro. Nessa situação, a probabilidade de ambos acontecerem ao mesmo tempo é determinada pela seguinte relação:

$$P(A) \cdot P(B)$$

Imagine uma caixa contendo 3 cartões iguais, marcados com as letras A, B e E. Serão retirados aleatoriamente 2 cartões com reposição, o que significa que, após cada cartão ser sorteado, ele é devolvido à caixa. Qual é a probabilidade de retirar uma vogal no primeiro sorteio e uma consoante no segundo?

Para solucionar o problema, consideramos o evento A, "retirar o primeiro cartão e a letra ser uma vogal"; o evento B, "retirar o segundo cartão e a letra ser uma consoante"; e, por fim, calculamos P(A) · P(B).

Ao retirar o primeiro cartão, temos 2 vogais de um total de 3 letras. Nesse caso, a probabilidade de obter uma vogal na primeira retirada é:

$$P\left(A\right)=\frac{2}{3}=0,666...\approx 66,7\%$$

Ao retirar o segundo cartão, temos 1 consoante de um total de 3 letras (lembre-se: o cartão obtido na primeira retirada foi devolvido). Nesse caso, a probabilidade de obter uma consoante na segunda retirada é:

$$P\left(A\right)=\frac{1}{3}=0,333...\approx 33,3\%$$

Sendo assim:

$$P\left(A\right).P\left(B\right)=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\frac{2}{9}=0,222...\approx 22,2\%$$

Consequentemente, a probabilidade de retirar uma vogal no primeiro sorteio e uma consoante no segundo é $\frac{2}{9}$.

EVENTOS DEPENDENTES

Dois eventos, X e Y, pertencentes ao mesmo espaço amostral, são considerados dependentes quando a ocorrência de um influencia a ocorrência do outro. Nessa situação, a probabilidade de ambos ocorrerem ao mesmo tempo é determinada pela fórmula:

$$P\left(X\right).P\left(Y|X\right)$$

onde P(Y I X) representa a probabilidade de Y acontecer, dado que X já ocorreu. Vamos analisar o exemplo abaixo para melhor compreensão.

Uma caixa contém 12 bolinhas idênticas, numeradas de 1 a 12. Duas bolinhas serão sorteadas aleatoriamente sem reposição, ou seja, após a retirada de uma bolinha, ela não retorna à caixa.

Queremos determinar a probabilidade de sortear um número par no primeiro sorteio e um número ímpar no segundo. Para resolver essa questão, definimos:

- Evento N: "sortear um número par na primeira retirada".
- Evento R: "sortear um número ímpar na segunda retirada".

A probabilidade procurada será calculada por:

$$P(N).\,P(R|N)$$

Inicialmente, há 6 números pares entre os 12 disponíveis. Assim, a probabilidade de retirar uma bolinha com número par na primeira escolha é:

$$P(N)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}=0,5=50\%$$

Na segunda retirada, como uma bolinha já foi sorteada e não foi devolvida à caixa, restam agora 11 bolinhas. Sabemos que, inicialmente, havia 6 números ímpares entre as 12 bolinhas. Como a primeira bolinha retirada era par, isso não alterou a quantidade de números ímpares disponíveis.

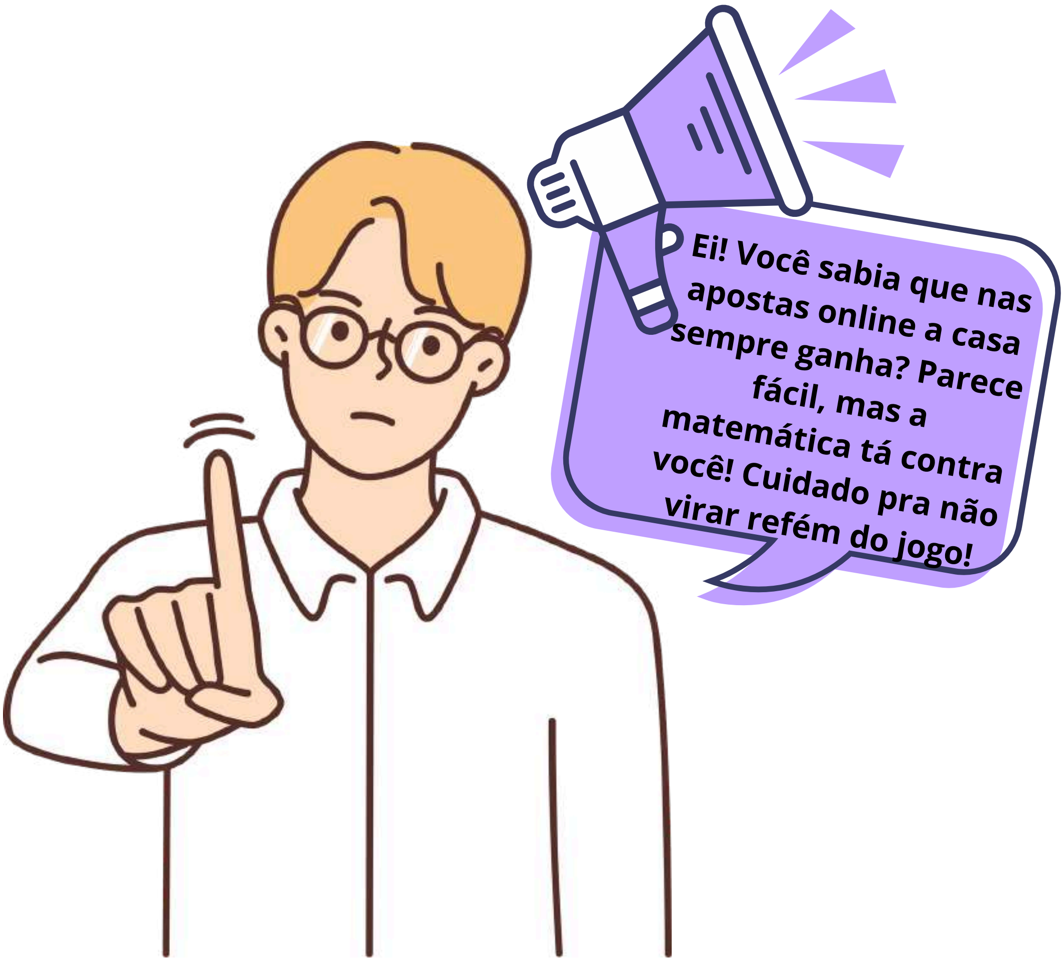
Portanto, a probabilidade de sortear um número ímpar na segunda retirada será:

$$P(R)=\frac{6}{11}$$

Sendo assim:

$$P(N).\,P(R|N) = \frac{6}{12}.\,\frac{6}{11} = \frac{36}{132} = \frac{3}{11}$$

Consequentemente, a probabilidade de obter um número par na primeira retirada e um número ímpar na segunda é $\frac{3}{11}$.



Exercicios Resolvidos

1) Bruno vai lançar uma moeda duas vezes. Qual é a probabilidade de obter cara no primeiro lançamento e coroa no segundo?

RESOLUÇÃO:

Primeiramente, é importante observar que esses são eventos independentes. Dessa forma, podemos calcular a probabilidade do primeiro evento ocorrer e, em seguida, multiplicá-la pela probabilidade do segundo evento.

$$P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Representando o ressultado na forma decimal: $\left(\frac{1}{4}\right) = 0,25$

Representando o resultado em porcentagem: $\left(\frac{1}{4}\right) = 25$ %

2) Em uma urna, foram colocadas as seguintes letras: A, S, O, L, O, V. Ao retirar 3 letras aleatoriamente da urna, sem reposição, qual é a probabilidade de formar a palavra **SOL** sorteando as letras nessa ordem?

RESOLUÇÃO:

Como o sorteio ocorre sem reposição, é essencial lembrar que, a cada nova retirada, o total de letras na urna diminui em uma unidade. Isso significa que os eventos são dependentes e devem ser analisados considerando essa variação no número de elementos disponíveis.

$$\frac{1}{6}.\frac{2}{5}.\frac{1}{4} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60} \approx 0,1666... \approx 1,7\%$$

3) Em uma prova, cada questão tem 5 alternativas, em que apenas 1 é correta. Márcia fez essa prova e, quando faltavam 3 questões, ela percebeu que não daria tempo de resolvê-las e que teria de respondê-las aleatoriamente, sem ler os enunciados. Qual é a probabilidade dela responder corretamente a essas questões da prova?

RESOLUÇÃO:

Note que os eventos nessa situação são independentes. Cada questão tem 5 alternativas, sendo apenas 1 correta. Assim, a probabilidade de acertar as questões, respondendo aleatoriamente é:

$$P(A).P(B).P(C) = \frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5} = \frac{1}{125} = 0,008 = 0,8\%$$

4) Em uma caixa há 26 fichas com letras de A a Z, sem letras repetidas. Dessas fichas, uma após a outra e sem reposição, serão sorteadas duas. Qual é a probabilidade de sortear primeiro uma vogal e, depois, uma consoante?

RESOLUÇÃO:

Na caixa há 26 fichas, sendo 5 vogais (A, E, I, O, U) e 21 consoantes. Como as fichas são retiradas sem reposição, a probabilidade de sortear primeiro uma vogal e depois uma consoante pode ser calculada da seguinte forma:

$$P(V).P(C|V) = \frac{5}{26}.\frac{21}{25} = \frac{105}{650} = \frac{21}{130} \approx 0,162 = 16,2\%$$

Material Extra

VÍDEO

Introdução à probabilidade
https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=46

PRÁTICAS EXPERIMENTAIS DE Matemática PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

No ano de 2026, o Ensino Fundamental – Anos Finais, apresenta, no componente curricular Matemática, as Práticas Experimentais de Matemática, que têm como finalidade fomentar o processo de ensino e aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento e a consolidação de habilidades, do pensamento crítico e da compreensão e aplicação da lógica matemática no cotidiano.

Nesse contexto, seu(sua) professor(a) conduzirá você e sua turma em uma prática experimental de Matemática, com o objetivo de promover uma aprendizagem mais dinâmica e participativa. A proposta busca evidenciar que o conhecimento matemático está presente em diversas situações do dia a dia e que aprender de forma colaborativa torna esse processo mais significativo e interessante.

Atividades

ATIVIDADE 1

Em um programa de entrevistas ao vivo, o apresentador sorteia aleatoriamente um espectador para subir ao palco. O sorteado convidado a girar uma roleta que determina qual prêmio ele ganhará.

Sobre esse experimento, é correto afirmar que:

A) O sorteio do espectador e a participação no jogo de prêmios são eventos dependentes, pois a participação no giro da roleta de prêmios ocorre apenas se o espectador for sorteado.

B) O sorteio do espectador e a participação no jogo de prêmios são eventos independentes, pois ambos ocorrem por escolha aleatória.

C) Os eventos são independentes, pois utilizam experimentos aleatórios diferentes (sorteio e roleta).

D) Os eventos são dependentes, pois ambos ocorrem dentro do mesmo programa.

ATIVIDADE 2

Em uma sacola, há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. Qual é a probabilidade de, ao retirar uma bola de forma aleatória, ocorrer o seguinte?

a) Retirar a bola com o número 3.

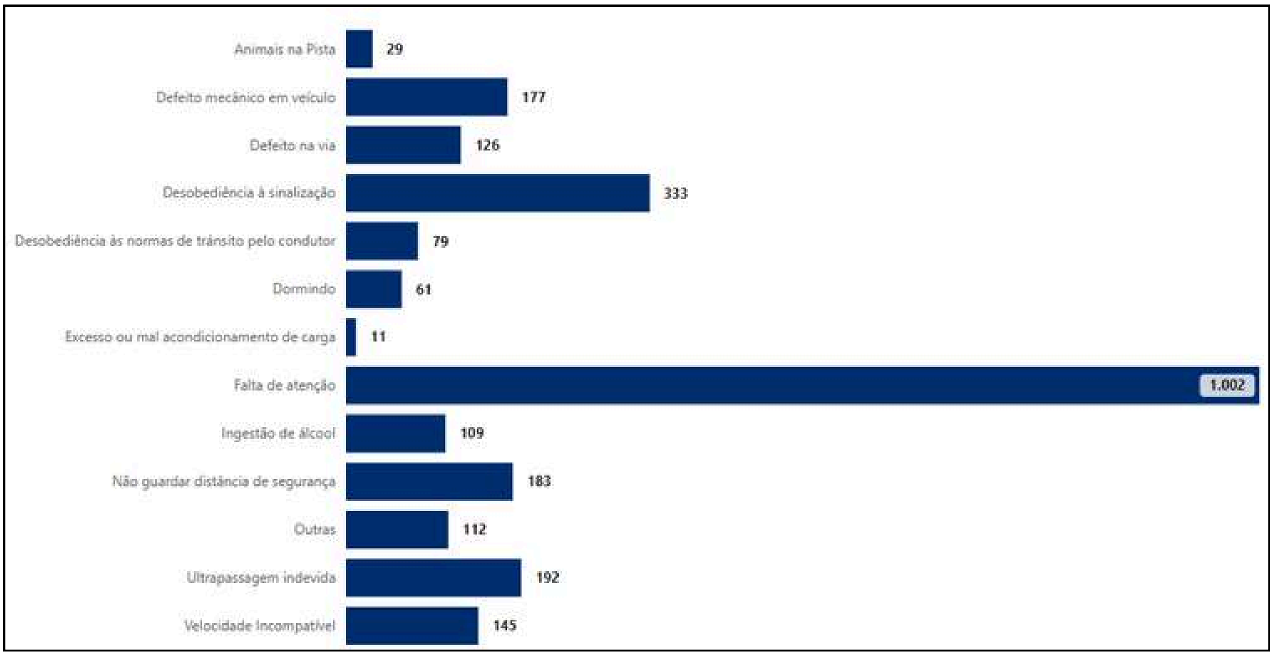
b) Retirar uma bola com um número ímpar.

c) Retirar a bola com o número 3, repor essa bola e em seguida retirar uma bola com número ímpar.

ATIVIDADE 3

Segundo o Código de Trânsito Brasileiro (CTB), um sinistro de trânsito é qualquer ocorrência que resulte em danos materiais ou corporais, podendo variar desde incidentes leves até situações mais graves. De acordo com o Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes (DNIT), entre janeiro de 2024 e fevereiro de 2025, o estado do Espírito Santo registrou 2.559 sinistros de trânsito, distribuídos por diversas causas, conforme detalhado no gráfico a seguir.

Principais causas dos sinistros de trânsito no ES - jan/2024 a fev/2025



Fonte: https://www.gov.br/dnit/pt-br/assuntos/infraestrutura-rodoviaria/sinistros-de-transito.

Se um sinistro for selecionado aleatoriamente para análise, qual é a probabilidade da causa desse sinistro ter sido “ultrapassagem indevida”?

a) 6,92 %
b) 7,15 %
c) 7,50 %
d) 13,01 %

ATIVIDADE 4

Em 09/06/2023, foi divulgada a informação de que, até aquela data, foram aplicadas 43,3 milhões de doses de vacinas contra a gripe no Brasil. Desse total, 16 milhões de doses foram aplicadas em idosos, 6 milhões em crianças e 2,6 milhões em profissionais de saúde. A vacina estava disponível para pessoas a partir de seis meses de idade.

Fonte: https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/noticias/2023/junho/ate-agora-43-3-milhoes-de-pessoas-se-vacinaram-contra-a-gripe-no-brasil?utm_source=chatgpt.com. Acesso em 26 jan 2025.

Suponha que uma pessoa vacinada seja escolhida aleatoriamente entre todas as pessoas vacinadas até essa data. Qual é a probabilidade de que essa pessoa tenha sido uma criança?

A) 2,50%

B) 6,00%

C) 13,86%

D) 18,10%

ATIVIDADE 5

Em uma competição esportiva, uma escola escolheu dois representantes aleatoriamente para carregar a bandeira na abertura dos jogos. O primeiro estudante foi escolhido de um grupo de 20 alunos e o segundo foi escolhido de um grupo diferente, com 15 alunos.

Qual é a probabilidade de que ambos os escolhidos sejam meninas, sabendo que em cada grupo há exatamente 5 meninas?

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{1}{12}$

ATIVIDADE 6

Um professor de química separou 12 frascos de soluções para uma experiência em laboratório. Após análise, ele verificou que 5 desses frascos estavam contaminados. Todos os frascos foram misturados e colocados de volta na bancada. Um estudante escolheu aleatoriamente um frasco e, sem devolvê-lo, escolheu um segundo frasco.
Qual é a probabilidade de que o estudante tenha selecionado um frasco contaminado nas duas escolhas?

A) $\frac{5}{36}$

B) $\frac{5}{12}$

C) $\frac{4}{12}$

D) $\frac{5}{33}$

ATIVIDADE 7

Uma pesquisa entrevistou 2.029 pessoas com 16 anos ou mais e constatou que 76% da população acredita que o celular traz mais prejuízos do que benefícios ao aprendizado das crianças.
Se escolhermos aleatoriamente uma pessoa entrevistada dessa pesquisa, qual é a probabilidade de que essa pessoa não tenha essa opinião?

Fonte dos dados: Pesquisa do Instituto Datafolha (2024).

A) 24%
B) 34%
C) 50%
D) 76%

ATIVIDADE 8

Em uma sala de aula com 40 alunos, 60% são meninas. Dessas meninas, 25% faltaram à aula. O professor resolveu utilizar a lista de presença para fazer um sorteio entre toda a turma, independentemente de estarem presentes ou ausentes. Qual é a probabilidade de uma dessas meninas que faltaram ser sorteada?

A) 25%

B) 24%

C) 15%

D) 6%

ATIVIDADE 9

Segundo o site A Gazeta (https://www.agazeta.com.br/agora/duas-cidades-do-es-ficam-entre-as-mais-quentes-do-brasil-nesta-sexta-feira-31-0125), foram registradas as maiores temperaturas do Brasil até as 15h do dia 31 de janeiro de 2025. As seis cidades com as maiores temperaturas foram:

- Pão de Açúcar (AL): 36,4°C
- Alfredo Chaves (ES): 36,2°C
- Porto Murtinho (MS): 36,0°C
- Jaguaruana (CE): 35,9°C
- Piranhas (AL): 35,7°C
- Marilândia (ES): 35,7°C

Suponha que uma campanha de conscientização ambiental será realizada em uma das cidades mais quentes do Brasil, e uma cidade será escolhida aleatoriamente para sediar o evento. Qual a probabilidade de a cidade escolhida para sediar o evento ser do estado do Espírito Santo (ES)?

A) 16,7%

B) 33,3%

C) 50%

D) 83,3%

ATIVIDADE 10

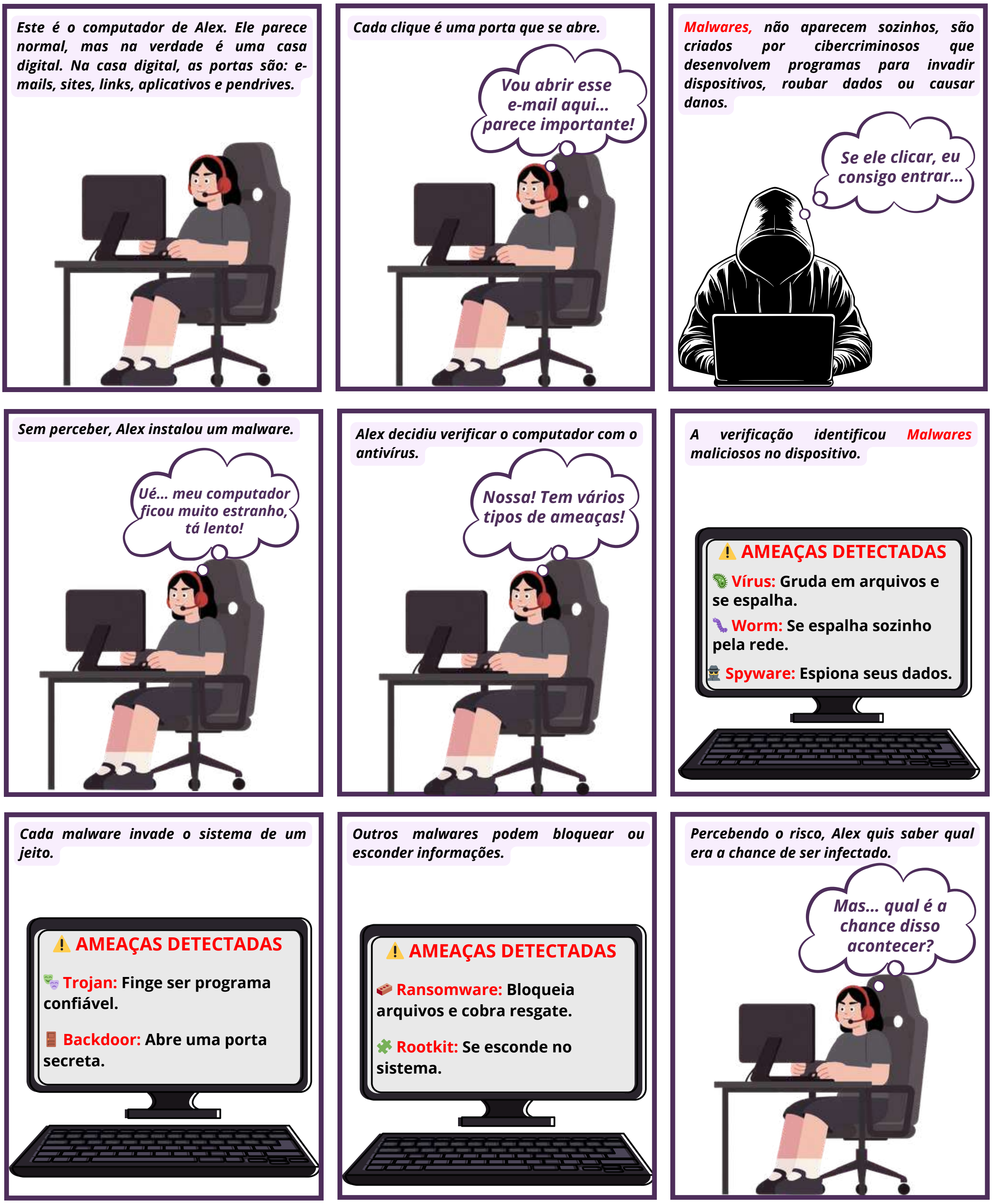
Em uma sacola opaca, existem 24 cartões de mesma espessura e tamanho, sendo 15 amarelos, 7 azuis e 2 vermelhos. Um cartão é retirado ao acaso da sacola.
Responda as questões a seguir:

1. Qual é a probabilidade de o cartão retirado ser amarelo?
2. Qual é a probabilidade de o cartão retirado ser azul?
3. Qual é a probabilidade de, ao retirar dois cartões sucessivamente (com reposição), o primeiro ser amarelo e o segundo ser azul?
4. Qual é a probabilidade de, ao retirar dois cartões sucessivamente (sem reposição), o primeiro ser vermelho e o segundo ser amarelo?

