

Rotinas Pedagógicas Escolares

9º
Ano

Terceiro
Trimestre

Matemática

GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação



Coordenadores do Componente Curricular

GABRIEL LUIZ SANTOS KACHEL
LAIANA MENEGUELLI
LEOVEGILDO IZIDORO PEREIRA NETO
LILIAN CRISTINA RODRIGUES SARMENTO
RAYANE SALVIANO DE OLIVEIRA SILVA
WELLINGTON ROSA DE AZEVEDO
WILLIAM MANTOVANI

Validadores das Rotinas Pedagógicas Escolares

JÉSSICA MONTEIRO FALQUETTO
THIAGO CÉZAR DE PÁDUA ROSA
CARLOS EDUARDO MORAES PIRES

Professores bolsistas responsáveis pela elaboração das Rotinas Pedagógicas Escolares

5º ano EF

FRANCIELY GOMES FAVERO FERREIRA
PAULA AVAREZ CABANÊZ

6º ano EF

KARLA SOUTO DE AMORIM
MAYARA DOS SANTOS ZANARDI

7º ano EF

DAVI MARCIO BERMUDEZ LINO
HELIONARDO THOMAZ ALVES LOURENÇO

8º ano EF

NAFTALY CRISTAL FÉLIX
FABIANA BUENO

9º ano EF

AMECKSON DE SOUZA FERREIRA
LILIAN CRISTINA RODRIGUES SARMENTO

Prezado(a) Estudante!!!

Este material foi preparado para ajudar você a retomar, fortalecer e ampliar suas aprendizagens. Ao longo das atividades, você terá a oportunidade de rever conhecimentos importantes, superar dificuldades e avançar em sua aprendizagem.

Aqui, você encontrará atividades, situações-problema, desafios e diferentes propostas que foram pensadas para ajudar você a compreender melhor os conteúdos e desenvolver conhecimentos importantes para sua trajetória escolar.

Mas atenção: este material é um ponto de partida, não um ponto de chegada!

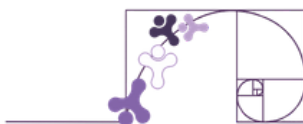
As atividades apresentadas são uma base para que você possa aprender, praticar e avançar. Por isso, seu professor poderá propor outras atividades, desafios, exemplos, pesquisas, jogos, experimentações e diferentes formas de aprender, de acordo com aquilo que você já sabe e com o que ainda precisa desenvolver.

Durante esse percurso, suas dúvidas, suas ideias, seus erros e suas descobertas também fazem parte da aprendizagem. Não tenha medo de tentar, perguntar, testar diferentes estratégias e buscar novas maneiras de resolver uma situação.

Use este material como uma oportunidade para aprender mais, descobrir o que você já consegue fazer e perceber o quanto ainda pode avançar.

Este material é a base. A sua curiosidade, a sua participação e o acompanhamento do seu professor ajudam a transformar essa base em novas aprendizagens.

Sumário



CAPÍTULO 8 - CIRCUNFERÊNCIA

Apresentação.....	06
Círculo e circunferência.....	07
Retomando o que aprendemos.....	19
Referências.....	20

CAPÍTULO 9 - NÚMEROS IRRACIONAIS, REAIS E OPERAÇÕES COM NÚMEROS REAIS

Apresentação.....	22
Conjunto dos números irracionais.....	24
Conjunto dos números reais.....	28
Prática experimental de Matemática (Prática 1).....	33
Operações com números reais.....	37
Retomando o que aprendemos.....	53
Referências.....	55

CAPÍTULO 10 - VOLUME DE PRISMAS E CILINDROS; PLANIFICAÇÕES E VISTAS; RELAÇÃO DE EULER

Apresentação.....	57
Relembrando figuras geométricas espaciais.....	58
Planificação de poliedros.....	61
Relação de Euler.....	62
Retomando o que aprendemos.....	73
Referências.....	74

CAPÍTULO 11 - FUNÇÕES

Apresentação.....	76
A ideia de função.....	77
Função afim.....	82
Função quadrática.....	96
Retomando o que aprendemos.....	112
Referências.....	114

Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

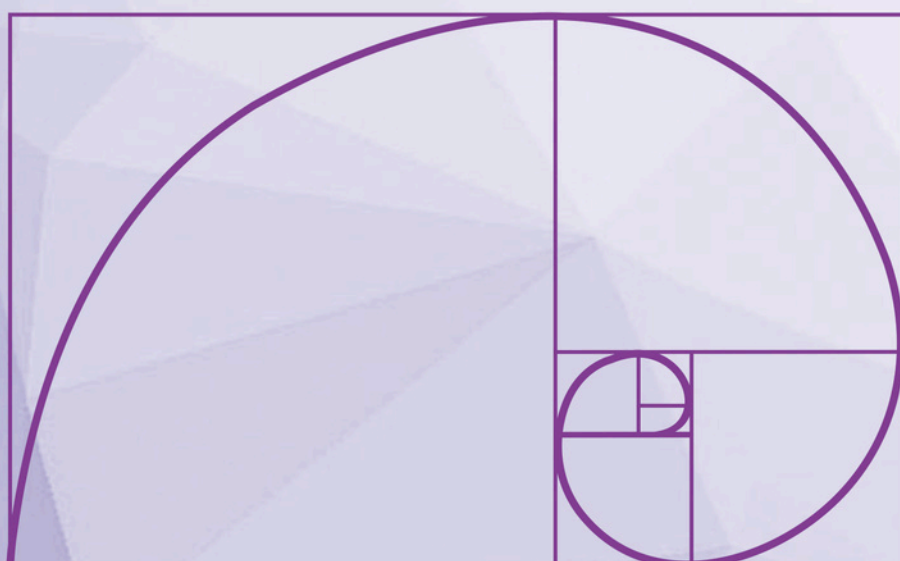


GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

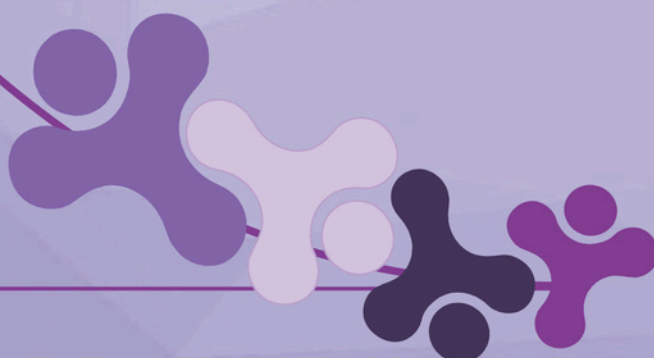


Gerência de Currículo
da Educação Básica

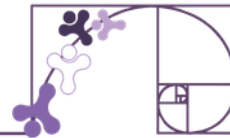
SEDU 2026



Capítulo 8: Circunferência



Apresentação



Prezado(a) estudante,

Você já percebeu como as circunferências estão presentes no nosso cotidiano, em rodas, relógios, placas, brinquedos e construções? Para compreendê-las, é fundamental conhecer seus elementos, como raio, diâmetro, corda, arco e centro, que ajudam a descrever e analisar formas circulares presentes em diferentes situações. O estudo da circunferência permite desenvolver a percepção espacial, compreender relações geométricas e resolver problemas envolvendo medidas e posições no plano. Além disso, explorar as propriedades da circunferência contribui para o raciocínio lógico e para a compreensão de aplicações da geometria em áreas como arquitetura, engenharia, artes e tecnologia.

O que você vai estudar neste capítulo

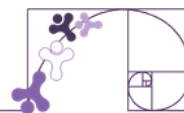
Neste capítulo, você explorará o universo da circunferência, identificando seus elementos essenciais, como raio, diâmetro, corda e arco, e compreendendo a aplicação da constante π no cálculo de comprimentos. Ao estudar as posições relativas de retas e as propriedades dos ângulos, você desenvolverá habilidades práticas para resolver problemas geométricos e reconhecer a importância dessas formas em áreas como engenharia, arquitetura e design, conectando a teoria matemática às estruturas do cotidiano.

Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

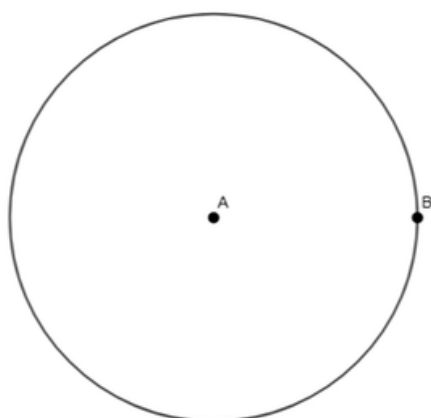
- ✓ Reconhecer circunferência/círculo como lugares geométricos, seus elementos (centro, raio, diâmetro, corda, arco, ângulo central, ângulo inscrito);
- ✓ Resolver problemas que envolvam relações entre os elementos de uma circunferência/círculo (raio, diâmetro, corda, arco, ângulo central, ângulo inscrito).