HABILIDADE DA COMPUTAÇÃO

EF09CO04 Compreender o funcionamento de malwares e outros ataques cibernéticos.

A CASA DIGITAL E OS INVASORES INVISÍVEIS



A CASA DIGITAL E OS INVASORES INVISÍVEIS

ATIVIDADE INVESTIGATIVA EM DUPLAS

RISCO DIGITAL E PROBABILIDADE

Formem duplas.

Vocês serão investigadores digitais que vão analisar o caso do computador de Alex usando Matemática e Computação.

Leiam atentamente os quadrinhos.

1. Por que Alex decidiu passar o antivírus ___________________________________

2. Listem três tipos de malware que apareceram e pesquise um pouco mais sobre eles.

- ____
- ____
- ____

3. Em dupla, expliquem com suas palavras:

O que é malware?

____

____

____

Lembrem:

CLICAR EM UM LINK DESCONHECIDO PODE OU NÃO CAUSAR INFECÇÃO. PORTANTO, É UM EXPERIMENTO ALEATÓRIO.

4. Expliquem por que essa situação é imprevisível.

____

____

____

Considerem o experimento:

CLICAR EM UM LINK DESCONHECIDO.

5. Completem o espaço amostral:

S = {________, ________}

(Dica: pensem nos dois resultados possíveis.)

Os investigadores digitais coletaram a informação:

DE CADA 10 LINKS DESCONHECIDOS, 3 POSSUEM MALWARE.

6. Quantos são os casos possíveis? ______________

7. Quantos são os casos favoráveis à infecção? _____________

Usem a fórmula:

$$P(X) = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$$

8. Façam o cálculo da probabilidade de infecção.

Resultado: __________________

9. Escrevam essa probabilidade em porcentagem.

Resultado: _________%

Conversem em dupla:

10.O risco encontrado é baixo, médio ou alto?
- □ baixo
- □ médio
- □ alto

Justifiquem:

___

___

___

Agora vocês vão propor uma solução.
11. Escrevam duas atitudes digitais seguras para evitar malware.

___

___

___

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo desse capítulo. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?

Reflita sobre sua aprendizagem

- Sou capaz de calcular a probabilidade de ocorrência de um evento, expressando o resultado na forma de fração, número decimal e porcentagem?
- Consigo reconhecer, em experimentos aleatórios, quando os eventos são independentes, compreendendo que a ocorrência de um não interfere no outro?
- Sou capaz de calcular a probabilidade de eventos independentes, aplicando corretamente as regras e interpretando os resultados obtidos?
- Compreendo o que são malwares e outros tipos de ataques cibernéticos, reconhecendo seus possíveis impactos no uso de dispositivos e da internet?
- Conheço e aplico medidas de segurança digital que ajudam a reduzir os riscos de ataques cibernéticos, como uso de senhas seguras, atualização de sistemas e cuidado ao acessar links e arquivos?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Calcular a probabilidade de ocorrência de um determinado evento e expressá-la na forma de fração, decimal e percentual;	◯	◯	◯
Reconhecer em experimentos aleatórios eventos independentes;	◯	◯	◯
Calcular a probabilidade da ocorrência de eventos independentes;	◯	◯	◯
Compreender o funcionamento de malwares e outros ataques cibernéticos;	◯	◯	◯
Conhecer medidas de segurança para reduzir os riscos de ataques cibernéticos;	◯	◯	◯

Dica: Revise os tópicos que você marcou como "**preciso revisar**" e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências

AGAZETA. Duas cidades do ES ficam entre as mais quentes do Brasil nesta sexta-feira, 31/01. A Gazeta, 31 jan. 2025. Disponível em: https://www.agazeta.com.br/agora/duas-cidades-do-es-ficam-entre-as-mais-quentes-do-brasil-nesta-sexta-feira-31-0125. Acesso em: 02 fev. 2025.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

BRASIL. Ministério da Saúde. Até agora, 43,3 milhões de pessoas se vacinaram contra a gripe no Brasil. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/noticias/2023/junho/ate-agora-43-3-milhoes-de-pessoas-se-vacinaram-contra-a-gripe-no-brasil?utm_source=chatgpt.com. Acesso em: 26 jan. 2025.

CNN BRASIL. 65% dos pais são contra o uso do celular nas escolas, aponta Datafolha. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/educacao/65-dos-pais-sao-contra-o-uso-do-celular-nas-escolas-aponta-datafolha/. Acesso em: 02 fev. 2025.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da matemática**: 9º ano: ensino fundamental: anos finais. São Paulo: Ftd, 2022.

GOVERNO DO BRASIL. INSS divulga os novos valores dos benefícios para 2025. Disponível em: https://www.gov.br/secom/pt-br/assuntos/noticias/2025/janeiro/inss-divulga-os-novos-valores-dos-beneficios-para-2025. Acesso em: 19 jan. 2025.

IMPA. **OBMEP – Portal da OBMEP**. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=46. Acesso em: 30 jan. 2025.

REECICLAR. Reciclagem de plástico no Brasil. Disponível em: https://reeciclar.com.br/reciclagem/reciclagem-de-plastico-no-brasil/?utm_source=chatgpt.com. Acesso em: 26 jan. 2025.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida (ed.). **SuperAÇÃO!**: matemática: 9º ano: manual do professor. São Paulo: Moderna, 2022.

Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

SEDU 2026

Gerência de Currículo
da Educação Básica

Capítulo 6: Fatoração e Produtos Notáveis na Resolução de Equações Quadráticas

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Apresentação

Prezado(a) estudante,

Você já percebeu como a álgebra nos ajuda a representar e resolver diferentes situações matemáticas de forma organizada? Ao estudar expressões algébricas, fatoração e produtos notáveis, aprendemos a simplificar cálculos, reconhecer padrões e transformar expressões para facilitar a resolução de problemas. Além disso, a resolução de equações quadráticas, tanto por meio da fatoração e dos produtos notáveis quanto na forma completa, possibilita encontrar valores desconhecidos e interpretar resultados em diversos contextos. Esses conhecimentos fortalecem o raciocínio algébrico e ampliam sua capacidade de resolver problemas de maneira eficiente e estruturada.

O que você vai estudar neste capítulo

Neste capítulo, você vai estudar expressões algébricas, aprendendo a manipulá-las e simplificá-las por meio da fatoração e dos produtos notáveis. Também irá desenvolver estratégias para a resolução de equações quadráticas, utilizando a fatoração e os produtos notáveis, além de resolver equações quadráticas completas, compreendendo seus procedimentos e aplicações em diferentes situações matemáticas.

Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- Identificar expressão algébrica que modela uma sequência numérica ou figural;
- Calcular o valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações;
- Resolver problemas que podem ser modelados por expressões algébricas;
- Identificar fator comum em um polinômio;
- Utilizar a fatoração para reescrever um polinômio;

- Desenvolver produtos notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença;
- Resolver e elaborar problemas, de diversos contextos, que envolvam produtos notáveis e cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações;
- Resolver uma equação polinomial de 2º grau, utilizando inclusive os produtos notáveis e os processos de fatoração;
- Inferir uma equação polinomial de 2º grau que modela um problema;
- Resolver problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau, utilizando inclusive os produtos notáveis e os processos de fatoração;
- Elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau, utilizando inclusive os produtos notáveis e os processos de fatoração.

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

Conceitos & Conteúdos

SEQUÊNCIA NUMÉRICA

Uma sequência numérica é composta por números organizados em uma ordem específica. Essas sequências podem ser infinitas, indicadas por reticências para mostrar que continuam sem fim, ou finitas, quando todos os números são apresentados. Cada número que faz parte da sequência é chamado de termo.

Podemos expressar algebricamente uma sequência numérica por meio da sua **lei de formação**, que é uma regra que mostra como a sequência progride ou é formada. Analise o exemplo.

$a_n = 2n + 3$	Lei de formação
$a_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$	Primeiro termo
$a_2 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$	Segundo termo
$a_3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$	Terceiro termo
$a_4 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$	Quarto termo

Essa lei de formação gera a sequência (5, 7, 9, 11, ...).

Identificando a lei de formação

Para encontrar a lei de formação de uma sequência numérica, é necessário identificar o padrão que relaciona os termos da sequência com suas respectivas posições (1º, 2º, 3º, etc.). Esse padrão pode ser descoberto observando as diferenças entre os termos ou buscando uma regra matemática que descreva a relação entre o número do termo (sua posição) e seu valor.

Por exemplo, considere a sequência: 5, 8, 11, 14, ...

Observe que, ao passar de um termo para o próximo, há uma diferença constante de 3. O que nos leva a pensar na sequência dos múltiplos de 3, representada pela lei de formação $a_n = 3n$.

$$a_n = 3n$$
$$a_1 = 3 \cdot 1 = 3$$
$$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$
$$a_3 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$a_4 = 3 \cdot 4 = 12$$

A sequência **3, 6, 9, 12, ...** não corresponde exatamente àquela que foi apresentada inicialmente. No entanto, ao comparar termo por termo, percebe-se uma diferença constante entre eles.

$$3, 6, 9, 12...$$

+2 +2 +2 +2

$$5, 8, 11, 14...$$

Isso sugere que a lei de formação da sequência pode ser definida a partir dessa regularidade, obtendo $a_n = 3n + 2$.

Representações algébricas equivalentes

Duas ou mais sequências numéricas podem apresentar leis de formação diferentes, mas ainda assim gerar os mesmos termos. Isso acontece porque existem várias maneiras de descrever matematicamente a relação entre a posição do termo e o seu valor. Veja os dois exemplos a seguir:

$$\begin{aligned} a_n &= 4n - 2 \\ a_1 &= 4 \cdot 1 - 2 = 2 \\ a_2 &= 4 \cdot 2 - 2 = 6 \\ a_3 &= 4 \cdot 3 - 2 = 10 \\ a_4 &= 4 \cdot 4 - 2 = 14 \\ a_5 &= 4 \cdot 5 - 2 = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2\,(2n - 1) \\ a_1 &= 2\,(2 \cdot 1 - 1) = 2 \\ a_2 &= 2\,(2 \cdot 2 - 1) = 6 \\ a_3 &= 2\,(2 \cdot 3 - 1) = 10 \\ a_4 &= 2\,(2 \cdot 4 - 1) = 14 \\ a_5 &= 2\,(2 \cdot 5 - 1) = 18 \end{aligned}$$

Embora as leis de formação sejam expressas de maneiras diferentes, ambas geraram exatamente a mesma sequência numérica (2, 6, 10, 14, 18, ...). Portanto, as duas expressões algébricas são equivalentes.

1) Vamos retomar a situação descrita no início:
Ana e João descobriram uma sequência numérica misteriosa no caderno encontrado no sótão da casa da avó. A sequência é: 4, 7, 10, 13, ...

A avó deixou uma nota dizendo:
"Diga-me qual é o 50º número desta sequência, e o tesouro será revelado".

Para ajudar Ana e João responda:
Qual é o 50º número da sequência?

RESOLUÇÃO:

Ao observar a sequência fornecida (4, 7, 10, 13, ...) é possível perceber que a diferença entre cada número consecutivo é constante. Cada termo aumenta em 3 unidades. Porém, já vimos anteriormente que a sequência dos múltiplos de 3 é: 3, 6, 9, 12... Comparando termo com termo, existe uma diferença de uma unidade. Sendo assim, a lei de formação gerada é $a_n = 3n + 1.$

Queremos encontrar o 50º termo para descobrirmos a senha, sendo assim:

$$a_{50} = 3{\cdot}50 + 1 = 151$$

Com a senha 151 é possível abrir o cadeado do baú.

2) Um novo modelo de veículo será testado durante 15 dias. No primeiro dia, o veículo vai percorrer 35 quilômetros, no segundo dia, 55 quilômetros, no terceiro dia, 75 quilômetros e assim por diante.

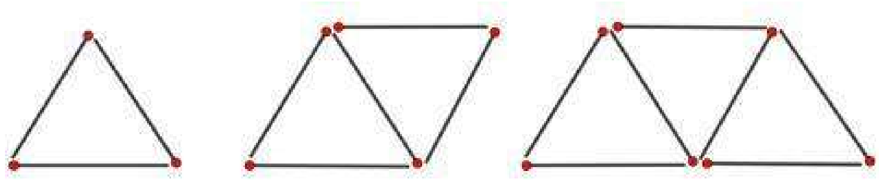
a) Escreva a lei de formação dessa sequência.
b) Quantos quilômetros o veículo percorrerá no último dia de teste?

RESOLUÇÃO:

a) Os valores dos quilômetros apresentam uma diferença de 20 unidades entre si. Podemos pensar nos múltiplos de 20, gerando a sequência (20, 40, 60, ...). Ao comparar termo por termo, observamos que a diferença entre eles é de 15 unidades. Assim, a lei de formação da sequência é $a_n = 20n + 15.$

b) $a_{15} = 20{\cdot}15 + 15 = 315.$

3) A sequência de figuras triangulares a seguir foi construída com palitos. Note que o número de palitos utilizados varia de acordo com o número de figuras triangulares montadas.



a) Determine a lei de formação dessa sequência.
b) Alguma figura nessa sequência pode ser construída com 295 palitos?

RESOLUÇÃO:

a) Está sendo adicionado dois palitos em cada imagem posterior, o que nos leva a considerar os múltiplos de 2, formando a sequência (2, 4, 6, ...). Ao compararmos termo por termo, observamos que a diferença entre eles é de 1 unidade. Dessa forma, a lei de formação dessa sequência pode ser representada por $a_n = 2n + 1$

b) $2n + 1 = 295 \rightarrow 2n = 294 \rightarrow n = 147$ Sim, a figura 147.

4) A sequência numérica abaixo pode ser definida por uma expressão algébrica, que relaciona o valor do termo com a sua posição na sequência.

Termo	11	12	13	14	15
Posição	132	155	180	207	236

A expressão algébrica que permite determinar o n-ésimo termo dessa sequência é
A) n + 1
B) n + 2
C) $n^2 + 11$
D) $n^2 + 34$

RESOLUÇÃO:
Ao observarmos a sequência, percebemos que os números 132, 155, 180, 207 e 236 aumentam em 23, 25, 27 e 29, respectivamente, o que nos faz descartar os múltiplos. Observe que os quadrados perfeitos 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... , sobem, 1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., donde percebemos o mesmo padrão. Assim, convém desconfiar que essa sequência se refere a números elevados ao quadrado.
Pensando assim, temos $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$ e $15^2 = 225$, obtendo a sequência 121, 144, 169, 196 e 225.
A sequência apresentada na questão (132, 155, 180, 207 e 236) é 11 unidades a mais que a sequência do quadrado dos números do termo. Então, temos uma sequência de números elevados ao quadrado (n^2) mais 11 unidades, ou seja,
$n^2 + 11$, alternativa C.

Atividades

ATIVIDADE 1

Considere a sequência: 1, 4, 9,16, 25,...
Qual será o próximo termo da sequência?

A) 28
B) 32
C) 34
D) 36

ATIVIDADE 2

Analise a sequência de figuras construídas com palitos de fósforos, de acordo com a regularidade da sequência.

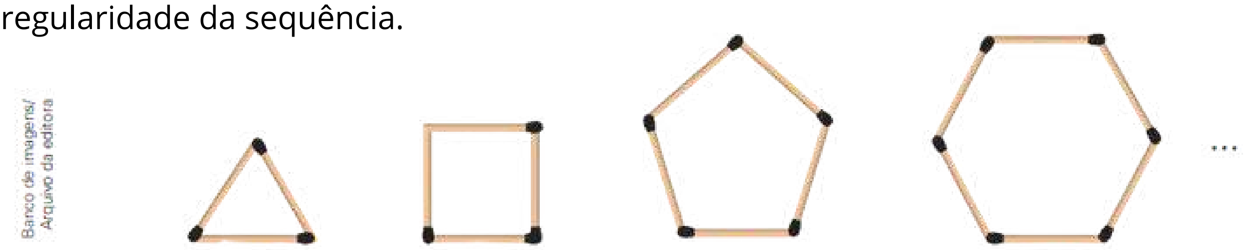
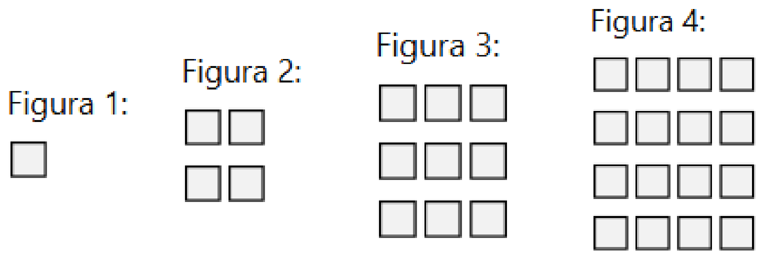


Figura 1. Figura 2. Figura 3. Figura 4.

Quantos palitos são necessários para formar a figura 5 da sequência?

ATIVIDADE 3



Qual é a expressão algébrica que representa o número total de quadradinhos na Figura n, e quantos quadradinhos haverá na Figura 10?

A) $Q = n^2$, com 81 quadradinhos na Figura 10

B) $Q = n^2$, com 100 quadradinhos na Figura 10

C) $Q = 2n^2$, com 100 quadradinhos na Figura 10

D) $Q = n^2 + n$, com 121 quadradinhos na Figura 10

ATIVIDADE 4

Uma sequência numérica é dada por: $a_n = 2n^2 + 1$. Qual é o 5º termo dessa sequência?

ATIVIDADE 5

Considere a sequência de números 3, 5, 7, 9, 11,...
Qual expressão algébrica representa o n-ésimo termo da sequência?

A) $a_n = 2n + 1$

B) $a_n = 3n + 1$

C) $a_n = 2n + 3$

D) $a_n = 2n - 1$

ATIVIDADE 6

Uma sequência é definida pelos termos 2, 4, 6, 8, 10,...
Dois alunos criaram as seguintes expressões para representar o n-ésimo termo:

Aluno A: $a_n = 2n$
Aluno B: $a_n = n + n$

Sobre as expressões, é correto afirmar que:
A) Ambas são equivalentes, porque n + n = 2n.
B) Apenas a expressão do Aluno A é válida.
C) Apenas a expressão do Aluno B é válida.
D) As expressões não são equivalentes, porque a sequência não segue um padrão fixo.

ATIVIDADE 7

Em uma fábrica, a produção de peças segue a sequência 2,4,8,16,32,...
Observe que o número de peças dobra a cada etapa.
Qual expressão algébrica representa o número de peças (a_n) na n-ésima etapa?

A) $a_n = 2n$
B) $a_n = 2^n$
C) $a_n = n^2$
D) $a_n = 4n$

ATIVIDADE 8

Considere a sequência de números racionais $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$, onde o numerador aumenta em 1 a cada termo, e o denominador também aumenta em 1. Qual expressão algébrica representa o n-ésimo termo da sequência?

A) $a_n = \frac{n}{n+1}$

B) $a_n = \frac{n+1}{n}$

C) $a_n = \frac{n}{2n+1}$

D) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

ATIVIDADE 9

Maria está juntando dinheiro para comprar um presente especial no final de dois anos. No início, ela já possuía R$ 100,00 guardados. A partir daí, decide economizar R$ 20,00 todos os meses.

Complete a tabela com os valores que Maria terá acumulado até o 10º mês:

Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor (R$)	120	140				220	240			300

a) Qual padrão você observa na maneira de Maria economizar?

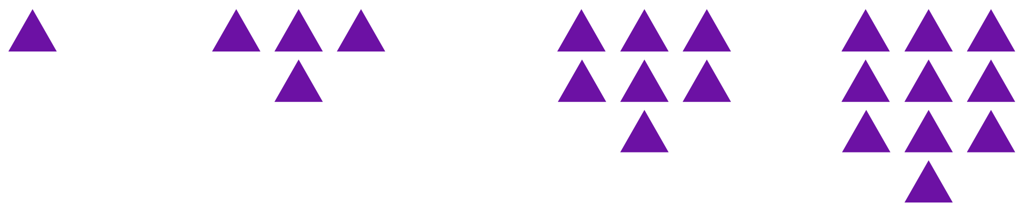
b) Escreva a expressão algébrica que representa o valor acumulado (V) por Maria em relação ao número de meses (m).

c) Mantendo o mesmo padrão, quanto ela terá economizado no 18º mês?

ATIVIDADE 10

As figuras a seguir estão organizadas dentro de um padrão.

n = 1 n = 2 n = 3 n = 4



A expressão algébrica que representa a quantidade de estrelas P em função de n é

A) $P = 3n - 2$

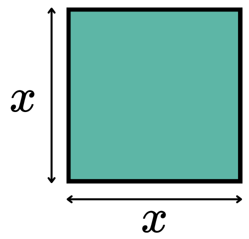
B) $P = 2n + 1$

C) $P = n^2$

D) $P = n$

O VALOR NUMÉRICO DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA

Observe o quadrado ao lado. A medida de perímetro deste quadrado é representada pela expressão algébrica $x + x + x + x \quad ou \quad 4x.$



- Se x = 2 cm, então a medida do perímetro é

$$4 \cdot 2 = 8 \ cm.$$

- Se x = 3,5 cm, então a medida do perímetro é

$$4 \cdot 3,5 = 14 \ cm.$$

Você se lembra?

O perímetro é a medida do contorno de uma figura geométrica plana e pode ser obtido pela soma dos lados de um polígono ou, no caso dos círculos, por meio de uma fórmula.

Importante!!!
O valor numérico de uma expressão algébrica é o valor que ela assume quando substituímos cada letra pelo número correspondente e efetuamos as operações indicadas.

Basicamente, após a substituição de um **valor numérico** no lugar da(s) variável(is), uma expressão algébrica se torna uma expressão numérica. E sendo uma expressão numérica passamos a resolver conforme as regras e propriedades das operações.

Você se lembra?

As regras para resolver expressões numéricas são:

- Resolver primeiro as operações dentro dos parênteses.
- Resolver depois as operações dentro dos colchetes.
- Resolver por fim as operações dentro das chaves.

E também:

- Resolver as operações de expoentes e raízes
- Resolver as operações de multiplicação e divisão
- Resolver as operações de adição e subtração
- Resolver as operações da esquerda para a direita, quando forem do mesmo nível.