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

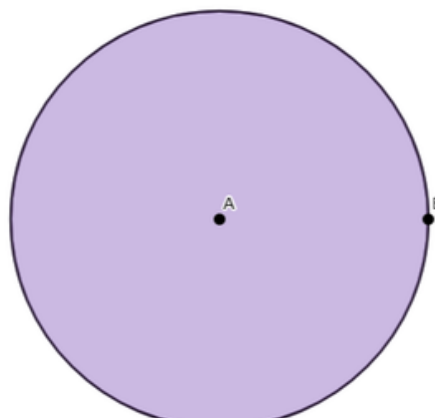


CÍRCULO E CIRCUNFERÊNCIA

Uma linha fechada em um plano, formada por pontos equidistantes de um ponto fixo (centro) é chamada **circunferência**. Já a união da circunferência com todos os pontos em seu interior é chamada **círculo**.



circunferência



círculo

ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA

Na circunferência apresentada na imagem ao lado, podemos destacar os seguintes elementos.

- O centro O.
- Os pontos A, B, C, D, E, F e G são pontos da circunferência.
- O **raio** da circunferência é qualquer segmento de reta que une o centro da circunferência a um de seus pontos. Na imagem, os segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OG}$ são exemplos de raio.
- A **corda** da circunferência é qualquer segmento de reta que une dois pontos distintos dela. Na imagem, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são exemplos de corda.
- O **diâmetro** da circunferência é qualquer corda que passa pelo centro da circunferência. Na imagem, $\overline{AB}$ é exemplo de um diâmetro.
- O **ângulo central** da circunferência é qualquer ângulo com vértice no centro e lados passando por pontos dessa circunferência. Na imagem, o ângulo $\widehat{BOG}$ é um exemplo de ângulo central.

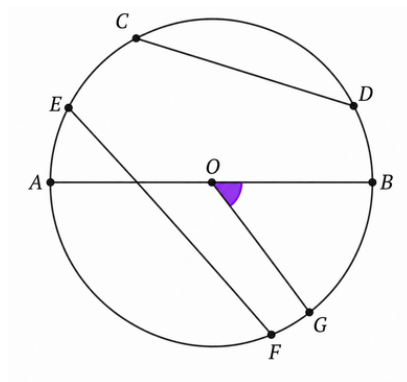


Imagem gerada por IA
Adaptada de Teixeira (2022)



COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Um aluno irá realizar uma atividade prática em que deverá medir o comprimento de objetos com formato circular, como tampas, latas e pratos, utilizando uma fita métrica ou barbante. Após medir o comprimento da circunferência de cada objeto, a aluna comparou esse valor com o do respectivo diâmetro, dividindo um pelo outro. Ela observou que, independentemente do objeto escolhido, o quociente se aproximava de 3,14. Para visualizar melhor os resultados, organizou os dados abaixo, facilitando a análise e a identificação dessa relação constante.

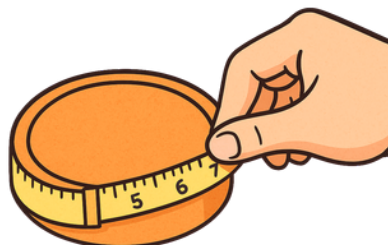


Imagem gerada por IA

Objeto	Circunferência (C)	Diâmetro (d)	Razão (C/d)
Tampa de leite em pó	32,4 cm	10,3 cm	≈ 3,15
Panela	60,2 cm	19,2 cm	≈ 3,14
Relógio de parede	125,7 cm	40 cm	≈ 3,14
CD	37,7 cm	12 cm	≈ 3,14

A relação entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é constante e corresponde a um número irracional representado pela letra grega π (pi). Essa proporção é a mesma em qualquer circunferência, o que nos permite expressá-la da seguinte forma:

$$\pi = \frac{C}{d} \quad \text{ou} \quad C = d \cdot \pi$$

Como a medida do comprimento do diâmetro é o dobro da medida do comprimento do raio ($d = 2r$), temos:

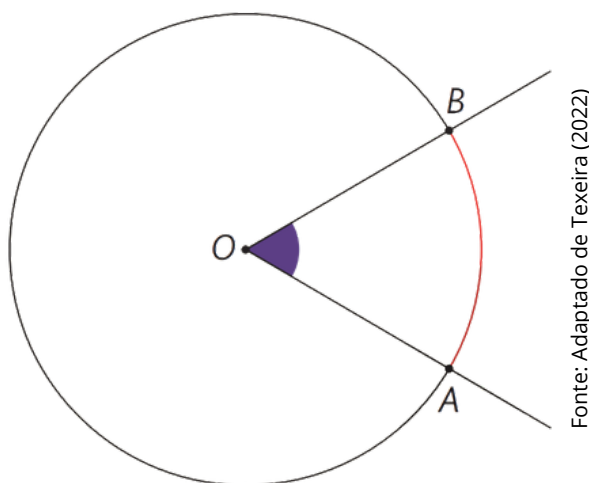
$$C = 2r \cdot \pi \quad \text{ou} \quad C = 2\pi r$$

Com essa fórmula, podemos calcular o comprimento aproximado de qualquer circunferência a partir do seu diâmetro.



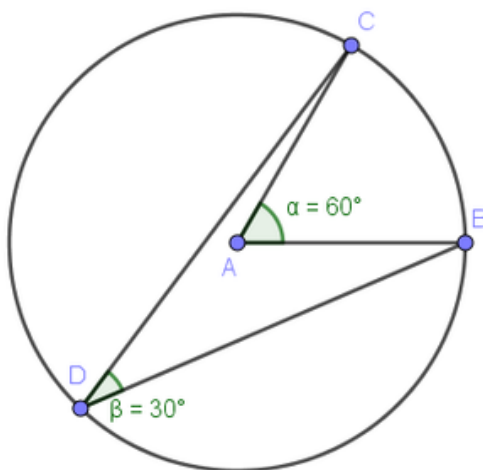
ÂNGULO CENTRAL

O ângulo central é aquele que tem o centro da circunferência como vértice. Na figura abaixo, o ângulo $\widehat{AOB}$ é um exemplo de ângulo central, sendo formado pelos segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. Esse tipo de ângulo divide a circunferência em duas partes, chamadas arcos, cujas extremidades são os pontos A e B. O arco menor pode ser representado por $\widehat{AB}$. A medida do arco, em graus, corresponde à medida do ângulo central que o determina. Assim, no exemplo da figura, temos: $\text{med}(\widehat{AB}) = \text{med}(\widehat{AOB})$



ÂNGULO INSCRITO

Utilizando o *GeoGebra*, um aluno construiu uma circunferência com centro no ponto A e formou um ângulo central $\widehat{BAC}$ com medida de 60° . Em seguida, ele criou o ângulo $\widehat{BDC}$, com vértice D localizado sobre a circunferência. Esse tipo de ângulo é conhecido como ângulo inscrito. O que podemos observar sobre a relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito?

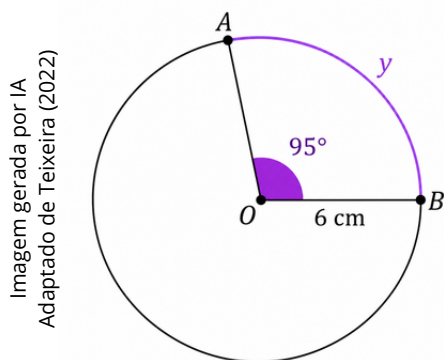


Se você respondeu que o ângulo inscrito mede a metade do ângulo central que subtende o mesmo arco, está correto!



COMPRIMENTO DO ARCO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

No exemplo a seguir, vamos calcular a medida do comprimento de um arco de circunferência determinado por um ângulo central. Observe os dados abaixo.



- O é o centro;
- 6 cm é a medida de comprimento do raio;
- 95° é a medida do ângulo central;
- y é a medida do comprimento do arco.

Antes de calcular a medida do comprimento y, calculamos inicialmente a medida do comprimento da circunferência. Considerando $\pi = 3,14$, temos:

$$C = 2\pi r$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 6$$

$$C = 37,68 \text{ cm}$$

Depois, utilizando uma regra de três simples, é possível determinar o comprimento do arco da circunferência. Isso porque o comprimento do arco e a medida do ângulo central correspondente são grandezas diretamente proporcionais.

$$\frac{360}{95} = \frac{37,68}{y}$$

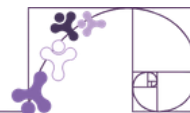
$$360 \cdot y = 95 \cdot 37,68$$

$$360y = 3579,60$$

$$y \approx 9,94$$

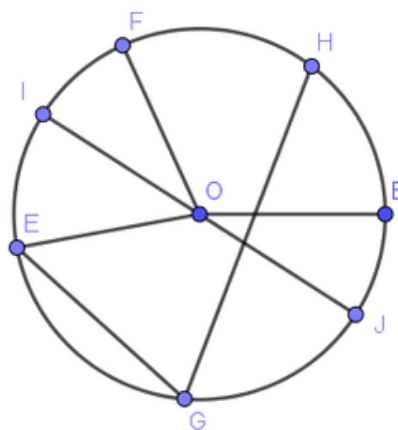
Sendo assim, o comprimento do arco é, aproximadamente, 9,94 cm.