Veja o exemplo:

$$\left\{\left[(3+5)^2 - \sqrt{16}\right] \div 4 + 12\right\} =$$
$$= \left\{\left[(8)^2 - 4\right] \div 4 + 12\right\} =$$
$$= \{[64 - 4] \div 4 + 12\} =$$
$$= \{60 \div 4 + 12\} =$$
$$= \{15 + 12\} =$$
$$= 27$$

Acompanhe mais um exemplo. Vamos escrever as expressões algébricas que correspondem às sentenças a seguir. Em seguida, vamos calcular o valor numérico de cada uma para $x = 5.$

A diferença entre 11 e um número:

$$11 \ \ menos \ \ x =$$
$$11 - x =$$
$$11 - 5 =$$
$$6$$

A soma do dobro de um número e um:

$$2x \ \ mais \ \ 1$$
$$2x + 1 =$$
$$2 \cdot 5 + 1 =$$
$$10 + 1 =$$
$$11$$

O quociente entre o décimo de um número e três sétimos:

$$\frac{x}{10} \ \ dividido \ \ por \ \ \frac{3}{7} =$$
$$\frac{x}{10} \div \frac{3}{7} =$$
$$\frac{5}{10} \div \frac{3}{7} =$$
$$\frac{5}{10} \cdot \frac{7}{3} =$$
$$\frac{35}{30} \xrightarrow[\div 5]{\div 5} = \frac{7}{6}$$

Podemos também utilizar as expressões algébricas para solucionar problemas, conforme o exemplo a seguir:

Ângela, Sandra e Solange sempre vão juntas ao cinema. Se cada entrada para o cinema custa x reais, qual a expressão algébrica que representa o gasto delas com as entradas? Supondo que no domingo cada entrada custe **23** reais, quanto custarão as entradas no total?
A expressão algébrica que represnta o gasto com entradas será de $3x$.
Se o valor das entradas for **23** reais, elas deverão pagar:

$$3x \to 3 \cdot 23 = 69 \ reais.$$

Consideração importante!

Quando temos expressões algébricas fracionárias, nem sempre é possível obter seu valor numérico. Isso acontece quando esses valores anulam o denominador da expressão, pois não existe em matemática divisão por zero.

Veja esses exemplos:
I) A expressão $\frac{3}{x}$ não tem valor numérico quando $x = 0$.
II) A expressão $\frac{x+2}{x-1}$ não tem valor numérico quando $x = 1$, pois se substituir x por 1 vai dar zero no denominador.

Você se lembra?

O número zero é um elemento de anulação na multiplicação. Isso quer dizer que qualquer número multiplicado por zero sempre resultará em zero

$$0 \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 1 = 0$$
$$0 \cdot 2 = 0$$
$$\vdots$$
$$0 \cdot x = 0$$

Veja esse exemplo: Se $3 \div 0 = n$, então $n \cdot 0 = 3$.
Impossível, pois zero multiplicado por qualquer número sempre será zero!

RESOLVENDO PROBLEMAS MODELADOS COM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Resolver problemas modelados por expressões algébricas envolve traduzir uma situação real em uma equação ou expressão, e, em seguida, aplicar técnicas algébricas para encontrar a solução. Vamos dividir isso em etapas práticas:

Entenda o problema e defina as variáveis.
- Leia o enunciado cuidadosamente.
- Identifique as variáveis envolvidas e o que está sendo pedido

Modele o problema.
- Traduza as informações do problema para expressões algébricas.
- Use símbolos para representar as variáveis e relacione-as com os dados fornecidos.

Resolva a expressão algébrica.
- Simplifique a expressão, se necessário.
- Caso seja necessário, substitua valores numéricos fornecidos nas variáveis da expressão algébrica.

Verifique se o resultado obtido é mesmo a solução.

Vamos ver isso na prática com um problema: Daqui a 5 anos, Ana terá o dobro da idade de Bruno. Chamando a idade de Bruno de x, escreva uma expressão algébrica para a idade de Ana. Em seguida, determine a idade atual de Ana caso Bruno tenha idade atual de 8 anos.

Solução:

Definir as variáveis
idade de Bruno atual : x

→

Modelar o problema
Daqui a 5 anos, Ana terá o dobro da idade de Bruno. Assim a idade de Ana será:

$$2 \cdot (x+5)$$

→

Resolver a expressão algébrica

$$2 \cdot (x+5)$$

Para $x = 8$, temos:

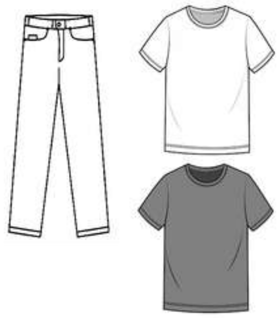
$$2 \cdot (8+5) =$$
$$= 2 \cdot (13) =$$
$$= 26$$

→

Verificar
O resultado da expressão algébrica é a idade de Ana daqui a 5 anos. Como o problema pediu a idade atual dela, devemos subtrair 5 anos. Dessa forma, a solução é **21 anos**.

Exercícios Resolvidos

1) Pedro comprou 1 calça de R$ 150,00 e 2 camisas de mesmo valor.
A) Escreva no caderno uma expressão algébrica
que represente o valor total a pagar nessa situação. Use a letra x para representar o valor de uma camisa.



RESOLUÇÃO:

$$150 + x + x \quad \rightarrow \quad 150 + 2x$$

B) Se o preço de 1 camisa é R$ 80,00, então quanto ele gastou?

RESOLUÇÃO:

$$150 + 2 \cdot 80 = 150 + 160 = 310.$$

Logo, o valor gasto foi de R$ 310,00.

2) Determine os valores das variáveis para os quais as expressões algébricas a seguir **não têm valor numérico**.

A) $\dfrac{x-5}{x-4}$ B) $\dfrac{a+b}{1-3a}$ C) $\dfrac{2x}{2+5x}$ D) $\dfrac{a-b}{2-2b}$

RESOLUÇÃO:

A) $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

B) $1 - 3a = 0 \quad \rightarrow \quad -3a = -1 \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{-1}{-3} \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{1}{3}$

C) $2 + 5x = 0 \rightarrow 5x = -2 \rightarrow x = -\dfrac{2}{5}$

D) $2 - 2b = 0 \rightarrow -2b = -2 \rightarrow b = \dfrac{-2}{-2} \rightarrow b = 1$

VÍDEO

Valor numérico de uma expressão algébrica
https://www.youtube.com/watch?v=hPrWWSLdaCM

Atividades

ATIVIDADE 1

Maria ao fazer uma lista de exercícios preparatórios para um simulado deparou com a seguinte expressão:

$$\frac{x^2 - 2y}{x}$$

Para x = 3 e y = – 1, o valor da expressão é

A) $\frac{8}{3}$

B) $\frac{4}{3}$

C) $\frac{11}{3}$

D) $\frac{7}{3}$

ATIVIDADE 2

Calcule o valor de $4x^2 - 5x + 1$ para $x = -\frac{1}{2}$.

A) $\frac{5}{4}$

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{9}{4}$

D) $\frac{9}{2}$

ATIVIDADE 3

A diferença entre quatro vezes um número e o dobro desse mesmo número é igual a 30. Que número é esse?

A) 6

B) 9

C) 12

D) 15

ATIVIDADE 4

Observe a imagem de uma piscina retangular.

A) Qual é a expressão que representa o perímetro de sua borda?

B) Qual seria o perímetro da borda da piscina para $x = 5m$ e $y = 3m$?

ATIVIDADE 5

Paulo escreveu o seguinte polinômio para o cálculo do perímetro de um terreno que ele possui: $P = 4x + 6y$.

A esposa de Paulo pretende murar o terreno e, para comprar o material, precisa saber a medida do perímetro. Paulo informou a ela que o comprimento (x) e a largura (y) medem, respectivamente, 30 m e 15 m. Utilizando o polinômio acima, qual é o valor do perímetro que a esposa de Paulo encontrou?

ATIVIDADE 6

Antônio precisou dos serviços de táxi para ir a uma festa. Ao entrar no veículo, observou que o taxímetro marcava R$ 3,00, referente à bandeirada inicial. Durante o percurso, ele percebeu que, a cada quilômetro rodado, o valor da corrida aumentava em R$ 1,80.
Ao final do trajeto, Antônio verificou que o táxi havia percorrido um total de 12 km.

a) Expresse, por meio de uma fórmula algébrica, o padrão que determina o valor da corrida após n quilômetros rodados.

b) Qual foi o valor total pago por Antônio pela corrida?

c) Descreva a sequência de valores a cada quilômetro rodado, do 1º ao 12º quilômetro.

FATORAÇÃO

Fatorar é escrever na forma de produto (multiplicação). A fatoração é um assunto muito útil no trabalho com a Álgebra. É como "quebrar" algo grande em partes menores que, quando multiplicadas, voltam a formar o original. Veja essas duas situações:

1°) Observe como representamos o número 36:

$$36 = 4 \cdot 9$$

Como $4 = 2^2$ e $9 = 3^2$, podemos escrever:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

36 foi escrito como ***produto de fatores primos***.
$2^2 \cdot 3^2$ é a forma fatorada prima de 36.

Se escolhêssemos outra decomposição para 36:

$$36 = 12 \cdot 3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3}_{12} \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

a fatoração completa seria a mesma.

2°) Observe a expressão numérica:

$$5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$$

Ela não está escrita na forma de produto, pois há uma adição de parcelas.
No entanto, como o número 5 multiplica as duas parcelas, podemos usar a propriedade distributiva obtendo:

$$5 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 5 \cdot (3 + 7)$$

Escrevemos a expressão como produto de dois fatores: 5 e $(3+7)$, ou seja, fatoramos a expressão.

Você se lembra?

Os Números Primos são números naturais maiores do que 1 que possuem somente dois divisores, ou seja, são divisíveis por 1 e por eles mesmos. Exemplo:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...\}$$

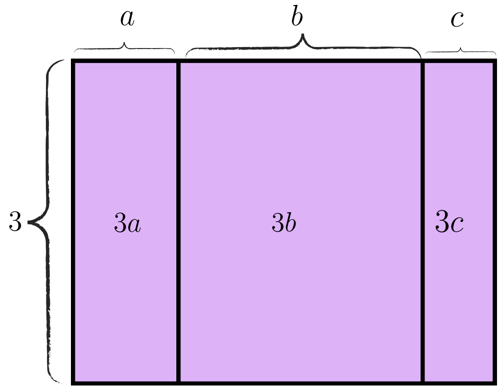
Você se lembra?

A propriedade distributiva estabelece que multiplicar um número pela soma ou pela subtração de dois ou mais termos é equivalente a multiplicar esse número por cada termo individualmente. Exemplo:

$$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$
$$2 \cdot 8 = 6 + 10$$
$$16 = 16$$

E o que tudo isso tem a ver com a Álgebra? Muitos polinômios podem ser fatorados: podemos escrevê-los como produto de outros polinômios, o que frequentemente permite simplificar expressões. Como? Acompanhe os casos a seguir.

IDENTIFICANDO O FATOR COMUM



A área desse retângulo é:

$$3a + 3b + 3c$$

(soma das áreas das figuras que o compõem) ou;

$$3(a + b + c)$$

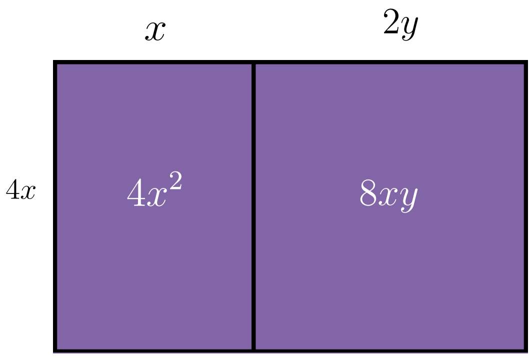
(produto da largura pelo comprimento)

Então,

$$\underbrace{3a + 3b + 3c}_{\text{Polinômio}} = \underbrace{3(a + b + c)}_{\text{Forma fatorada do polinômio}}$$

Observe ainda que, nesse exemplo, *3* é fator comum a todos os termos do polinômio $3a + 3b + 3c$. Na forma fatorada, *3* aparece com destaque. Dizemos que o ***fator comum*** 3 foi colocado em ***evidência***.

Nos próximos exemplos vamos identificar o fator comum e colocá-lo em evidência.



O polinômio que representa sua área é:

$$4x^2 + 8xy$$

$$4x^2 = 4x \cdot x \qquad 8xy = 4x \cdot 2y$$

Nesse caso, o ***fator comum*** a todos os termos do polinômio é $4x$. Colocando $4x$ em ***evidência***, obtemos a forma fatorada do polinômio:

$$4x^2 + 8xy = 4x(x + 2y) \qquad \begin{cases} 4x^2 \div 4x = x \\ 8xy \div 4x = 2y \end{cases}$$

A partir de agora vamos fazer a fatoração, e em seguida conferir reescrevendo o polinômio.

$A)\ 6a^2 + 8a$

Colocamos o fator comum $2a$ em evidência

$$6a^2 + 8a$$

$$2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \qquad 4 \cdot 2 \cdot a$$

$$6a^2 \div 2a = 3a$$
$$8a \div 2a = 4$$

$$6a^2 + 8a \;\rightarrow\; 2a(3a + 4)$$

Para conferir se a fatoração está correta, use a propriedade distributiva:

$$2a(3a+4) = 2a \cdot 3a + 2a \cdot 4 = 6a^2 + 8a$$

Voltamos ao polinômio original!

$B)\ 3x^2y + 6xy^2 - 2xy$

Colocamos o fator comum xy em evidência

$$3x^2y \quad + \quad 6xy^2 \quad - \quad 2xy$$

$$3 \cdot x \cdot x \cdot y \qquad 6 \cdot x \cdot y \cdot y \qquad 2 \cdot x \cdot y$$

$$3x^2y \div xy = 3x$$
$$6xy^2 \div xy = 6y$$
$$-2xy \div xy = -2$$

$$3x^2y + 6xy^2 - 2xy \quad \rightarrow \quad xy(3x + 6y - 2)$$

Para conferir se a fatoração está correta, use a propriedade distributiva:

$$xy(3x + 6y - 2) = (xy \cdot 3x) + (xy \cdot 6y) - (xy \cdot 2) = 3x^2y + 6xy^2 - 2xy$$

Voltamos ao polinômio original!

$C)\ 10p^3 + 15p^2$

Colocamos o fator comum $5p^2$ em evidência

$$10p^3 \quad + \quad 15p^2$$

$$2 \cdot 5 \cdot p \cdot p \cdot p \qquad 3 \cdot 5 \cdot p \cdot p$$

$$10p^3 \div 5p^2 = 2p$$
$$15p^2 \div 5p^2 = 3$$

$$10p^3 + 15p^2 \quad \rightarrow \quad 5p^2(2p+3)$$

Para conferir se a fatoração está correta, use a propriedade distributiva:

$$5p^2(2p+3) = (5p^2 \cdot 2p) + (5p^2 \cdot 3) = 10p^3 + 15p^2$$

Voltamos ao polinômio original!

AGRUPAMENTO

Observe o polinômio $ax + ay + bx + by$. Não há fator comum a todos os termos. No entanto podemos encontrar dois grupos onde existe fator comum.

$$\underbrace{ax + ay}_{fator\ \ comum\ \ a} + \underbrace{bx + by}_{fator\ \ comum\ \ b}$$

Agora faremos a fatoração em cada grupo.

$$a(x+y)+b(x+y)$$

Observe que agora temos $(x+y)$ como fator comum. Assim, procedemos novamente com a fatoração. $a(x+y)+b(x+y)$

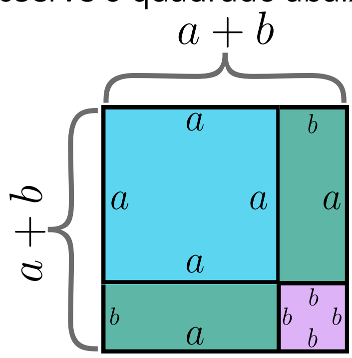
$$a(x+y)+b(x+y) \quad \rightarrow \quad (x+y)\cdot(a+b)$$

PRODUTOS NOTÁVEIS

Produtos notáveis são multiplicações de polinômios que aparecem com frequência em problemas de álgebra. Uma maneira interessante para compreender os produtos notáveis é por meio da geometria. Os produtos notáveis são: o ***quadrado da soma***, o ***quadrado da diferença*** e o ***produto da soma pela diferença*** de dois termos.

Quadrado da Soma

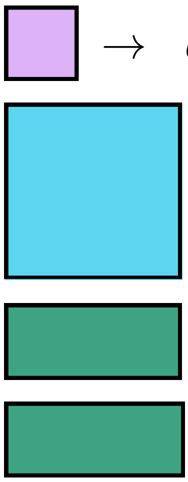
Observe o quadrado abaixo:



Somando todas as áreas, chegamos ao polinômio que representa a área do quadrado maior de lado $a+b$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Vamos obsevar as áreas dos dois quadrados e dos dois retângulos.



$\rightarrow \quad b \cdot b = b^2$

$\rightarrow \quad a \cdot a = a^2$

$\rightarrow \quad a \cdot b = ab$

$\rightarrow \quad a \cdot b = ab$

Fazendo o produto algébrico também chegamos a esse resultado.

$$= (a+b)^2 =$$

$$= (a+b)\cdot(a+b) =$$

$$= a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b) =$$

$$= a^2 + ab + ba + b^2 =$$

$$= \boxed{a^2 + 2ab + b^2}$$

Qual seria a área desse quadrado maior (formado pelas 4 figuras) se os valores de ***a*** e ***b*** fossem, respectivamente, ***4*** cm e ***2*** cm?
Para descobrir basta fazer a substituição das variáveis e calcular o valor numérico.

$$a^2 + 2ab + b^2 =$$

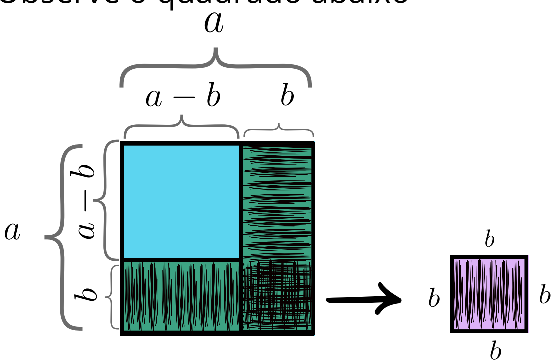
$$4^2 + 2\cdot 4\cdot 2 + 2^2 =$$

$$16 + 16 + 4 =$$

$$36\ cm^2$$

Quadrado da Diferença

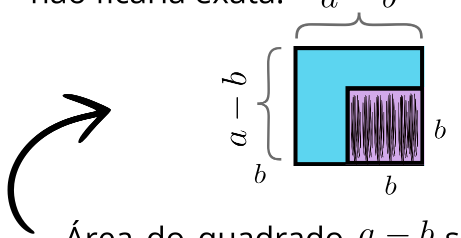
Observe o quadrado abaixo



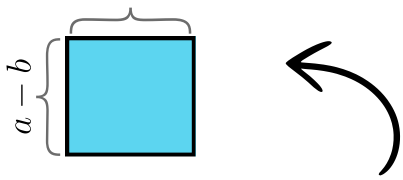
Ao subrair os dois retângulos de área ***ab,*** acabamos retirando um quadradinho de lado **b** a mais.
Repondo esse quadradinho de lado ***b*** temos a seguinte expressão:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Se não repormos esse quadradinho de lado **b**, a área do quadrado $a-b$ não ficaria exata.



Área do quadrado $a-b$ sem a reposição do quadradinho de lado ***b***.



Área do quadrado $a-b$ com a reposição do quadradinho de lado **b**.

Fazendo o produto algébrico também chegamos a esse resultado.

$$(a-b)^2 =$$

$$(a-b)\cdot(a-b) =$$

$$a(a-b) - b(a-b) =$$

$$a^2 - ab - ba + b^2 =$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

Qual seria a área desse quadrado se os valores de ***a*** e ***b*** fossem, respectivamente, ***5*** cm e ***3*** cm?
Para descobrir basta fazer a substituição das variáveis e calcular o valor numérico.

$$a^2 - 2ab + b^2 =$$

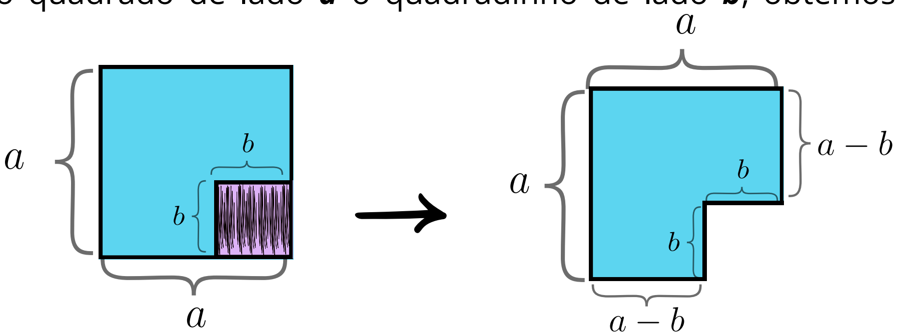
$$5^2 - 2\cdot 5\cdot 3 + 3^2 =$$

$$25 - 30 + 9 =$$

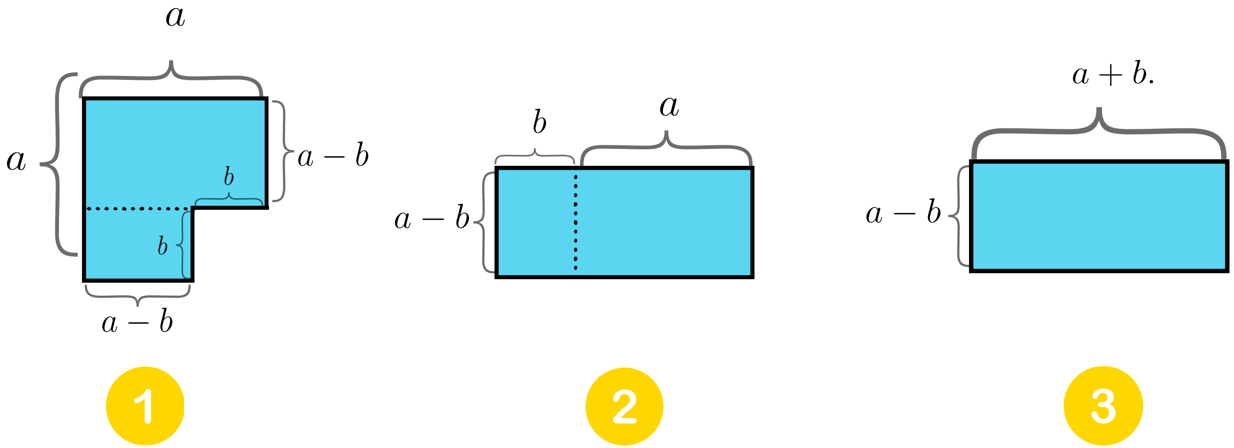
$$4\ cm^2$$

Produto da soma pela diferença de dois termos

Ao subrair do quadrado de lado ***a*** o quadradinho de lado ***b***, obtemos o polígono abaixo.



Podemos reagrupar esse polígono em um retângulo de lados $a - b$ e $a + b.$
Veja a sequência de figuras (ordem 1, 2 e 3) para entender melhor:



Fazendo o produto algébrico também chegamos a uma diferença de quadados.

$$(a+b)\cdot(a-b) =$$

$$= a\cdot(a-b) + b\cdot(a-b) =$$

$$= a^2 - ab + ab - b^2 =$$

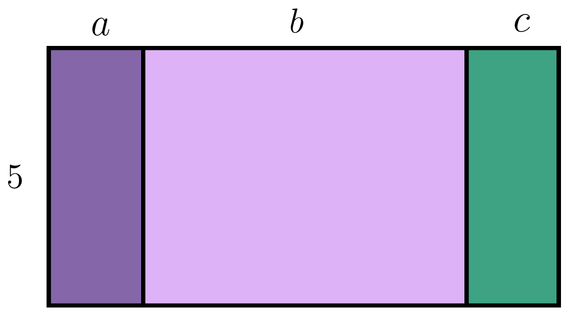
$$= \boxed{a^2 - b^2}$$

Qual seria a área desse retângulo se os valores de ***a*** e ***b*** fossem, respectivamente, **9** cm e ***6*** cm?
Para descobrir basta fazer a substituição das variáveis e calcular o valor numérico.

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - b^2\\ &= 9^2 - 6^2\\ &= 81 - 36\\ &= 45\ cm^2\end{aligned}$$

Exercicios Resolvidos

1) Observe a figura:



A área total do retângulo é $5a + 5b + 5c$. Qual é a forma fatorada dessa expressão?

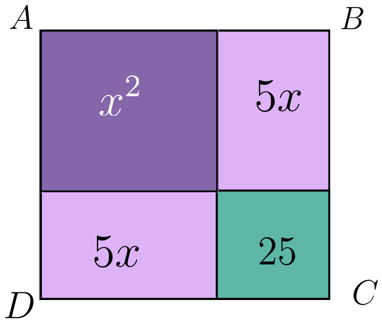
RESOLUÇÃO:
Observe que o fator comum nos três termos é o 5. Logo colocaremos o 5 em evidência. Vamos dividir cada termo da expressão algébrica por 5. O resultado dessa divisão será colocado entre parêntesis.

$$5a \div 5 = a$$
$$5b \div 5 = b$$
$$5c \div 5 = c$$

$$\boxed{5a + 5b + 5c \quad \rightarrow \quad 5(a + b + c)}$$

Portanto a forma fatorada será: $5(a + b + c)$.

2) Na figura abaixo temos um quadrado grande (ABCD) formado por quatro polígonos: dois retângulos e dois quadrados menores.



A) Qual é a área do quadrado ABCD?

RESOLUÇÃO: Basta somar as áreas das quatro partes indicadas.

$$x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$$

B) Qual é a área desse quadrado quando $x = 3cm$?

RESOLUÇÃO: Faremos a substituição da variável x por 3 .

$$\begin{aligned} x^2+10x+25 &= \\ 3^2+10\cdot 3+25 &= \\ 9+30+35 &= \\ & 74\ cm^2 \end{aligned}$$

3) Pedro usou a fatoração da diferença de quadrados para calcular facilmente 2001^2-1999^2. Qual a resposta correta encontrada por Pedro?

RESOLUÇÃO:
Observe que temos nessa expressão uma diferença de quadrados. Portanto basta aplicar o produto notável da soma pela diferença de dois termos.

$$2001^2-1999^2=(2001+1999)\cdot(2001-1999)=4000\cdot 2=8000.$$

4) Um contador em uma empresa foi questionado sobre o número de relatórios que ele revisou em determinado dia. Ele respondeu:

"O número de relatórios que revisei é igual a $(14,5)^2-(9,5)^2$ *".*

Qual foi total de relatórios revisados?

RESOLUÇÃO:
Para resolver a questão usando o produto da soma pela diferença, aplicamos a fórmula geral:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

O contador afirmou que o número de relatórios revisados foi igual a $(14,5)^2-(9,5)^2$. Podemos aplicar a fórmula com $a=14,5\ e\ b=9,5.$ Substituindo na fórmula e calculando os valores:

$$\begin{aligned} &(14,5+9,5)\cdot(14,5-9,5) = \\ &= 24\cdot 5 = \\ &= 120 \end{aligned}$$

Foram revisados 120 relatórios.

5) No Espírito Santo, a produção de rapadura é uma tradição muito valorizada, especialmente em comunidades rurais. Em uma fazenda, os produtores estão organizando a distribuição de rapaduras em dois tipos de caixas: caixas grandes e caixas pequenas. Um produtor percebeu que a diferença de quantidades de rapadura armazenada nas duas caixas pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$(3y-4)(3y+4)-(3y-4)^2$$

A) Simplifique essa expressão utilizando os conceitos de produtos notáveis para encontrar o polinômio que representa a diferença de quantidades de rapadura armazenada entre os dois tipos de caixas.

RESOLUÇÃO:

Calcularemos o valor da expressão algébrica: $(3y-4)(3y+4)\ -(3y-4)^2$
Sabemos que o primeiro produto é o produto da soma pela diferença, então temos que:
O termo $-(3y-4)^2$ é o simétrico de um produto notável conhecido como quadrado da diferença. Desenvolvendo o termo, temos que:

$$(3y)^2-4^2-(3y-4)^2 \Rightarrow 9y^2-16-(3y-4)^2$$
$$9y^2-16-(9y^2-2\cdot 3y\cdot 4+16)=$$
$$=9y^2-16-9y^2+24y-16=$$
$$=24y-32$$

O polinômio que representa a diferença de quantidades de rapadura armazenada entre os dois tipos de caixas é $24y-32$.

B) Calcule o valor numérico da diferença de quantidades de rapadura entre as caixas quando $y=5$.

RESOLUÇÃO: Substituindo o valor de y no polinômio $24y-32$, temos:

$$24\cdot 5-32=$$
$$=120-32=$$
$$=88$$

O valor numérico é 88.

VÍDEO

Produtos notáveis com Geogebra
https://www.geogebra.org/m/C5rAMAQh

Fatoração de expressões algébricas
https://www.youtube.com/watch?v=ppJEnx_jVI0

Atividades

ATIVIDADE 1

Identifique o fator comum dos polinômios a seguir.

A) $2a + 2b$

B) $10ab + 5b$

C) $18x^3y^2 - 12x^2y$

D) $ax + bx + cx + dx$

E) $3bm - 3bx - 3bn$

F) $2x^2y + 8xy - 4xyz$

ATIVIDADE 2

Observe os polinômios abaixo. Identifique o fator comum e coloque-o em evidência.

A) $6m + 6n$

B) $5r + 10s$

C) $3w + 6y + 9z$

D) $c^2 + c^3 + c^4 + c^5$

E) $-2q^2 - 4q^3 - 6q^4 - 8q^5$

F) $-15p^5 - 35p^2y + 25p^3$

ATIVIDADE 3

Fatore os seguintes polinômios usando a fatoração por agrupamento.

A) $x^2 - 2x + yx - 2y$

B) $a^2 + 3a - 2a - 6$

C) $xb - 3x + yb - 3y$

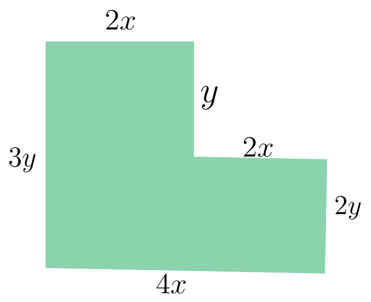
D) $xy - 2x + y - 2$

E) $2x + 2 + 3bx + 3b$

F) $x^2 - 3x + yx - 3y$

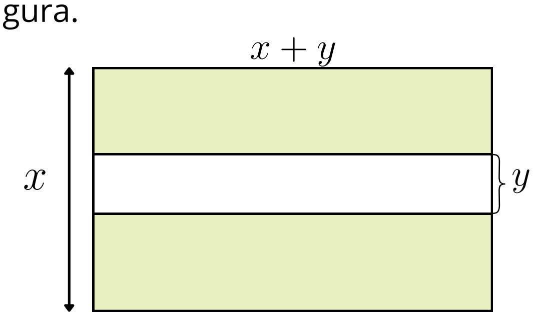
ATIVIDADE 4

A figura a seguir representa um canteiro, com as medidas de seus lados indicadas. Determine o polimônio que represente o perímetro desse canteiro.



ATIVIDADE 5

A figura é formada por retângulos. Escreva uma expressão simplificada para a área da parte colorida da figura.



ATIVIDADE 6

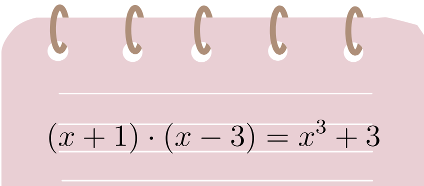
Escreva os polinômios abaixo de forma fatorada.

A) $y^2 - 49$ B) $x^2 - 64$ C) $y^2 - 16$ D) $25x^2 - 100$

E) $16z^2 - 9$ F) $4a^2 - 25$ G) $m^4 - 36$ H) $4 - 49w^2$

ATIVIDADE 7

Alessandra efetuou a multiplicação $(x+1)\cdot(x-3)$ no caderno.



A resposta dada por Alessandra está correta? Faça você mesmo a resolução e verifique se a resposta dada por ela está correta.

ATIVIDADE 8

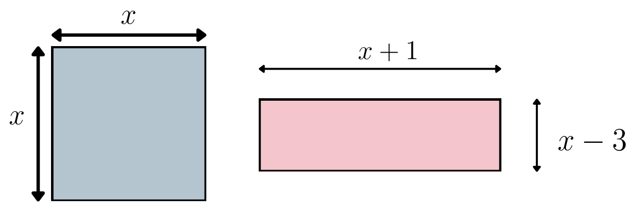
Desenvolva os produtos notáveis abaixo.

A) $(x+y)^2$ B) $(2a+b)^2$ C) $(x-5y)^2$ D) $\left(3-a^3\right)^2$

E) $(f-3)^2$ F) $(-2g-5)^2$ G) $(-yz-10)^2$ H) $(-4h-3j)^2$

ATIVIDADE 9

A área do quadrado excede a área do retângulo em $13\ cm^2$.



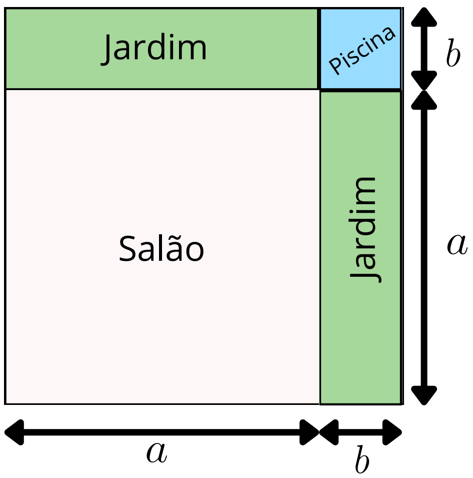
A) Qual é a medida do lado do quadrado?

B) Qual é o perímetro do quadrado?

C) Qual é o perímetro do retângulo?

ATIVIDADE 10

O desenho representa a planta de um clube construído sobre um terreno quadrado.



Indique os locais que representam as expressões:

A) a^2

B) b^2

C) $2ab$

D) $(a+b)^2$

EQUAÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

A equação polinomial do 2º grau é uma expressão algébrica no formato geral $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$. Essa equação é chamada de "do 2º grau" porque o maior expoente da variável x é 2. Ela aparece com frequência em diversos contextos, como na física, na economia e na engenharia, pois permite modelar situações envolvendo áreas, trajetórias, lucros, entre outros. Nos exemplos a seguir, destacamos os coeficientes de cada equação.

a) $5x^2 - 2x + 3 = 0$
Coeficientes: $a = 5$, $b = -2$ e $c = 3$.

b) $-x^2 + 4x - 7 = 0$
Coeficientes: $a = -1$, $b = 4$ e $c = -7$.

c) $x^2 + x - 9 = 0$
Coeficientes: $a = 1$, $b = 1$ e $c = -9$.

RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

Um número é considerado raiz (ou solução) de uma equação quando, substituído no lugar da incógnita, torna a equação uma afirmação verdadeira. Por exemplo, na equação $\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0}$, substituindo x por 2, obtemos:

$$(2)^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$
$$4 - 10 + 6 = 0$$
$$0 = 0$$

Mas será que 2 é a única raiz da equação? Para responder a essa pergunta, é importante lembrar que uma equação do 2º grau tem duas raízes. Em alguns casos, ambas pertencem ao conjunto dos números reais; em outros, podem não ser reais. No exemplo da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, já vimos que $x = 2$ é uma solução. Se quisermos achar a outra raiz, como fazemos? Para isso vamos relembrar alguns conteúdos.

Fatoração

Uma das formas de encontrar as raízes de uma equação do 2º grau completa é através da fatoração.

Vamos considerar a equação **$x^2 + 8x + 16 = 49$**. O 1º membro dessa equação é um trinômio quadrado perfeito. Assim, podemos reescrevê-lo da seguinte forma:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4) = (x + 4)^2$$

Assim, $(x + 4)^2$ é a forma fatorada de $x^2 + 8x + 16$. Agora, voltamos à equação e escrevemos o 1º membro na forma fatorada:

$$x^2 + 8x + 16 = 49$$
$$(x + 4)^2 = 49$$

Como há dois números que, elevados ao quadrado, são iguais a 49, temos:

$$\begin{array}{ccc} x+4=+\sqrt{49} & & x+4=-\sqrt{49} \\ x+4=7 & \text{ou} & x+4=-7 \\ x=7-4 & & x=-7-4 \\ x=3 & & x=-11 \end{array}$$

Portanto, os números 3 e − 11 são as raízes da equação $x^2 + 8x + 16 = 49$.

Resolvendo equações do tipo $ax^2 + c = 0$

Agora, vamos avançar nesse conhecimento, explorando com mais profundidade a resolução de equações, especialmente as do 2º grau com uma incógnita, já que esse tipo de equação é bastante útil para representar e resolver diversos problemas do cotidiano e da matemática. A equação do 2º grau incompleta do tipo **$ax^2 + c = 0$** é caracterizada pela ausência do termo com a incógnita elevada à primeira potência, ou seja, o termo **bx**. Observe abaixo um exemplo de resolução.

$$x^2 - 49 = 0$$
$$x^2 = 49$$
$$x = \pm\sqrt{49}$$
$$x = \pm 7$$
$$x = -7 \text{ ou } x = 7$$

Com base na resolução, concluímos que os valores $x = -7$ e $x = 7$ satisfazem a equação $x^2 - 49 = 0$. Portanto, -7 e 7 são as raízes reais da equação, pois ao serem substituídos no lugar da incógnita tornam a igualdade verdadeira.

Observe agora o novo exemplo:

$$3x^2 + 27 = 0$$
$$3x^2 = -27$$
$$x^2 = \frac{-27}{3}$$
$$x^2 = -9$$

Como não existe um número real x que elevado ao quadrado seja igual a −9, essa equação não tem solução real.

Resolvendo equações do tipo ax² + bx = 0

Agora, vamos aprofundar ainda mais nosso estudo sobre as equações do 2º grau, focando em um tipo específico: aquelas que possuem uma incógnita e estão na forma incompleta **$ax^2 + bx = 0$**, ou seja, com ausência do termo constante **c**. Esse tipo de equação também aparece em diversas situações do cotidiano e pode ser resolvido com técnicas simples de fatoração. Nesses casos, colocamos a incógnita x em evidência e resolvemos a equação por meio do produto de fatores. A seguir, veremos um exemplo de como resolver esse tipo de equação.

$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x-4) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 4 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4$$

Resolvendo equações por soma e produto

Para aplicar a técnica de soma e produto identificamos que a soma das raízes é igual a $\frac{-b}{a}$ e o produto das raízes é igual a $\frac{c}{a}$. Com esses dois valores, buscamos dois números que, ao mesmo tempo, tenham como resultado o valor da soma e o produto correspondente. Quando encontrados, esses dois números são as raízes da equação. Essa estratégia é especialmente útil quando os coeficientes são simples e os números envolvidos são inteiros ou fáceis de identificar mentalmente.

Exemplo: Encontre as raízes reais da equação abaixo.

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Queremos encontrar dois números que somem 7 e tenham produto igual a 12. Os números 3 e 4 satisfazem essa condição, pois 3 + 4 = 7 e 3 . 4 = 12. Portanto, as raízes da equação são: x = 3 e x = 4.

Resolvendo equações completas ($ax^2 + bx + c = 0$) pelo método da cruzadinha

O QUE É O MÉTODO DA CRUZADINHA?

Imagine que a equação do 2º grau é um pequeno mistério… e você precisa descobrir quais números estão escondidos dentro dela.

O ***Método da Cruzadinha*** é uma estratégia rápida e inteligente que usamos para desmontar algumas equações do 2º grau e encontrar suas raízes.

Com ele, transformamos a equação em um produto de dois termos mais simples. Dessa forma, o problema fica bem mais fácil de resolver.

Então, vamos aprender:

- ✓ quando usar o método;
- ✓ como montar a cruzadinha;
- ✓ como fatorar a equação;
- ✓ como descobrir as raízes.

PREPARE-SE: DEPOIS QUE VOCÊ PEGA O JEITO, VIRA QUASE UM JOGO.

QUANDO USAR ESSE MÉTODO

O Método da Cruzadinha é poderoso, mas não serve para qualquer equação.

Ele funciona melhor quando:

- a equação está na forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- o trinômio pode ser fatorado
- o delta (Δ) é um quadrado perfeito

⚠️ Se você tentar e não “encaixar”, não é erro seu — provavelmente é caso para usar outro método.

PASSO A PASSO DO MÉTODO

Passo 1 — Identifique os coeficientes

Exemplo:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

Aqui:

a = 3 **b = 4** **c = 1**

Passo 2 — Decomposição dos termos das extremidades

Segundo passo é decompor o termo quadrático (***ax²***) e o termo constante (***c***) em dois fatores que, multiplicados, resultem neles mesmos.
Você pode decompor:

$$3x^2 \text{ em } 3x \cdot x$$

$$1 \text{ em } 1 \cdot 1$$

Passo 3 — Organização em colunas

Posicione os fatores encontrados em duas colunas verticais. A primeira coluna contém os fatores de ***ax²*** e a segunda coluna os fatores de ***c.***
Desta forma:

$$\begin{array}{cc} 3x & 1 \\ x & 1 \end{array}$$

Passo 4 — Multiplicação cruzada (A "Cruzadinha")

Multiplique os valores de forma diagonal (cruzada) para verificar se a combinação está correta.

- ***Multiplique o termo superior da primeira coluna pelo inferior da segunda.***
- ***Multiplique o termo inferior da primeira coluna pelo superior da segunda.***

A "Cruzadinha"

$$\begin{array}{cc} 3x & 1 \\ x & 1 \end{array}$$

Passo 5 — Verificação do termo central

Some os resultados das duas multiplicações cruzadas. O resultado dessa soma deve ser exatamente igual ao termo central (***bx***) da equação, inclusive o sinal.

- ***Se a soma não bater com o termo central, você deve tentar outras combinações de números ou inverter a ordem e os sinais até encontrar o valor correto.***

$$\begin{array}{cc} 3x & 1 \\ x & 1 \end{array}$$

$$3x \cdot 1 = 3x$$

$$x \cdot 1 = x$$

$$3x + x = 4x$$

termo central (bx)

Passo 6 — Montagem dos fatores (Leitura por linhas)

Uma vez validada a soma, a fatoração é escrita seguindo as linhas horizontais, e não a diagonal usada no rascunho.

- A primeira linha forma o primeiro parêntese.
- A segunda linha forma o segundo parêntese.

Atenção: É importante pegar os valores na horizontal, pois em algumas equações a leitura diagonal pode alterar o resultado final.

No exemplo ficaria assim:

$$(3x + 1) \quad (x + 1)$$

PASSO A PASSO DO MÉTODO

Passo 7 — Resolução da equação

Com a forma fatorada pronta, basta igualar cada fator a zero para encontrar as raízes da equação x_1 e x_2.
Isso transforma uma equação do 2º grau em duas manipulações simples de 1º grau.
No exemplo ficaria assim:

- Primeira linha: $(3x+1)$
- Segunda linha: $(x+1)$

A equação fatorada fica: $(3x+1)\,(x+1)=0$.

Quando um produto é igual a zero, pelo menos um dos fatores tem que ser zero. Assim:

$3x+1=0$ ou $x+1=0$

Passo 8 — Cálculo das raízes

Para encontrar os valores de x, devemos igualar cada um dos fatores a zero, transformando-os em equações simples do 1º grau.

Primeira raiz (x_1):

$$3x+1=0$$
$$3x=-1$$
$$x=-\frac{1}{3}$$

Segunda raiz (x_2):

$$x+1=0$$
$$x=-1$$

As raízes da equação são

$$x_1=-\frac{1}{3} \quad e \quad x_2=-1$$

Vamos resolver a equação abaixo, usando o metódo da cruzadinha.

$$6x^2-5x-6=0$$

- Devemos escolher fatores para $6x^2$ e para −6.
- Para $6x^2$, vamos testar $2x$ e $2x$.
- Para −6, vamos testar −3 e 2.
- Fazemos a "cruzadinha" para ver se a soma resulta no termo central $-5x$:

2x −3
3x 2

$$3x.(-3)=-9x$$
$$2x.2=4x$$
$$-9x+4x=-5x$$

Como o resultado foi exatamente o termo central da equação, a combinação de números e sinais está correta.

Assim, a equação $6x^2-5x-6=0$ escrita na forma fatorada é $(2x-3)(3x+2)=0$

Para finalizar, resolvemos as duas equações simples do 1º grau resultantes:

Primeira raiz (x_1):

$$2x-3=0$$
$$2x=3$$
$$x=\frac{3}{2}$$

Segunda raiz (x_2):

$$3x+2=0$$
$$3x=-2$$
$$x=-\frac{2}{3}$$

As raízes da equação são:

$$x_1=\frac{3}{2} \; e \; x_2=-\frac{2}{3}$$

Exercícios Resolvidos

1) A equação $x^2 + 3x = 0$:

a) não tem raízes reais.
b) tem uma raiz nula e outra negativa.
c) tem uma raiz nula e outra positiva.
d) tem duas raízes reais e simétricas.

RESOLUÇÃO:
Para resolver uma equação do segundo grau incompleta, na qual o termo constante está ausente, o primeiro passo é observar que os dois termos restantes possuem a incógnita em comum. Isso permite que a variável seja colocada em evidência, ou seja, usamos a técnica da fatoração. Ao fatorar a expressão, transformamos a equação em um produto de dois fatores. Em seguida, aplicamos a chamada "regra do produto nulo", que diz que se o produto de dois fatores é igual a zero, então pelo menos um deles deve ser zero. Assim, resolvemos separadamente cada parte do produto e encontramos os valores da incógnita que tornam a equação verdadeira. Esses valores são as raízes da equação.

$$x^2 + 3x = 0$$
$$x(x + 3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x + 3 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

Portanto, as raízes da equação são x = 0 e x = -3. Resposta correta letra B.

2) Escreva no caderno uma equação do 2º grau para representar a situação abaixo. Em seguida, resolva essa equação.

“O quadrado de uma quantia em reais menos R$ 45,00 é igual a R$ 396,00. Qual é essa quantia?”

RESOLUÇÃO:
Para resolver essa situação, começamos representando a quantia desconhecida por uma letra, ou seja, uma variável. Com base nas informações do enunciado, montamos uma equação do 2º grau. O problema afirma que o quadrado dessa quantia, subtraído de 45 reais, é igual a 396 reais. A partir disso, construímos a equação, isolamos a variável e, por fim, aplicamos a raiz quadrada para encontrar a solução.

$$x^2 - 45 = 396$$
$$x^2 = 396 + 45$$
$$x^2 = 441$$
$$x = \pm\sqrt{441}$$
$$x = \pm 21$$

Como a quantia representa um valor em dinheiro (quantidade em reais), descartamos o valor negativo. Portanto, a quantia é de R$ 21,00.

3) Luís tem um terreno em forma de quadrado. Ele pretende comprar um terreno de 90 m² que faz divisa com o dele. Desse modo, ele ficaria com um terreno retangular de 414 m². A medida do lado do terreno em forma quadrangular de Luís é:

A) 414
B) 324
C) 30
D) 18

RESOLUÇÃO:
Sabemos que Luís tem um terreno quadrado, ou seja, com lados iguais. Ele pretende comprar mais 90 m², e o novo terreno (já com a área aumentada) terá 414 m². Subtraindo a área adquirida da área total, descobrimos a área original do terreno. Como é um quadrado, basta encontrar a raiz quadrada dessa área para descobrir a medida do lado (que chamaremos de x).

Área original do terreno:
$414m^2 - 90m^2 = 324m^2$

$$x^2 = 324$$
$$x = \pm\sqrt{324}$$
$$x = \pm 18$$

Iremos considerar somente o valor positivo, então a medida do lado do terreno de Luís é 18 metros.

Agora vamos resolver com o método da cruzadinha.

- Área do terreno original (quadrado): x² (onde x é a medida do lado).
- Área comprada: 90 m².
- Área total final: 414 m².

A equação é:

$$x^2 + 90 = 414$$
$$x^2 + 90 - 414 = 0$$
$$x^2 - 324 = 0$$ *(Note que aqui o termo central bx é igual a 0x)*

Aplicando o método da cruzadinha passo a passo:

- Decomposição dos termos:

x² em x·x e o termo constante −324 em dois fatores que, multiplicados, resultem nele e que a soma cruzada seja zero. Esses fatores são 18 e −18.

- Verificação (Cruzadinha):

x   −18
x   18

$$x.(-18) = -18x$$
$$x.18 = 18x$$
$$-18x + 18x = 0x$$

- Montagem dos fatores: Escrevemos os fatores lendo as linhas horizontais do rascunho:

Primeira linha: $(x + 18)$ Segunda linha: $(x - 18)$

x + 18 = 0
x = −18

x −18 = 0
x = 18

Como se trata de uma medida de comprimento de um terreno, desconsideramos o valor negativo. Portanto, a medida do lado do terreno original de Luís é 18 metros.

4) (Enem 2016) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função f(t) = −2t²+ 120t (em que t é expresso em dia e t = 0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no:

A) 19º dia. B) 20º dia. C) 29º dia. D) 30º dia. E) 60º dia.

RESOLUÇÃO:
Para resolver este problema utilizando o método da cruzadinha, precisamos primeiro organizar a função dada em uma equação do 2º grau.

1. Montagem da Equação
A Secretaria de Saúde definiu que a dedetização ocorreria quando o número de infectados *(f(t))* chegasse a 1.600. Portanto: $-2t^2+120t-1600=0.$

Organizando para a forma padrão $(ax^2+bx+c=0)$:

$$-2t^2+120t-1600=0$$

Para facilitar o rascunho da cruzadinha, podemos simplificar a equação dividindo todos os termos por −2:

$$t^2-60t+800=0$$

2. Aplicando o Método da Cruzadinha
Decomposição do termo quadrático (*t²*): Decompondo em dois fatores, temos *t* e *t.*
Decomposição do termo constante (800):
Testamos −20 e −40 (pois 20×40 = 800 e 20+40 = 60).

t	−40	$-40t$
t	-20	$-20t$

$$-40t+(-20t)=-60t$$

- Montagem dos fatores: Escrevemos os fatores lendo as linhas horizontais do rascunho:

Primeira linha: $(t-40)$

$$t-40=0$$
$$t=40$$

Segunda linha: $(t-20)$

$$t-20=0$$
$$t=20$$

O número de infectados atinge a marca de 1.600 pessoas em dois momentos: no 20º dia (enquanto a epidemia cresce) e no 40º dia (quando ela começa a diminuir). Como a dedetização deve ocorrer assim que a marca for atingida pela primeira vez para conter a epidemia, a segunda dedetização começou no 20º dia.

Material Extra

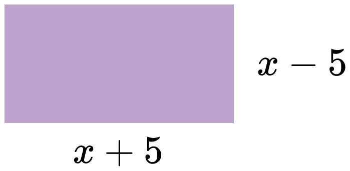
VÍDEO

Equação do 2º grau
https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=25

Atividades

ATIVIDADE 1

O retângulo abaixo tem área de 15 m². Sabendo que suas dimensões são $x+5$ e $x-5$ a equação polinomial do segundo grau que permite calcular o valor de x é:



A) $x^2-10x-25=15$

B) $x^2-40=0$

C) $(x+5)^2=15$

D) $x^2+25=15$

ATIVIDADE 2

Para valorizar o espaço urbano e atender melhor à comunidade, será construída uma área de lazer em um terreno quadrado localizado na praça central do bairro. Inicialmente, o projeto previa lados com comprimento de x metros. Após sugestões dos moradores, cada lado foi aumentado em 4 metros. Com essa modificação, a área total do terreno passou a ser de 100 m².

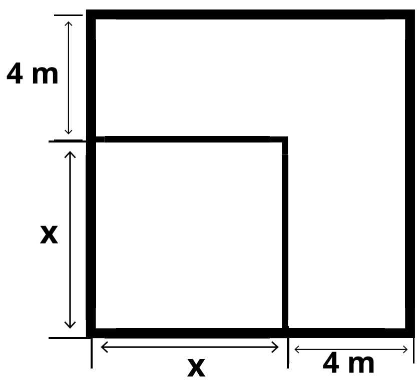
A equação polinomial do segundo grau que permite calcular o valor de x, é:

A) $x^2+8x-116=0$

B) $x^2+4x-100=0$

C) $x^2+4x-84=0$

D) $x^2+8x-84=0$



ATIVIDADE 3

Observe a equação no quadro abaixo.

$$\boxed{3x^2 - 48 = 0}$$

As raízes dessa equação são:

A) -4 e 4.
B) -8 e 8.
C) 0 e 4.
D) 0 e 8.

ATIVIDADE 4

Observe a equação no quadro abaixo.

$$\boxed{5x^2 + 10x = 0}$$

As raízes dessa equação são:

A) -5 e 0.
B) 0 e 5.
C) -2 e 0.
D) 0 e 2.

ATIVIDADE 5

Pedro resolveu a seguinte equação do 2º grau $\boxed{x^2 + 4x - 21 = 0}$ e acertou a resposta.

As raízes encontradas por ele foram:

A) –21 e 4.

B) –7 e 3.

C) –3 e 7.

D) 17 e 21.

ATIVIDADE 6

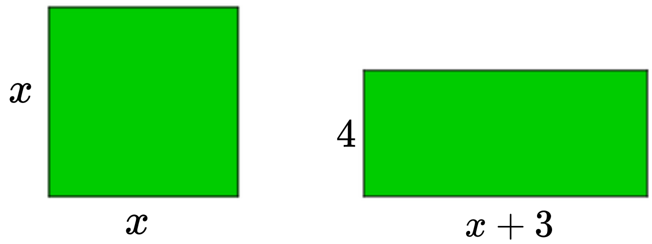
Na construção de dois jardins em uma praça, um em formato quadrado e outro em formato retangular, foi decidido que ambos deveriam ter a mesma área. O retângulo possui largura igual a 4 metros e comprimento igual a $x + 3$ metros. O quadrado tem lados medindo x metros. Sabendo que as áreas dos dois jardins são iguais, qual é o valor de x?

A) 5 metros

B) 6 metros

C) 8 metros

D) 10 metros



ATIVIDADE 7

Ana quer montar um canteiro de flores em formato retangular, onde o comprimento seja 5 metros maior que a largura. Ela sabe que a área total do canteiro será de 84 m². Qual deve ser a medida da largura desse canteiro?

A) 9 metros
B) 8 metros
C) 7 metros
D) 6 metros

ATIVIDADE 8

Bruno deseja pintar uma parede retangular, cujo comprimento é 2 metros a mais que sua altura. Sabendo que a área da parede é 120 m², qual é a medida da altura?

A) 10 metros
B) 12 metros
C) 15 metros
D) 20 metros

ATIVIDADE 9

Na escola de João, será construído um jardim em formato quadrado, com cada lado medindo x metros. Após a aprovação do projeto, a equipe decidiu aumentar o tamanho do jardim, acrescentando 3 metros a cada lado, para incluir um caminho com bancos ao redor. Com esse aumento, a nova área total do jardim passou a ser 121 m². Sabendo disso, qual era a medida original do lado do jardim, antes do acréscimo?

A) 8 metros
B) 9 metros
C) 10 metros
D) 11 metros

ATIVIDADE 10

Você aprendeu que muitas situações do cotidiano podem ser representadas por uma equação polinomial do 2º grau.

Agora é sua vez!

Crie um problema contextualizado que envolva uma situação em que seja necessário modelar com uma equação do segundo grau.

Resolva o problema criado, apresentando os cálculos e a solução final.

ATIVIDADE 11

Um designer de interiores está encomendando um tapete retangular. Ele sabe que a área do tapete é dada pela expressão $x^2 - 7x + 12$. Para que o tapete se ajuste perfeitamente ao espaço disponível, a área deve ser igual a zero em termos de cálculo de projeto . Quais são as possíveis medidas de x para este tapete? Utilize o método da cruzadinha para encontrar a resposta.

ATIVIDADE 12

Utilizando o método da cruzadinha, resolva:

a) $9x^2 - 6x + 1 = 0.$ b) $2x^2 + 3x + 1 = 0.$

FÓRMULA RESOLUTIVA DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Anteriormente, vimos como resolver equações do 2º grau quando algum dos termos é igual a zero, conhecidas como incompletas. Agora, vamos estudar a resolução das equações do 2º grau completas, ou seja, aquelas em que os três coeficientes (a, b e c) são diferentes de zero.

Existem diferentes métodos para encontrar as raízes desse tipo de equação, como a fatoração e a conhecida fórmula resolutiva. A seguir, deduziremos a fórmula resolutiva utilizando o método de completar quadrados.

Inicialmente, dividimos todos os termos da equação por 'a' e deixamos o termo independente isolado no segundo membro.

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Agora, vamos aplicar o método de completar quadrado para transformar a equação em uma forma que facilite a resolução.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

Adicionamos o mesmo valor em ambos os lados

Colocamos o primeiro membro da equação na forma fatorada e realizamos os passos necessários até deixarmos a incógnita x isolada.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A expressão “$b^2 - 4ac$” pode ser substituída pelo símbolo Δ (lê-se “delta”), conhecido como discriminante da equação.

CALCULANDO AS RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

- **Δ > 0**

Por meio da fórmula resolutiva, encontraremos as raízes da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$. Nesse caso, os coeficientes são: a = 1, b = -3 e c = 2. A partir disso, calculamos o valor do discriminante da equação.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

Com isso:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Sendo assim:

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto, as raízes dessa equação são 1 e 2. Podemos notar que são duas raízes reais distintas.

Para verificar se a resolução está correta, substituímos os valores das raízes na equação.

$$\boxed{x_1 = 2}$$

$$(2)^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$$
$$4 - 6 + 2 = 0$$
$$0 = 0$$

$$\boxed{x_2 = 1}$$

$$(1)^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$$
$$1 - 3 + 2 = 0$$
$$0 = 0$$

De fato, os valores 1 e 2 são as raízes da equação.

- **Δ = 0**

Agora, vamos resolver a equação do 2º grau $x^2 - 6x + 9 = 0$ e observar com atenção o valor do discriminante. Ao analisarmos essa equação, perceberemos um caso especial quando o delta é igual a zero. Nesse caso, os coeficientes são: a = 1, b = -6 e c = 9. A partir disso, calculamos o valor do discriminante da equação.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Com isso:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2}$$

Sendo assim:

$$x_1 = \frac{6+0}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{6-0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Quando o valor do discriminante é igual a zero, a equação do segundo grau admite duas raízes reais e coincidentes, ou seja, temos uma solução dupla. Nesse caso específico, ambas as raízes são iguais a 3.

- **Δ < 0**

Agora, vamos resolver a equação do 2º grau $x^2 + 4x + 5 = 0$ e observar com atenção o valor do discriminante. Ao analisarmos essa equação, identificamos um caso particular em que o delta é negativo. Nesse exemplo, os coeficientes são: a = 1, b = 4 e c = 5. Com base nesses valores, calculamos o discriminante.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$$

Com isso:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Ao substituirmos o valor do discriminante na fórmula resolutiva, nos deparamos com a raiz quadrada de um número negativo. Isso indica que a equação não possui solução no conjunto dos números reais, pois não é possível extrair a raiz quadrada de um número negativo nesse conjunto. Portanto, concluímos que não existem soluções reais para a equação, admitindo apenas soluções no conjunto dos números complexos.

Exercicios Resolvidos

1) Utilize a fórmula resolutiva para resolver, em seu caderno, as equações do 2º grau apresentadas a seguir.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0.$

b) $a^2 - 8a + 16 = 0.$

c) $y^2 + 2y + 5 = 0.$

RESOLUÇÃO:

Vamos resolver cada uma das equações do 2º grau utilizando a fórmula resolutiva (fórmula de Bhaskara):

A fórmula de Bhaskara é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

onde a, b e c são os coeficientes da equação $ax^2 + bx + c = 0.$

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Coeficientes:

- $a = 1$
- $b = -5$
- $c = 6$

1. Cálculo do discriminante (Δ):

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

2. Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

3. Soluções:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

Resposta:

$$\boxed{S = \{2, 3\}}$$

b) $a^2 - 8a + 16 = 0$

Coeficientes:

- $a = 1$
- $b = -8$
- $c = 16$

1. Cálculo do discriminante (Δ):

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$$

2. Aplicando a fórmula de Bhaskara:

$$a = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 0}{2} = 4$$

3. Solução:

$$a = 4$$

Resposta:

$$\boxed{S = \{4\}}$$

c) $y^2 + 2y + 5 = 0$

Coeficientes:

- $a = 1$
- $b = 2$
- $c = 5$

1. Cálculo do discriminante (Δ):

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

Análise do discriminante:

Como $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.

Resposta:

$$\boxed{S = \varnothing \quad \text{(Não há soluções reais)}}$$

2) A área de um retângulo é igual a 24 metros quadrados. Sabendo que os lados desse retângulo medem $x+1$ metros e $2x$ metros, determine as medidas dos lados.

RESOLUÇÃO:

Para determinar as medidas dos lados do retângulo, vamos seguir os seguintes passos:

Dados do problema:

- Área do retângulo: 24 m².
- Lados do retângulo: $(x+1)$ metros e $2x$ metros.

Fórmula da área de um retângulo:

$$\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}$$

Substituindo os valores dados:

$$(x+1) \times 2x = 24$$

Passo 1: Montar a equação.

$$2x(x+1) = 24$$

$$2x^2 + 2x = 24$$

Passo 2: Trazer a equação para a forma padrão do 2º grau.

$$2x^2 + 2x - 24 = 0$$

Simplificando (dividindo todos os termos por 2):

$$x^2 + x - 12 = 0$$

Passo 3: Resolver a equação quadrática.

Usando a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Onde:

- $a = 1$
- $b = 1$
- $c = -12$

Cálculo do discriminante (Δ):

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-12) = 1 + 48 = 49$$

Aplicando na fórmula:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

Passo 4: Encontrar as raízes

$$x = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad x = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Passo 5: Analisar as raízes

- Para x = 3.
  - Lado 1: $x + 1 = 3 + 1 = 4\,\mathrm{m}$
  - Lado 2: $2x = 2 \times 3 = 6\,\mathrm{m}$
  - **Área:** $4 \times 6 = 24\,\mathrm{m}^2$ (válido)
- Para x = -4.
  - Lado 1: $x + 1 = -4 + 1 = -3\,\mathrm{m}$ (não faz sentido, pois medidas não podem ser negativas)
  - **Descartamos essa solução.**

Portanto, as medidas dos lados do retângulo são 4 metros e 6 metros.

Atividades

ATIVIDADE 1

Considere as equações abaixo.
Qual dessas equações possui raiz negativa?

A) $x^2 - 5x + 6 = 0$

B) $x^2 - 7x + 12 = 0$

C) $x^2 - 10x + 25 = 0$

D) $x^2 + 6x + 9 = 0$

ATIVIDADE 2

Desenvolvendo o produto notável $(4y + 5)^2$, chegaremos a um polinômio.
Esse polinômio é:

A) $16y^2 + 40y + 25$

B) $8y^2 + 40y + 10$

C) $4y^2 + 20y + 25$

D) $16y^2 + 25$

ATIVIDADE 3

Durante a preparação de um evento cultural na escola, os alunos decidiram montar uma tela de projeção retangular com área total de 35 m^2. Eles desejam que a altura da tela seja 2 metros menor que a largura.

Qual deve ser a largura da tela para que a área desejada seja atendida?

A) 5 m

B) 6 m

C) 7 m

D) 8 m

ATIVIDADE 4

O polinômio a seguir é um quadrado perfeito do tipo $(ax + b)^2$.

$$x^2 + 12x + 36$$

Quais são os valores de **a** e de **b**?

A) a = 1 e b = -6

B) a = 1 e b = 6

C) a = 6 e b = 1

D) a = -1 e b = 6

ATIVIDADE 5

Um terreno quadrado de 100 m² será dividido em quatro partes para construção de uma casa, uma piscina, uma garagem e um jardim.

- A casa ocupará um espaço quadrado com lados medindo x metros;
- A piscina e a garagem ocuparão dois retângulos idênticos, cada um com lados x e (10−x) metros;
- O jardim ocupará 16 m²;
- A área total do terreno é 100 m².

a) Determine a medida do lado da casa.

b) Represente esse terreno em um desenho, indicando as áreas da casa, da piscina, da garagem e do jardim.

ATIVIDADE 6

Desafio Matemático: A Senha do Cofre

Durante uma gincana escolar, a equipe finalista recebeu o último desafio para abrir o cofre do prêmio principal. Dentro do cofre está o certificado de campeão da competição.

O enunciado entregue aos participantes dizia:

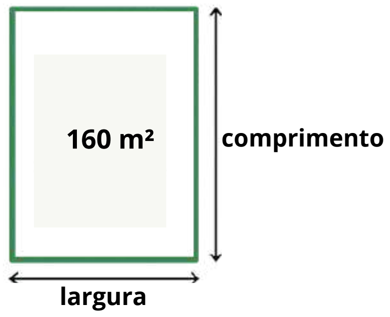
> *"A senha do cofre é formada por dois números inteiros, positivos, cuja diferença é de 5 unidades.*
> *O produto entre esses dois números é exatamente 104.*
> *Digite os dois números em ordem crescente para abrir o cofre."*

Pergunta: Quais são os dois números que formam a senha do cofre?

ATIVIDADE 7

Durante a construção de um novo espaço de lazer em uma praça pública, foi reservado um terreno retangular de 160 metros quadrados para instalação de um parquinho. O projeto prevê que o comprimento do terreno deve ser 6 metros maior que a largura.

Quais devem ser as dimensões desse terreno (largura e comprimento)?



ATIVIDADE 8

Criando e resolvendo problemas com equação do 2º grau

Na matemática, aprender a resolver equações do 2º grau é importante, mas entender como e onde elas se aplicam na vida real torna esse conhecimento ainda mais significativo.

Agora é a sua vez de criar!

Desafio:

Crie um problema matemático que envolva uma situação real da sua escola e que possa ser resolvido por meio de uma equação do 2º grau. Em seguida, resolva o problema criado, mostrando todos os passos da resolução.

Instruções para elaborar o problema:

A situação deve ser realista e coerente com o ambiente escolar, como:

- Organização de carteiras em fileiras;
- Distribuição de alunos em turmas;
- Medidas de espaços da escola (quadra, sala de aula, canteiros);
- Eventos (festas, feiras, gincanas, etc.).

O enunciado deve ser claro, apresentando uma incógnita e conduzindo à formação de uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$.

A resolução deve ser completa, mostrando:

- A equação formada a partir do problema.
- As soluções usando a fatoração ou a fórmula de Bhaskara.
- A resposta final contextualizada.

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo desse capítulo. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?

Reflita sobre sua aprendizagem

- Sou capaz de identificar a expressão algébrica que modela uma sequência numérica ou figural, reconhecendo padrões e regularidades?
- Consigo calcular o valor numérico de expressões algébricas, aplicando corretamente as propriedades das operações?
- Sou capaz de resolver problemas que podem ser representados por expressões algébricas, interpretando o contexto e os resultados obtidos?
- Consigo identificar fatores comuns em um polinômio, reconhecendo possibilidades de simplificação?
- Sou capaz de utilizar a fatoração para reescrever um polinômio, tornando expressões e cálculos mais simples?
- Consigo desenvolver produtos notáveis, como o quadrado da soma, o quadrado da diferença e o produto da soma pela diferença?
- Sou capaz de resolver e elaborar problemas de diferentes contextos que envolvam produtos notáveis e o cálculo do valor numérico de expressões algébricas?
- Consigo resolver equações polinomiais do 2º grau, utilizando produtos notáveis e processos de fatoração?
- Sou capaz de inferir uma equação polinomial do 2º grau que modele uma situação-problema, relacionando variáveis e grandezas?
- Consigo resolver problemas representados por equações polinomiais do 2º grau, aplicando produtos notáveis e técnicas de fatoração de forma adequada?
- Sou capaz de elaborar meus próprios problemas que envolvam equações polinomiais do 2º grau, utilizando produtos notáveis e processos de fatoração com autonomia?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Identificar expressão algébrica que modela uma sequência numérica ou figural;	◯	◯	◯
Calcular o valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações;	◯	◯	◯
Resolver problemas que podem ser modelados por expressões algébricas;	◯	◯	◯
Identificar fator comum em um polinômio;	◯	◯	◯
Utilizar a fatoração para reescrever um polinômio;	◯	◯	◯
Desenvolver produtos notáveis: quadrado da soma, quadrado da diferença e produto da soma pela diferença;	◯	◯	◯
Resolver e elaborar problemas, de diversos contextos, que envolvam produtos notáveis e cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações;	◯	◯	◯
Resolver uma equação polinomial de 2º grau, utilizando inclusive os produtos notáveis e os processos de fatoração;	◯	◯	◯
Inferir uma equação polinomial de 2º grau que modela um problema;	◯	◯	◯
Resolver problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau, utilizando inclusive os produtos notáveis e os processos de fatoração;	◯	◯	◯

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau, utilizando inclusive os produtos notáveis e os processos de fatoração.	◯	◯	◯

Dica: Revise os tópicos que você marcou como "**preciso revisar**" e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências

Andrini, Álvaro Praticando matemática 7/ Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos. – 4. ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2015. – (Coleção praticando matemática; v. 8)

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é matemática, 7º ano - 3ª ed. São Paulo: Ática, 2009. Plataforma Compartilha , Grupo Santilhana

Dante, Luiz Roberto Teláris Essencial [livro eletrônico] : Matemática : 8º ano / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2022. HTML (Teláris Essencial Matemática)

DANTE, L. R. Teláris Essencial: Matemática 9º ano (ALUNO). SÃO PAULO, SP: Editora Ática S.A, 2022.

GIOVANNIJUNIOR, José Ruy, CASTRUCCI, Benedicto. A Conquista da Matemática, 8°Ano. Ed. Renovada- São Paulo:FTD, 2009.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. A Conquista Matemática 9º Ensino Fundamental – Anos Finais. São Paulo, SP: Editora FTD, 2022.

IMPA. Portal da OBMEP: matemática. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/. Acesso em: 26 nov. 2024.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. Equação do 2º grau. Portal da OBMEP. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=25. Acesso em: 1 jun 2025.

NOVA ESCOLA. Plano de aula: Calculando Termos Futuros de uma Sequência Numérica. Disponível em: <https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/7ano/matematica/padroes-em-sequencias-numericas/631#section-sobreOPlano-4>. Acesso em: 27 nov. 2024.

NOVA ESCOLA. Plano de aula: Padrões em Sequências Numéricas. Disponível em: <https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/7ano/matematica/padroes-em-sequencias-numericas/631#section-sobreOPlano-4>. Acesso em: 27 nov. 2024.

NOVA ESCOLA. Plano de aula: Sequências e Expressões Algébricas (ax + b). Disponível em: <https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/7ano/matematica/padroes-em-sequencias-numericas/631#section-sobreOPlano-4>. Acesso em: 27 nov. 2024.

Portal da Matemática (IMPA). Produtos Notáveis e Fatoração de Expressões Algébricas. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=14>. Acesso em: 28 outubro de 2024.

SEMAAN, Isabella (ed.). Geração alpha matemática: 8º ano: ensino fundamental. 4. ed. São Paulo: Edições SM, 2022.

SILVEIRA, Ênio. Desafios da matemática com Ênio Silveira: 8º ano. São Paulo: Moderna, 2022.

TEIXEIRA, L. A. SuperAÇÃO! Matemática 9º ano: Manual do Professor. Moderna, 2022.

Rotinas Pedagógicas Escolares

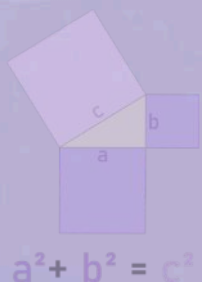
Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

SEDU 2026

Gerência de Currículo
da Educação Básica

Capítulo 7: Semelhança, Relações Métricas e o Teorema de Pitágoras em Triângulos



Apresentação

Prezado(a) estudante,

Você já percebeu como a Geometria está presente em situações do cotidiano, como na construção de rampas, no cálculo de alturas e distâncias ou na análise de formas e medidas? Para compreender essas situações, estudamos a semelhança de triângulos, que nos permite identificar proporções entre figuras, e as relações métricas no triângulo retângulo, que mostram como seus lados se relacionam. Além disso, o Teorema de Pitágoras é uma ferramenta fundamental para calcular comprimentos desconhecidos e resolver problemas práticos, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e a compreensão do espaço ao nosso redor.

O que você vai estudar neste capítulo

Neste capítulo, você vai estudar a semelhança de triângulos, compreendendo critérios que permitem comparar figuras e identificar proporções entre seus lados. Também irá explorar as relações métricas no triângulo retângulo, analisando como seus lados e alturas se relacionam, e aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular comprimentos e resolver problemas em diferentes contextos geométricos.

Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- Reconhecer triângulos semelhantes ou as relações existentes entre ângulos e lados correspondentes nesses tipos de triângulos;
- Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos;
- Demonstrar o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos;
- Resolver problemas que envolvam relações métricas do triângulo retângulo;
- Resolver problemas que envolvam o teorema e Pitágoras;
- Elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras.

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

SEMELHANÇA DE POLÍGONOS

Definição

Dois polígonos são ditos semelhantes se, e somente se:

1. Possuem ângulos ordenadamente congruentes; e
2. Os lados correspondentes são proporcionais.

Utilizamos o símbolo "$\sim$" para denotar semelhança entre polígonos.

Por exemplo, considerando os triângulos abaixo:

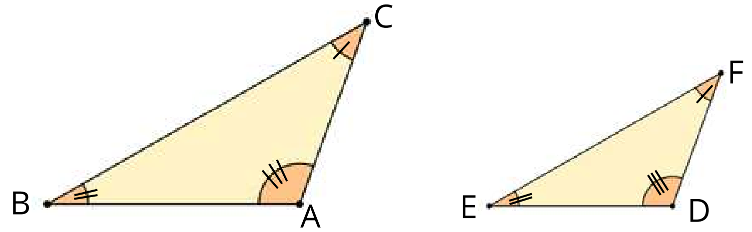


Figura 1: Dois triângulos semelhantes.

Podemos expressar a semelhança entre eles da seguinte forma:

$$ABC \sim DEF \iff \begin{cases} \widehat{A} \equiv \widehat{D} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{E} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{F} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \end{cases}$$

Essa relação indica que os ângulos correspondentes possuem medidas iguais, e os lados correspondentes são proporcionais, garantindo a semelhança entre estes polígonos.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Apesar de dois polígonos serem semelhantes apenas quando possuem ângulos correspondentes congruentes e lados homólogos proporcionais, os triângulos constituem um caso especial. É possível estabelecer critérios mínimos que garantem sua semelhança sem a necessidade de verificar todas essas condições simultaneamente. Esses critérios, conhecidos como **casos de semelhança de triângulos**, podem ser demonstrados matematicamente. A seguir, apresentamos três desses casos.

Caso AA (ângulo, ângulo)

Se dois triângulos possuem dois ângulos internos ordenadamente congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Exemplo

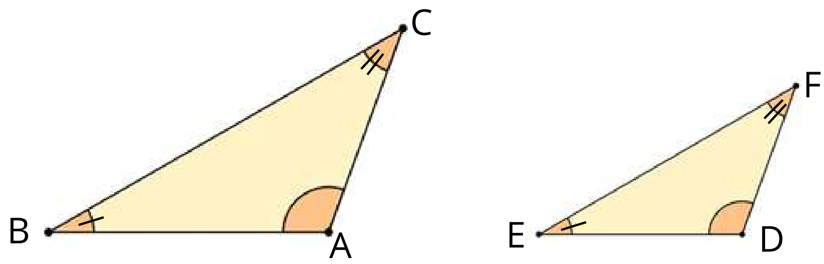


Figura 2: Dois triângulos semelhantes segundo o critério AA.

$$\left.\begin{aligned}\widehat{C} \equiv \widehat{F} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{E}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Caso LAL (lado,ângulo, lado)

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

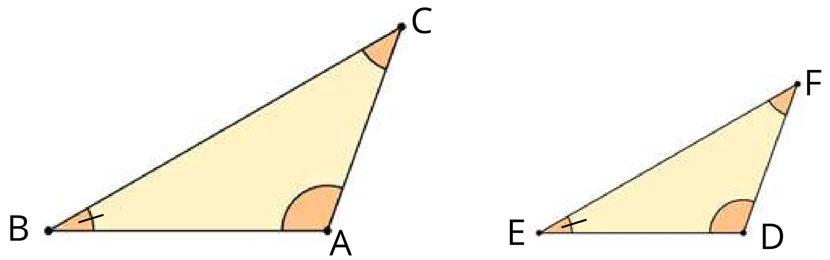


Figura 3: Dois triângulos semelhantes segundo o critério LAL.

$$\left.\begin{matrix} \widehat{B} \equiv \widehat{E} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Caso LLL (lado, lado, lado)

Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

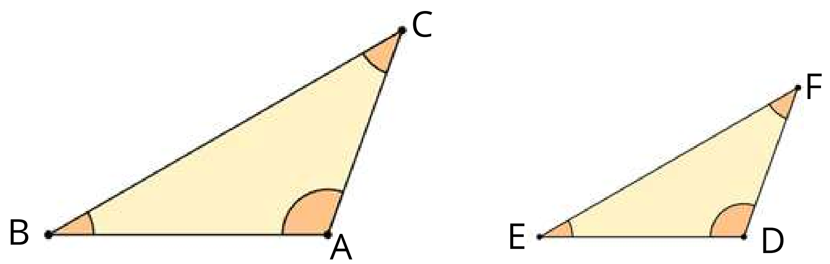


Figura 4: Dois triângulos semelhantes segundo o critério LLL.

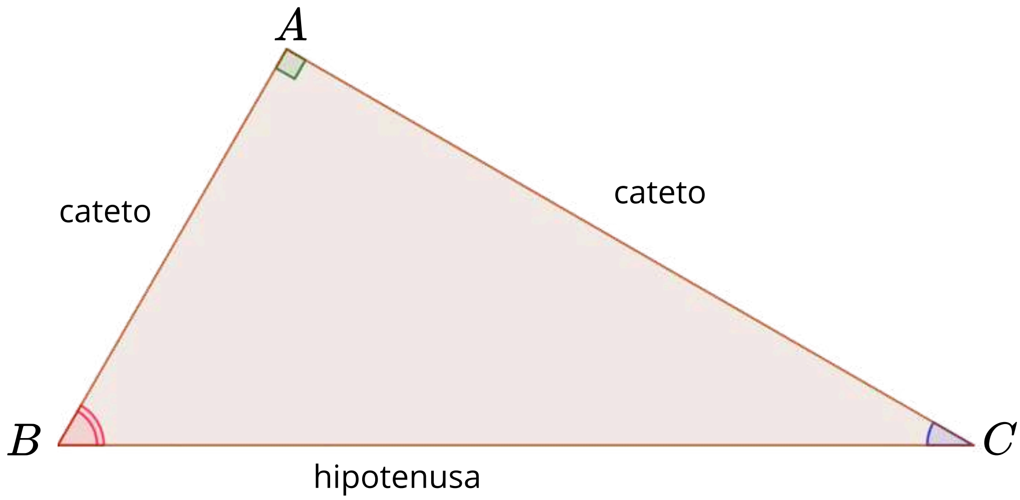
$$\left.\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

VOCÊ SABIA?

Topógrafos usam a semelhança de triângulos para calcular a altura de edifícios, torres e montanhas sem precisar medi-los diretamente. Um método comum envolve a projeção de sombras e ângulos de visão.

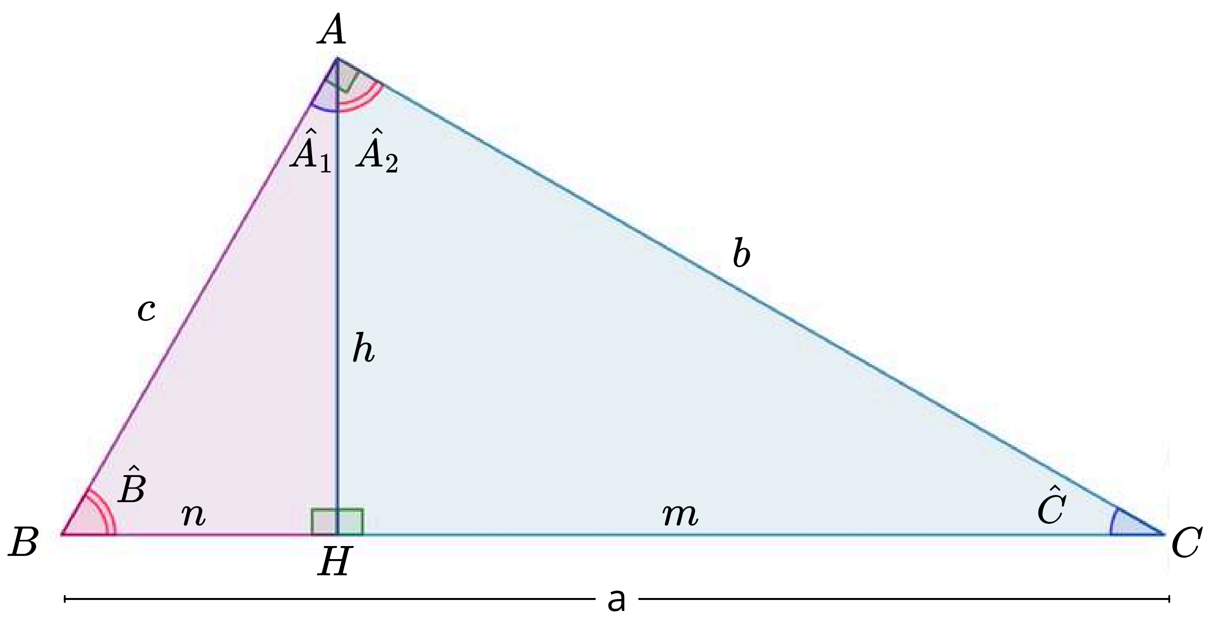
ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

O triângulo ABC a seguir é um triângulo retângulo, pois tem um ângulo reto (ângulo Â).



Chamamos de catetos os lados perpendiculares entre si que formam o ângulo reto em um triângulo retângulo. Já o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa.

Observe o triângulo retângulo ABC da figura abaixo.



Nesse triângulo, destacamos:

- a, que é a medida da hipotenusa $\overline{BC}$;
- c, que é a medida da cateto $\overline{AB}$; oposto ao ângulo $\hat{C}$;
- b, que é a medida da cateto $\overline{AC}$; oposto ao ângulo $\hat{B}$;
- h, que é a medida da altura $\overline{AH}$; relativa à hipotenusa;
- n, que é a medida da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$;
- m, que é a medida da projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$.

Em relação aos ângulos, temos:

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\hat{A}_1\right)+m\left(\hat{B}\right)=90^\circ \\ m\left(\hat{B}\right)+m\left(\hat{C}\right)=90^\circ \end{array}\right\} m\left(\hat{A}_1\right)+m\left(\hat{B}\right)=m\left(\hat{B}\right)+m\left(\hat{C}\right) \text{, então } m\left(\hat{A}_1\right)=m\left(\hat{C}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\hat{A}_2\right)+m\left(\hat{C}\right)=90^\circ \\ m\left(\hat{B}\right)+m\left(\hat{C}\right)=90^\circ \end{array}\right\} m\left(\hat{A}_2\right)+m\left(\hat{C}\right)=m\left(\hat{B}\right)+m\left(\hat{C}\right) \text{, então } m\left(\hat{A}_2\right)=m\left(\hat{B}\right)$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

Considerando como unidade de medida a área de cada quadradinho da figura abaixo, observa-se que a área do quadrado maior corresponde à soma das áreas dos quadrados menores, ou seja:

$$25 = 9 + 16$$

Como 25 = 5^2, 9^2 = 3^2 e 16 = 4^2, podemos escrever essa igualdade da seguinte maneira:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

Repare que 5, 3 e 4 são as medidas dos lados dos quadrados da figura e, consequentemente, as medidas dos respectivos lados do triângulo retângulo.

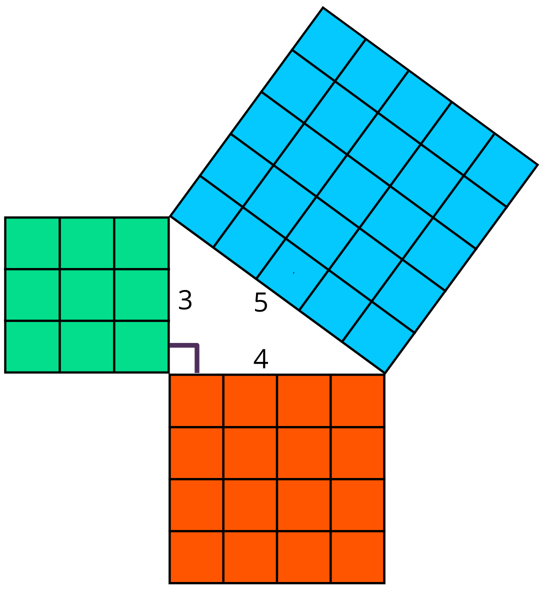


Imagem produzida no Canva

A relação entre os quadrados das medidas dos lados desse triângulo retângulo é válida para todo triângulo retângulo e é conhecida como teorema de Pitágoras.

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Para o triângulo retângulo ABC, de hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**, temos:

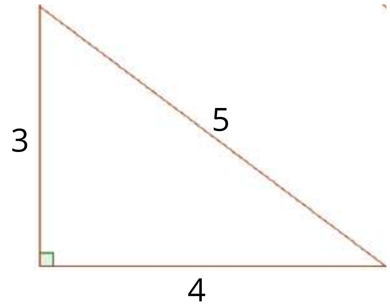
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Triângulos Pitagóricos

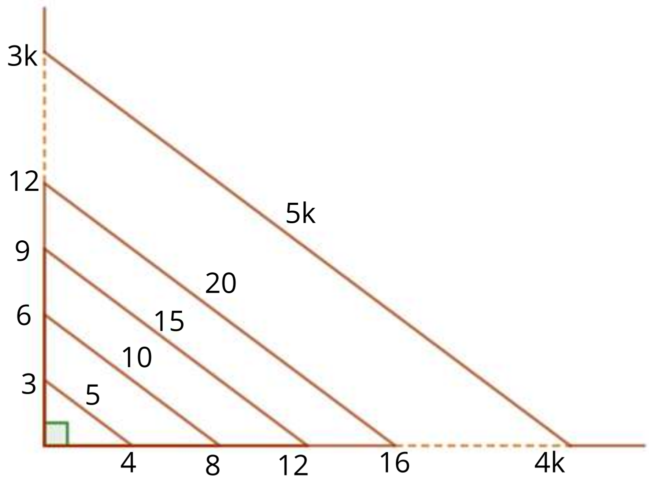
Triângulos retângulos cujas medidas dos lados são expressas por números inteiros são chamados de triângulos pitagóricos.

Entre eles, o mais famoso é o triângulo cujos lados medem os seguintes números inteiros e consecutivos: 3, 4 e 5.

Pelo caso LLL de semelhança, qualquer triângulo retângulo cujos lados sejam proporcionais aos números 3, 4 e 5 é um triângulo pitagórico.



Em outras palavras, os triângulos cujas medidas são dadas pelos ternos pitagóricos (6, 8, 10), (9, 12, 15), (12, 16, 20), ... , (3k, 4k, 5k), sendo k um número inteiro positivo, são triângulos pitagóricos.



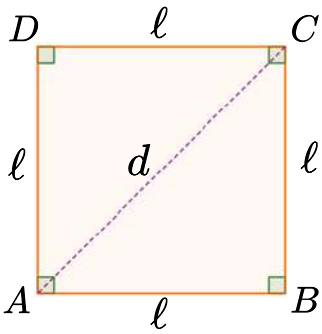
Existem outros triângulos pitagóricos que não seguem essa proporção. Por exemplo:

- o triângulo retângulo de medidas 5, 12 e 13;
- o triângulo retângulo de medidas 7, 24 e 25.

Aplicação do Teorema de Pitágoras

- **Relacionando as medidas da diagonal e do lado de um quadrado**

Considere o quadrado ABCD, com lado medindo ℓ e diagonal, d. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABC, temos:



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$
$$d^2 = 2\ell^2$$
$$d = \sqrt{2\ell^2}$$
$$d = \ell\sqrt{2}$$

Portanto, com a expressão $d = \ell\sqrt{2}$ é possível calcular a diagonal de um quadrado quando se conhece a medida de seu lado, e vice-versa.

Vamos calcular a medida da diagonal de um quadrado cujo perímetro é 12 cm.
Se P = 12 cm, então $\ell = 3$ cm.

$$d = \ell\sqrt{2}$$
$$d = 3\sqrt{2}$$

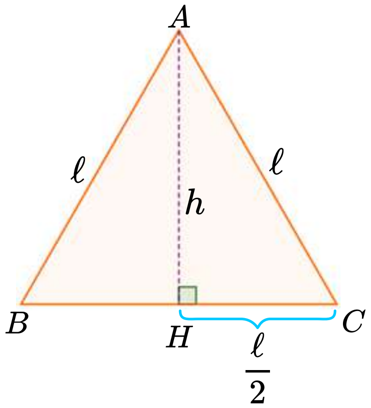
Logo, a diagonal desse quadrado mede $3\sqrt{2}$.

Vamos calcular a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede $7\sqrt{2}$ cm.
Substituímos d por $7\sqrt{2}$ na fórmula:

$$7\sqrt{2} = \ell\sqrt{2}$$
$$\ell = 7$$

- **Relacionando as medidas da altura e do lado de um triângulo equilátero**

Considere o triângulo equilátero ABC, com lado medindo ℓ e altura, h.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo HCA, temos:



$$(AH)^2 + (HC)^2 = (AC)^2$$
$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$
$$h^2 + \frac{\ell^2}{4} = \ell^2$$
$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$
$$h = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}}$$
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

A fórmula $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ permite calcular a medida da altura do triângulo equilátero quando se conhece a medida do lado desse triângulo, e vice-versa.
Veja os exemplos a seguir.

a) Calcule a medida da altura de um triângulo equilátero de 18 cm de perímetro.

Solução: Se P=18 cm, então $\ell = 6$ cm.

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$
$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Logo, a medida da altura desse triângulo é $3\sqrt{3}$ cm.

b) Calcule a medida do lado de um triângulo equilátero cuja altura $6\sqrt{3}$.

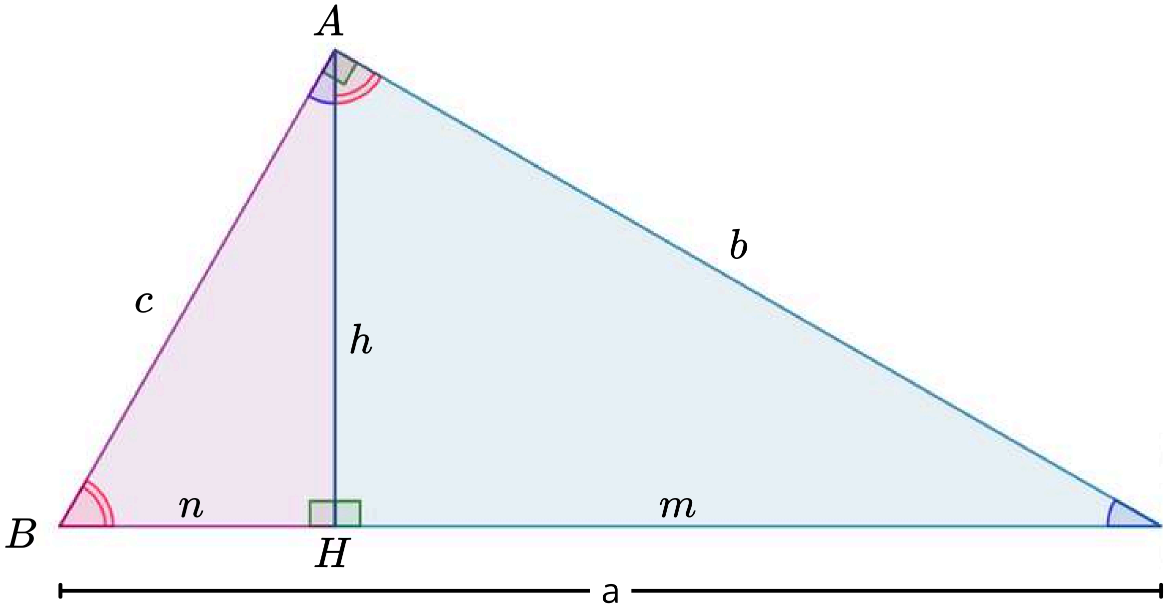
Solução: Substituindo h por $6\sqrt{3}$ em

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$
$$6\sqrt{3} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$
$$12\sqrt{3} = \ell\sqrt{3}$$
$$\ell = 12$$

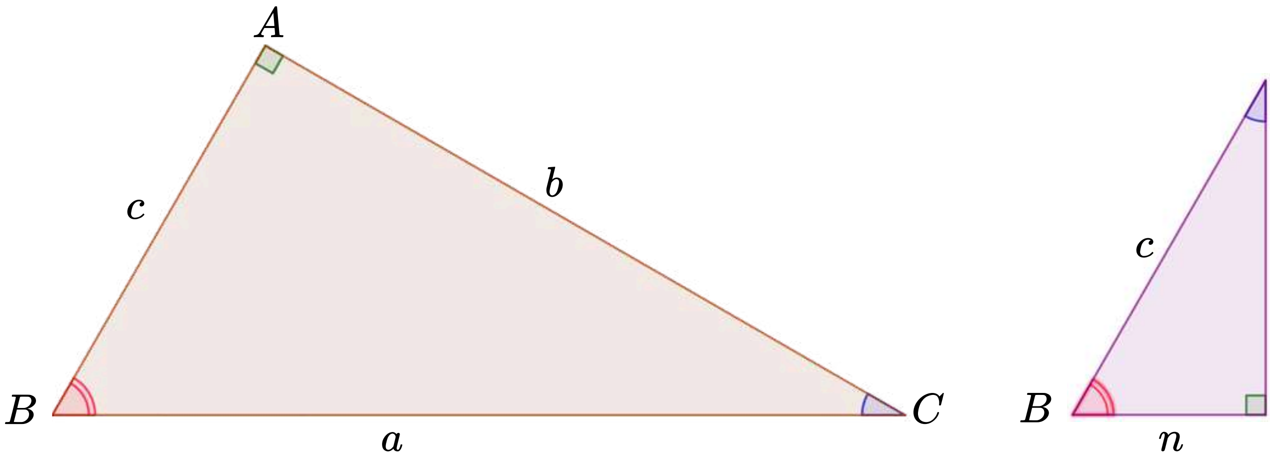
Logo, o lado desse triângulo mede 12 cm.

RELAÇÕES MÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considere o triângulo retângulo ABC. Ao traçarmos a altura relativa à hipotenusa, o triângulo original é dividido em dois triângulos menores, ambos retângulos.



Inicialmente considere os triângulos ABC e HBA.



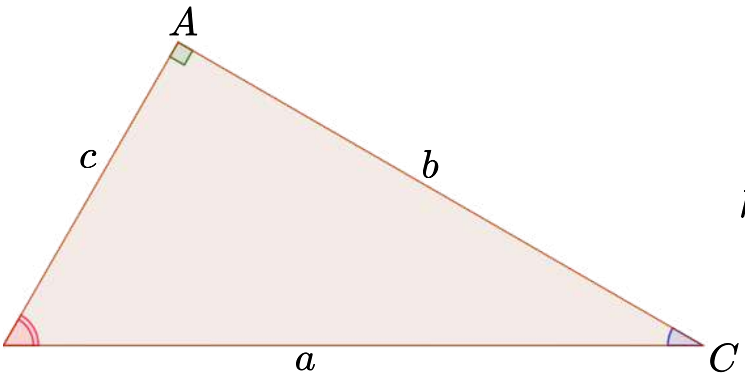
Note que ambos os triângulos apresentam um ângulo reto, caracterizando-os como triângulos retângulos, e compartilham ainda um ângulo em comum. Assim, pelo critério de semelhança AA (ângulo-ângulo), os triângulos ABC e HBA são semelhantes. Consequentemente, os lados correspondentes desses triângulos são proporcionais. Logo, podemos escrever as proporções:

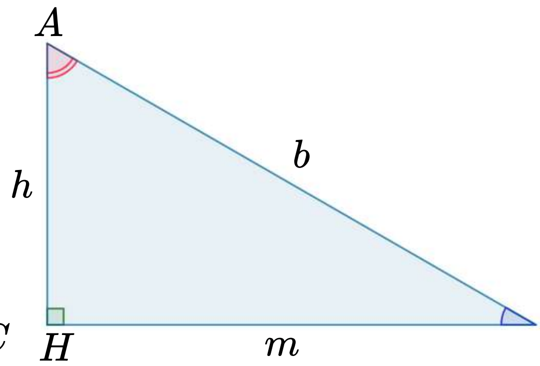
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} = \frac{b}{h}$$

A partir dessas igualdades obtemos as seguintes relações:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}\text{, ou seja, } c^2 = a \cdot n \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{h}\text{, ou seja, } c \cdot b = a \cdot h$$

Agora considere os triângulos ABC e HAC





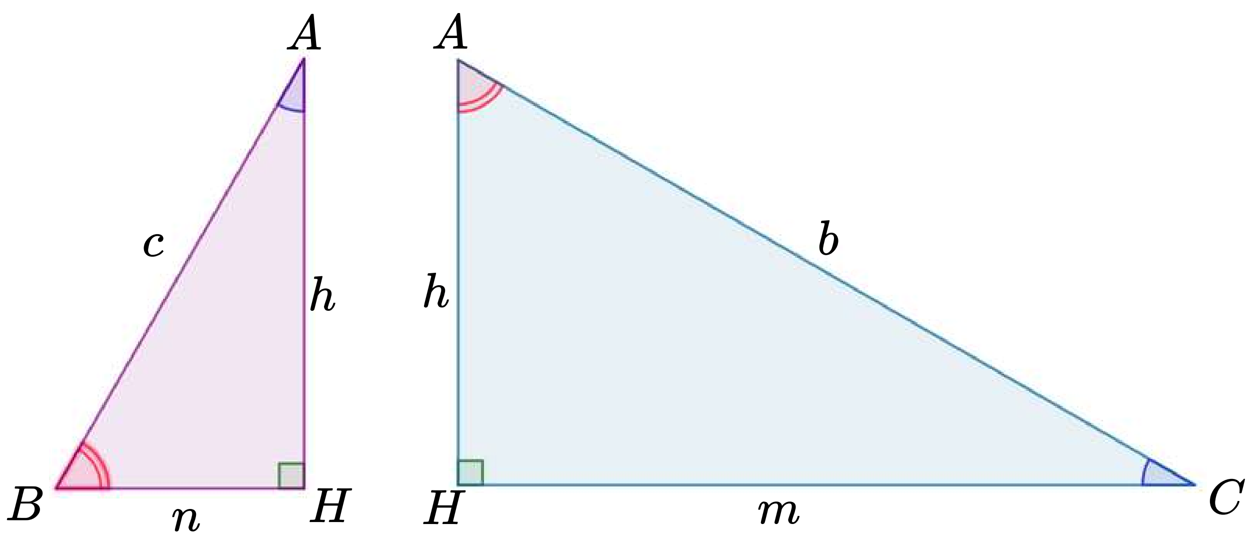
Assim como no casos anterior, os dois triângulos possuem um ângulo reto e compartilham um ângulo em comum. Dessa forma, pela condição de semelhança AA (ângulo-ângulo), conclui-se que os triângulos ABC e HAC são semelhantes. Consequentemente, seus lados correspondentes são proporcionais. Logo, podemos escrever as proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h}$$

A partir dessas proporções obtemos as seguintes relações:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \text{ , ou seja, } b^2 = a \cdot m \qquad \frac{b}{m} = \frac{c}{h} \text{ , ou seja, } b \cdot h = m \cdot c$$

Para finalizar considere os triângulos HBA e HAC.



Observe que os triângulos HBA e HAC possuem três pares de ângulos congruentes, sendo um deles ângulos de 90°. Dessa forma, pela condição de semelhança AA (ângulo-ângulo), conclui-se que os triângulos são semelhantes. Consequentemente, seus lados correspondentes são proporcionais. Portanto, podemos escrever as proporções:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} = \frac{c}{b}$$

A partir delas obtemos as seguintes relações:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}, \text{ ou seja, } h^2 = m \cdot n \qquad \frac{n}{h} = \frac{c}{b}, \text{ ou seja, } n \cdot b = h \cdot c$$

Sabendo que $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$, é possível somar membro a membro dessas igualdades, resultando em:

$$\left.\begin{matrix} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot m \end{matrix}\right\} \; b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (n + m)$$

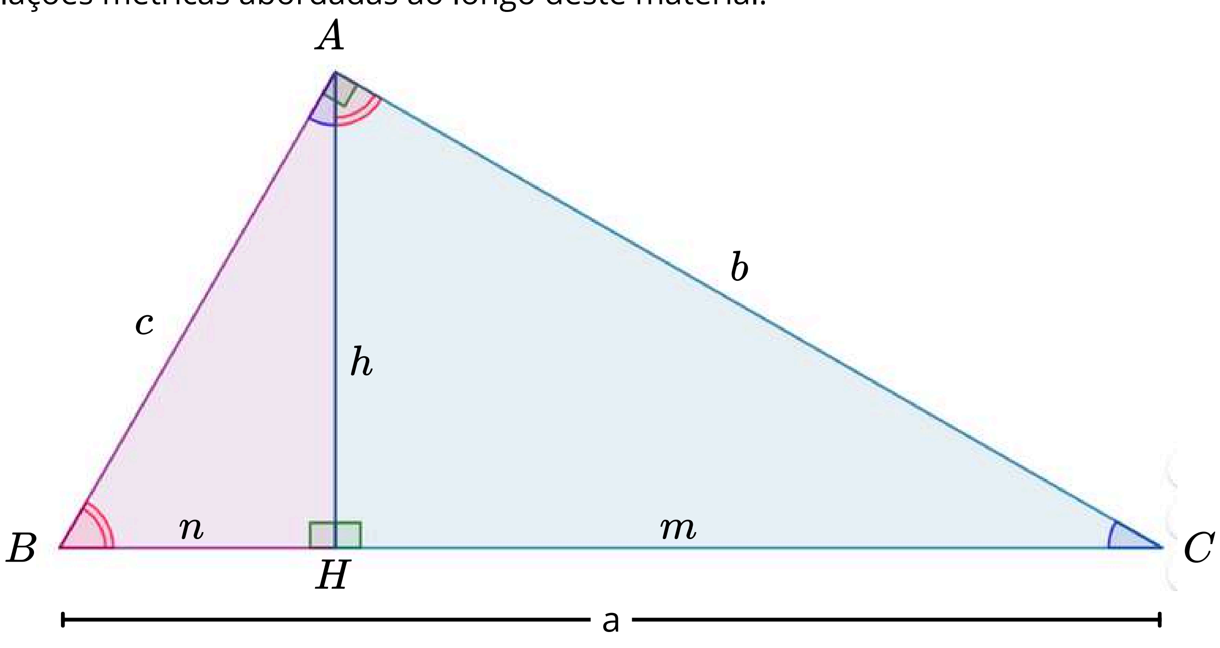
Como $a = n + m$ temos:

Teorema de Pitágoras.

$$b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

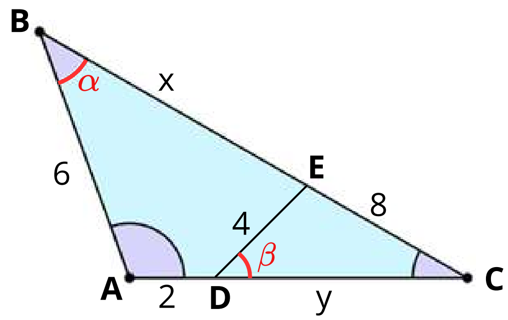
Esta é apenas uma das diversas demonstrações possíveis do Teorema de Pitágoras. Outras abordagens podem ser encontradas no **Material Extra**.

Com base no triângulo a seguir, apresentamos um quadro-resumo com as principais relações métricas abordadas ao longo deste material.



$a = m + n$	Em qualquer triângulo retângulo, a medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma das medidas de comprimento das projeções dos catetos sobre ela.
$b^2 = a \cdot m$ $c^2 = a \cdot n$	Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de comprimento de um cateto é igual ao produto da medida de comprimento da hipotenusa pela medida de comprimento da projeção desse cateto sobre a hipotenusa.
$h^2 = m \cdot n$	Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas de comprimento das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.
$c \cdot b = a \cdot h$	Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas de comprimento dos catetos é igual ao produto da medida de comprimento da hipotenusa pela medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa.
$a^2 = b^2 + c^2$	(Teorema de Pitágoras) Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos catetos.
$b \cdot h = m \cdot c$ $c \cdot h = n \cdot b$	Em qualquer triângulo retângulo, o produto da medida de comprimento de um dos catetos pela medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto da projeção desse cateto sobre a hipotenusa pela medida de comprimento do outro cateto.

1) Se $\alpha = \beta$, determine x e y:



RESOLUÇÃO:

Pelo caso AA, vê-se que os triângulos ABC e CED são semelhantes, uma vez que:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha \equiv \beta \\ A\widehat{C}B \equiv D\widehat{C}E\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC}$$

Utilizando a relação dos lados de triângulos semelhantes, obtêm-se:

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{y+2}{8} = \frac{x+8}{y}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{y+2}{8} \Rightarrow 4 \cdot (y+2) = 6 \cdot 8 \Rightarrow y + 2 = \frac{6 \cdot \cancel{8}^{2}}{\cancel{4}^{1}} \Rightarrow$$

$$y = 12 - 2 = 10$$

Ainda pela relação dos lados de triângulos semelhantes, tem-se:

$$\frac{6}{4} = \frac{x+8}{y} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{x+8}{10} \Rightarrow x + 8 = \frac{\cancel{10}^{5} \cdot \cancel{6}^{3}}{\cancel{4}^{1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 5 \cdot 3 - 8 = 15 - 8 = 7}$$

Assim, conclui-se que $x = 7$ e $y = 10$.

2) Calcule o comprimento x de uma escada que está apoiada em uma parede, conforme a figura abaixo.

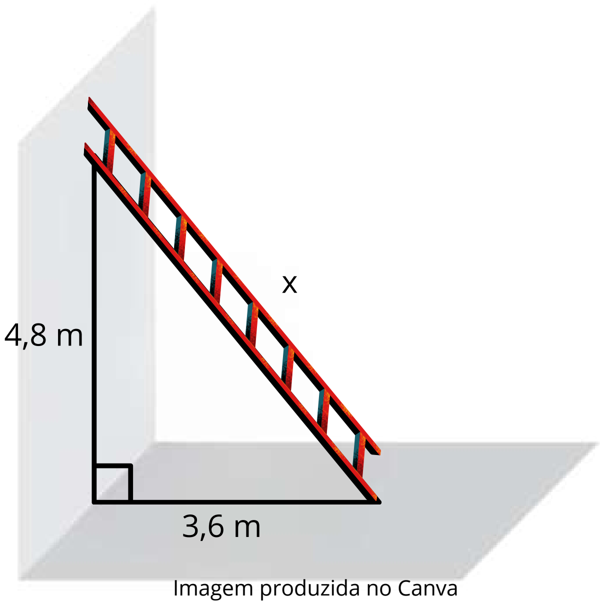


Imagem produzida no Canva

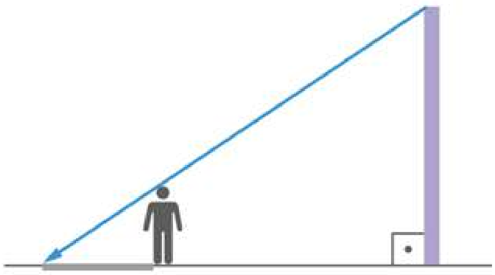
RESOLUÇÃO:

Vamos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = (4,8)^2 + (3,6)^2$$
$$x^2 = 23,04 + 12,96$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \pm\sqrt{36}$$
$$x = \pm 6$$

Como x é o comprimento da escada, ele deve ser um número positivo. Portanto, o comprimento da escada é 6 m.

3) Uma pessoa está a 6,30 m da base de um poste, conforme representa a figura. Sabendo que essa pessoa tem 1,80 m de altura e projeta no solo uma sombra de 2,70 m de comprimento, qual é a altura do poste?



RESOLUÇÃO:

Para resolver o problema usando a semelhança de triângulos, vamos analisar a situação.

Dados:

- Altura da pessoa: $1,80\,\mathrm{m}$
- Comprimento da sombra da pessoa: $2,70\,\mathrm{m}$
- Distância da pessoa até a base do poste: $6,30\,\mathrm{m}$

Passo 1: Calcular a sombra total do poste

A sombra do poste é a soma da sombra da pessoa e da distância da pessoa até a base do poste:

$$\text{Sombra do poste} = \text{Sombra da pessoa} + \text{Distância da pessoa ao poste}$$

$$\text{Sombra do poste} = 2,70\,\mathrm{m} + 6,30\,\mathrm{m} = 9,00\,\mathrm{m}$$

Passo 2: Estabelecer a relação de semelhança

Agora, vamos usar a semelhança de triângulos. A relação entre as alturas e as sombras é dada por:

$$\frac{\text{Altura da pessoa}}{\text{Sombra da pessoa}} = \frac{\text{Altura do poste}}{\text{Sombra do poste}}$$

Substituindo os valores: $\frac{1,80}{2,70} = \frac{h}{9,00}$

Passo 3: Resolver a proporção

$$1,80 \times 9,00 = 2,70 \times h$$

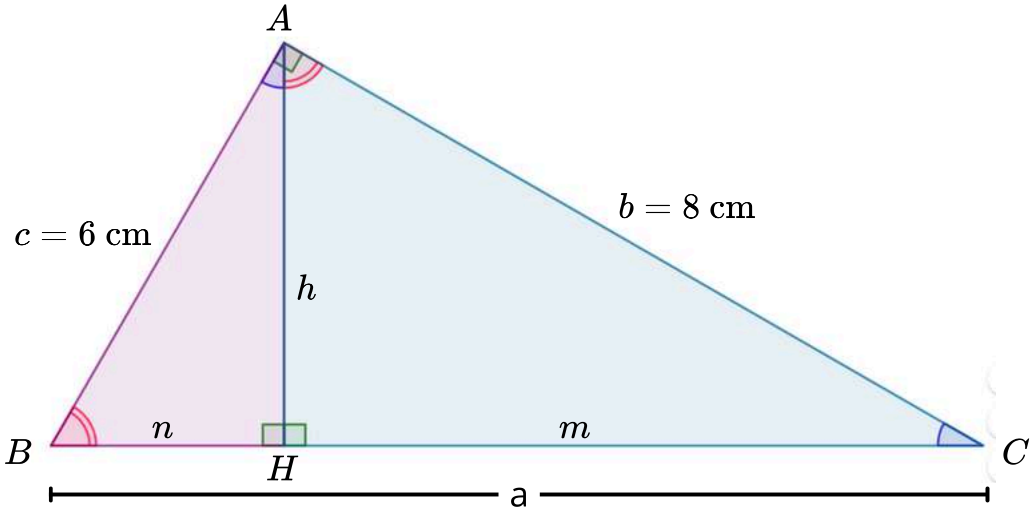
$$16,20 = 2,70h$$

Isolando h:

$$h = \frac{16,20}{2,70} = 6$$

A altura do poste é 6 metros.

4) No triângulo ABC da figura, vamos calcule **a**, **h**, **m** e **n**.



RESOLUÇÃO:

Começamos pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 8^2 + 6^2$$
$$a^2 = 64 + 36$$
$$a = \pm\sqrt{100}$$
$$a = \pm 10$$

Como **a** representa uma medida, seu valor deve ser positivo. Portanto, **a = 10 cm**.

Em seguida, utilizamos as relações métricas demonstradas:

$$c^2 = a \cdot n$$
$$6^2 = 10 \cdot n$$
$$36 = 10 \cdot n$$
$$\frac{36}{10} = \frac{10n}{10}$$
$$3,6 = n$$

$$b^2 = a \cdot m$$
$$8^2 = 10 \cdot m$$
$$64 = 10 \cdot m$$
$$\frac{64}{10} = \frac{10m}{10}$$
$$6,4 = m$$

$$b \cdot c = a \cdot h$$
$$8 \cdot 6 = 10 \cdot h$$
$$48 = 10h$$
$$\frac{48}{10} = \frac{10h}{10}$$
$$4,8 = h$$

Logo, **n = 3,6 cm**, **m = 6,4 cm** e **h = 4,8 cm.**

VÍDEO

Semelhança de triângulos
https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=10

Atividades

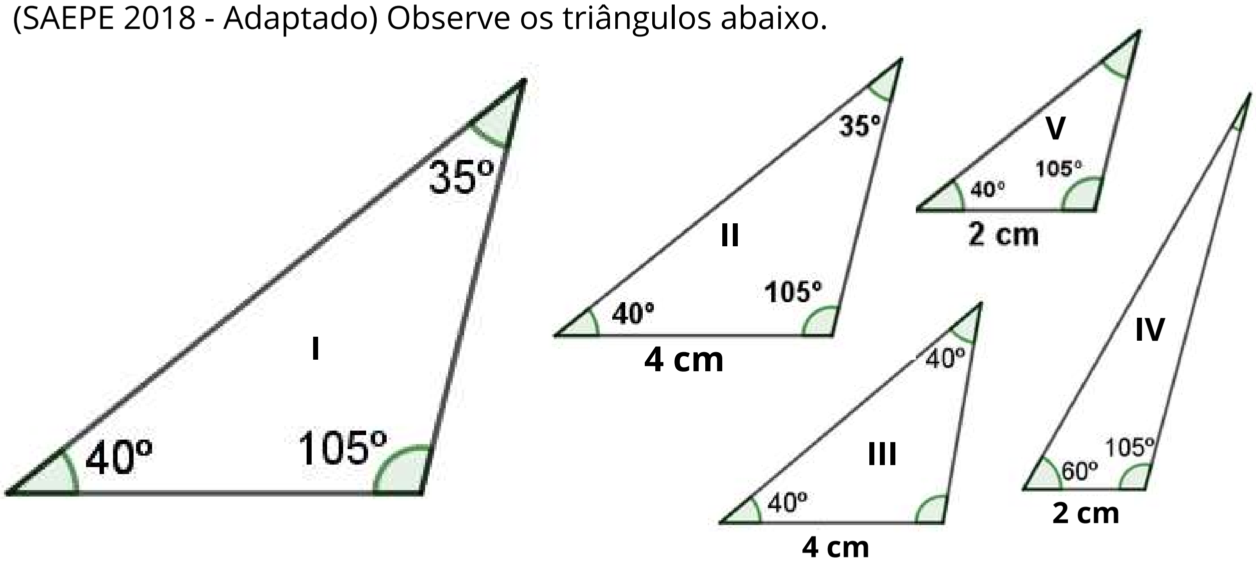
ATIVIDADE 1

Em relação à semelhança de triângulos, assinale a alternativa correta:

A) Triângulos com ângulos correspondentes de medidas iguais são sempre congruentes.
B) A semelhança de triângulos pode ser estabelecida apenas pela comparação de dois lados.
C) Dois triângulos são semelhantes se os comprimentos de seus lados são iguais, independente dos seus ângulos correspondentes serem congruentes.
D) Dois triângulos são semelhantes se têm lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes de medidas iguais.

ATIVIDADE 2

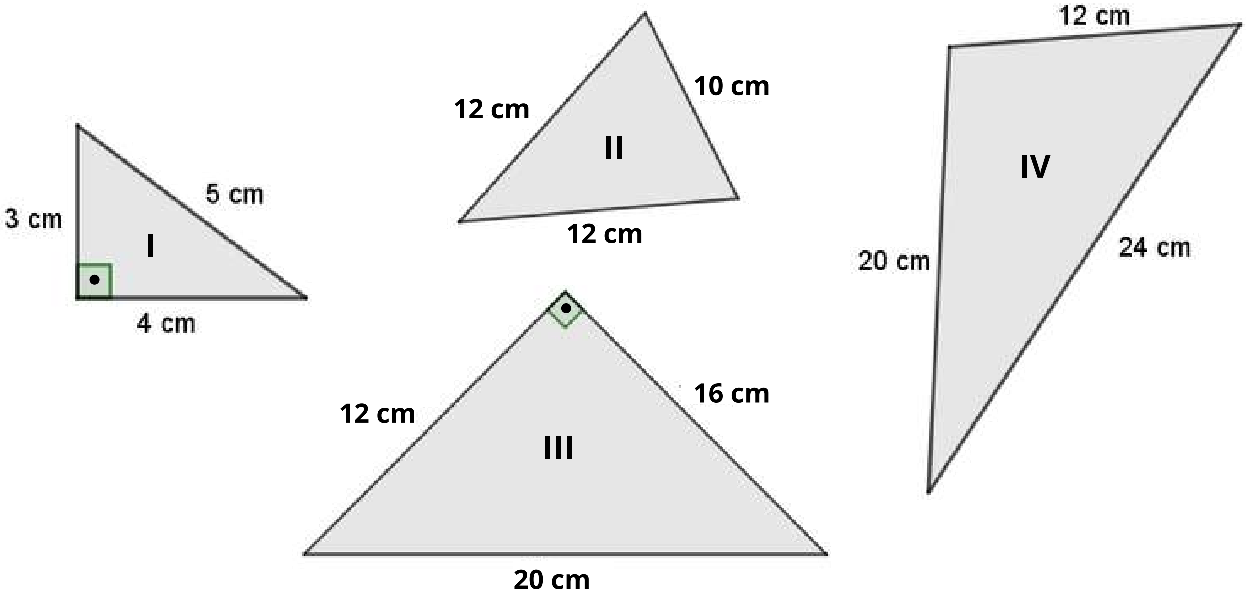
(SAEPE 2018 - Adaptado) Observe os triângulos abaixo.



Quais desses triângulos são semelhantes?
A) I, II, e III
B) I, II e V
C) I e III
D) II e III

ATIVIDADE 3

(SAEPE - 2019) No desenho abaixo estão representados os triângulos I, II, III e IV e suas medidas em centímetros.



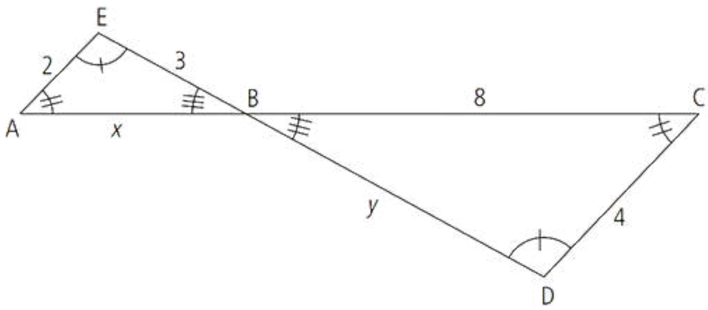
O par de triângulos semelhantes nesse desenho é:

A) I e II
B) I e III
C) I e IV
D) II e IV

ATIVIDADE 4

Dois triângulos △ABE e △BCD são semelhantes, conforme a figura abaixo. As medidas do lado representado por x e por y são, respectivamente:

A) 3 e 5
B) 4 e 6
C) 5 e 6
D) 6 e 4



ATIVIDADE 5

Um engenheiro deseja determinar a altura de um prédio sem precisar escalá-lo. Para isso, ele utiliza um poste de 2 metros de altura e mede sua sombra, que tem 3 metros de comprimento. No mesmo momento, ele mede a sombra do prédio e encontra 15 metros.

Sabendo que o Sol projeta sombras de maneira semelhante para ambos os objetos, determine a altura do prédio.

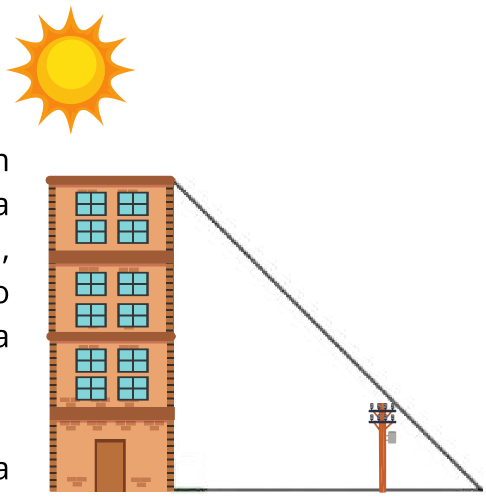
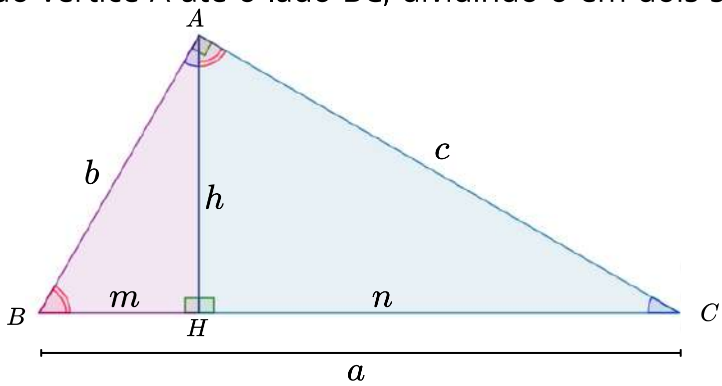


Imagem produzida no canva

ATIVIDADE 6

Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em A, onde AB=b, AC=c e BC=a. A altura h foi traçada do vértice A até o lado BC, dividindo-o em dois segmentos: m e n.



Com base nas relações métricas dos triângulos retângulos, resolva os seguintes itens:

Observação: Para cada item abaixo, utilize a figura como referência, mas considere os valores fornecidos em cada questão de forma independente.

A) Se a=12 cm e b=6 cm, qual é o valor de m?

B) Se m=9 cm e n=16 cm, calcule a altura h.

C) Sabendo que b=15 cm e c=20 cm, determine o valor de a.

D) Determine o valor de b sabendo que h=16 cm e m=12 cm.

ATIVIDADE 7

O gato Pitágoras decidiu que sua vida de sofá e ração não era suficiente e planejou uma fuga cinematográfica! Ele saltou da janela de João que fica a 5 metros de altura, em linha reta, e aterrissou a 12 metros de distância da base da parede.

Mas o gato não parou por aí! Após tocar o solo, ele imediatamente correu 9 metros em linha reta para se esconder atrás de uma árvore.

Qual foi a distância total percorrida por Pitágoras desde o momento em que pulou da janela até chegar à base da árvore?

A) 18 metros
B) 20 metros
C) 21 metros
D) 22 metros

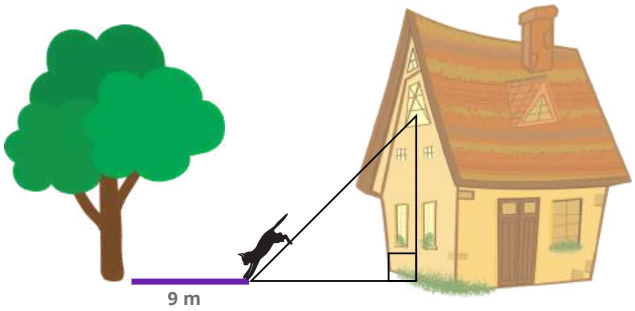
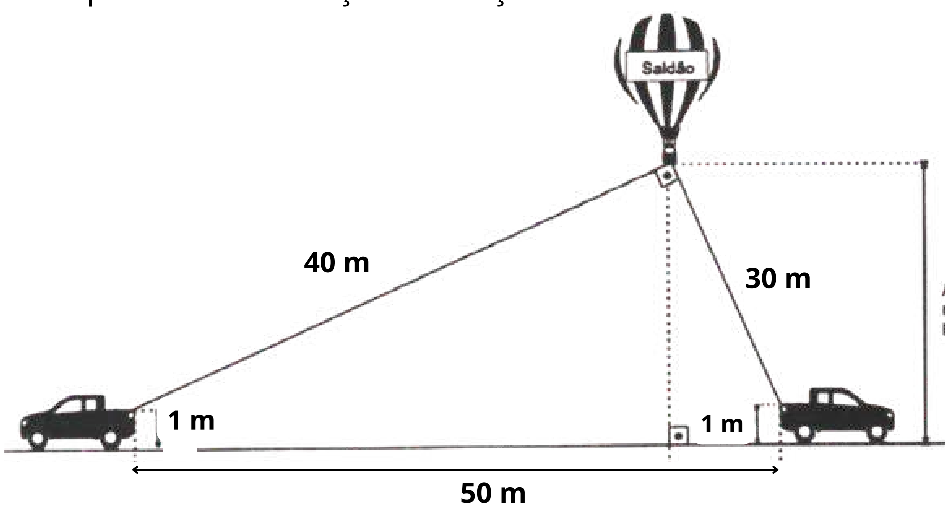


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 8

(PAEBES-2019-adaptada) Em um ponto de vendas itinerante, um balão está preso por dois cabos: um de 30 metros até a primeira caminhonete e outro de 40 metros até a segunda caminhonete. As caminhonetes estão estacionadas a 50 metros uma da outra. De acordo com a imagem a seguir, que representa essa disposição, a medida da altura máxima que o balão alcança em relação ao solo é:

A) 23 m
B) 24 m
C) 25 m
D) 29 m



ATIVIDADE 9

Durante a construção de uma rampa de acesso para cadeirantes, os engenheiros precisam garantir que a inclinação esteja de acordo com as normas de acessibilidade. Se a altura entre o solo e o ponto mais alto da rampa é de 1,20 metros e a distância horizontal que a rampa deve cobrir é de 2,25 metros, qual é o comprimento da rampa?

A) 2,55 metros
B) 2,70 metros
C) 3,00 metros
D) 3,45 metros

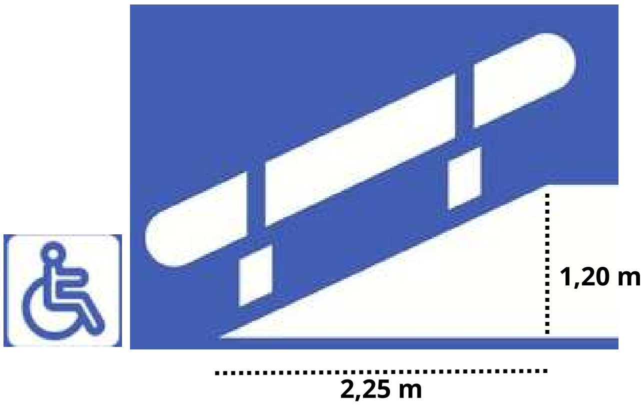
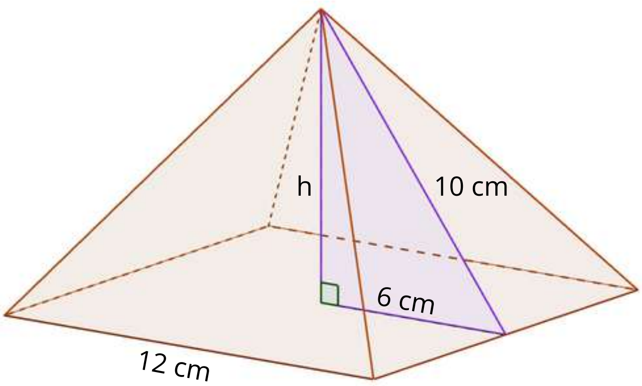


Imagem produzida no Canva

ATIVIDADE 10

Você precisa construir uma estrutura em forma de pirâmide para uma maquete escolar. A pirâmide tem base quadrada com 12 cm de lado e suas faces laterais são triângulos isósceles, cada um com altura de 10 cm. Qual é a altura da pirâmide?

A) 6 cm
B) 8 cm
C) 10 cm
D) 12 cm



ATIVIDADE 11

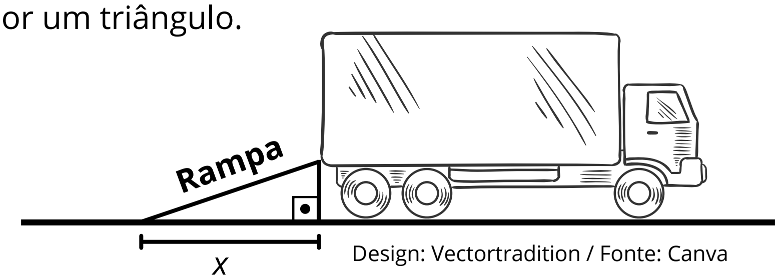
Uma construtora está projetando um telhado em formato triangular para possibilitar a construção de um sótão. O telhado tem formato de um triângulo retângulo e um pilar de sustentação será instalado exatamente onde está indicada a altura h, dividindo a base em dois segmentos, conforme mostra a figura abaixo.

Se o pilar dividirá a base em dois segmentos que medem 4 metros e 6 metros, qual deve ser a altura h desse pilar de sustentação?

A) 4,2 m
B) 4,5 m
C) 4,9 m
D) 5,2 m

ATIVIDADE 12

(SAEPE - 2009) Um caminhão estaciona em frente a uma rampa para facilitar o carregamento de mercadoria. Essa rampa tem 2,5 m de comprimento e atinge uma altura de 1,5 m do solo, como mostra a figura abaixo, onde a forma da rampa está representada por um triângulo.



Design: Vectortradition / Fonte: Canva

A distância entre o caminhão e o ponto de início de subida da rampa está representado na figura por x. Quanto mede essa distância?

A) 1 m
B) 2 m
C) 3 m
D) 4 m
E) 8 m

ATIVIDADE 13

Desenhe um triângulo e atribua medidas para cada lado. Faça uma ampliação desse triângulo que você desenhou, de tal forma que esses triângulos sejam semelhantes.
bservação: As medidas precisam satisfazer a condição de existência do triângulo!

ATIVIDADE 14

O Teorema de Pitágoras é uma ferramenta matemática poderosa para resolver problemas envolvendo triângulos retângulos. Agora, é a sua vez de criar um problema!

1. Elabore um problema que envolva um triângulo retângulo no contexto do dia a dia. Você pode pensar em situações como: uma escada encostada em uma parede, a diagonal de um campo retangular, ou a distância entre dois pontos em um terreno.
2. Apresente os dados do problema, definindo claramente os comprimentos conhecidos dos lados do triângulo (catetos e/ou hipotenusa).
3. Resolva o problema aplicando o Teorema de Pitágoras e mostre os cálculos detalhadamente.
4. Interprete a resposta, explicando o significado do resultado dentro da situação proposta.

Dica: Lembre-se de que o Teorema de Pitágoras é dado por:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

onde **a** e **b** são os **catetos** e **c** é a **hipotenusa**.

RETOMANDO O QUE APRENDEMOS

Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo desse capítulo. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?

Reflita sobre sua aprendizagem

- Sou capaz de reconhecer triângulos semelhantes, identificando as relações entre ângulos correspondentes e a proporcionalidade entre seus lados?
- Consigo estabelecer e demonstrar relações métricas no triângulo retângulo, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos para justificar essas relações?
- Sou capaz de compreender e demonstrar o Teorema de Pitágoras, recorrendo, quando necessário, à semelhança de triângulos?
- Consigo resolver problemas que envolvam as relações métricas do triângulo retângulo, aplicando corretamente os conceitos estudados?
- Sou capaz de resolver problemas que envolvam o Teorema de Pitágoras, interpretando situações do cotidiano e realizando os cálculos necessários?
- Consigo elaborar problemas que envolvam a aplicação do Teorema de Pitágoras, relacionando conceitos geométricos a diferentes contextos?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Reconhecer triângulos semelhantes ou as relações existentes entre ângulos e lados correspondentes nesses tipos de triângulos;	◯	◯	◯
Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos;	◯	◯	◯
Demonstrar o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos;	◯	◯	◯
Resolver problemas que envolvam relações métricas do triângulo retângulo;	◯	◯	◯
Resolver problemas que envolvam o teorema e Pitágoras;	◯	◯	◯
Elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras.	◯	◯	◯

Dica: Revise os tópicos que você marcou como "**preciso revisar**" e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências

ANDRINI, A. Praticando matemática - edição renovada - 9° ano - LA. Editora do Brasil, 2021.

BIANCHINI, E. Matemática Bianchini 9o ano: Manual do Professor. 10. ed. São Paulo, SP: Moderna, 2022.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

CLUBE DE MATEMÁTICA OBMEP. Problema para ajudar na escola: dois terrenos da rua Arquimedes. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-para-ajudar-na-escola-dois-terrenos-da-rua-arquimedes/. Acesso em: 5 mar. 2025.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria da Educação. Matemática – 2ª Série – 3ª Semana. Disponível em: https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/wp-content/uploads/2024/03/MAT-2a-Serie-3a-Semana.pdf. Acesso em: 06 mar. 2025.

GAY, Mara Regina Garcia (ed.). Araribá conecta matemática: 9º ano: manual do professor. São Paulo: Moderna, 2022.

GEOGEBRA. Relações métricas no triângulo retângulo – Aplicações. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/rxFkgzu5. Acesso em: 8 abr. 2025.

IEZZI, Gelson. Matemática e realidade: 9º ano. 10. ed. São Paulo: Saraiva Educação SA, 2022.

IMPA. OBMEP – Portal da OBMEP. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=10. Acesso em: 30 dez. 2024.

QUIZUR. Relações métricas no triângulo retângulo. Disponível em: https://pt.quizur.com/trivia/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo-z9a3. Acesso em: 8 mar. 2025.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida (ed.). SuperAÇÃO!: matemática: 9º ano: manual do professor. São Paulo: Moderna, 2022.

UNESP – IBILCE. O Teorema de Pitágoras. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/oteoremadepitagoras.pdf. Acesso em: 07 mar. 2025.