Exercícios Resolvidos



1) A circunferência a seguir têm centro O.

- a) Identifique e nomeie quatro raios.
- b) Identifique e nomeie três cordas.
- c) Identifique e nomeie um diâmetro.
- d) Identifique e nomeie dois ângulos centrais.



RESOLUÇÃO:

Algumas possibilidades de respostas:

a) $\overline{OF}$, $\overline{OI}$, $\overline{OE}$ e $\overline{OB}$.

b) $\overline{IJ}$, $\overline{GH}$, $\overline{EG}$.

c) $\overline{EB}$.

d) $\widehat{EOI}$ e $\widehat{BOJ}$.

2) Responda a cada um dos itens a seguir:

- a) Qual é o comprimento do diâmetro de uma circunferência cujo raio mede 5,6 cm?
- b) Qual é o comprimento do raio de uma circunferência cujo diâmetro mede 18 cm?

RESOLUÇÃO:

a) Sabemos que o diâmetro é o dobro do raio:

$$d = 2 \cdot r = 2 \cdot 5,6 = 11,2 \text{ cm}$$

b) Sabemos que o raio é a metade do diâmetro:

$$r = d \div 2 = 18 \div 2 = 9 \text{ cm}$$



3) Em uma folha de cartolina retangular com dimensões de 30,2 cm de comprimento e 18,6 cm de largura, um estudante desenhou a maior circunferência possível dentro da folha. Qual é, em centímetros, a medida do raio dessa circunferência?

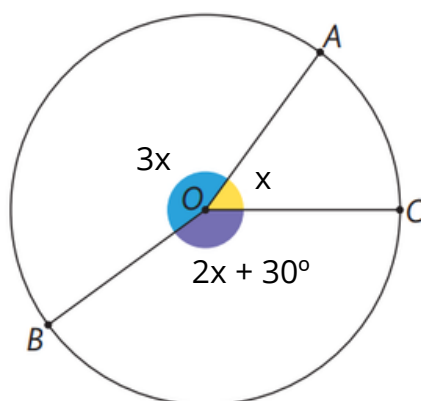
RESOLUÇÃO:

A maior circunferência possível dentro de um retângulo tem como diâmetro o valor da menor medida do retângulo. A menor medida da cartolina é 18,6 cm. Então, o diâmetro da circunferência é 18,6 cm. Agora, calculamos o raio:

$$\text{raio} = \text{diâmetro} \div 2$$

$$\text{raio} = 18,6 \div 2 = 9,3 \text{ cm}$$

4) Na circunferência de centro O a seguir estão indicadas as medidas de três ângulos centrais. Calcule a medida de cada um deles em graus.



Fonte: Adaptado de Texeira (2022)

RESOLUÇÃO:

A soma de todos os ângulos centrais de uma circunferência é sempre igual a 360° . Com base nisso, podemos montar a seguinte equação:

$$3x + 2x + 30^\circ + x = 360^\circ$$

$$3x = 3 \cdot 55^\circ = 165^\circ$$

$$6x + 30^\circ - 30^\circ = 360^\circ - 30^\circ$$

$$2x + 30^\circ = 2 \cdot 55^\circ + 30^\circ = 140^\circ$$

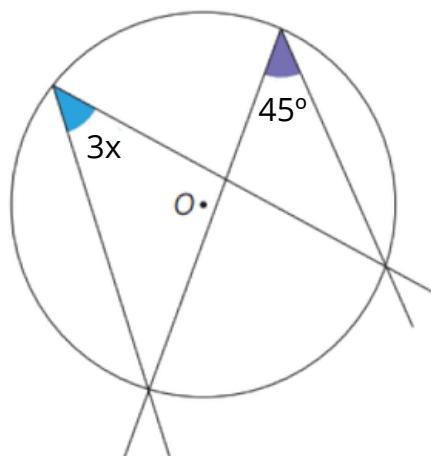
$$6x = 330^\circ$$

$$x = 55^\circ$$

Dessa forma, $\widehat{AOC} = 55^\circ$, $\widehat{BOC} = 140^\circ$ e $\widehat{AOB} = 165^\circ$.



5) Calcule o valor de x na circunferência com centro em O , conforme a figura apresentada.



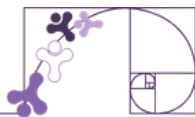
Fonte: Adaptado de Texeira (2022)

RESOLUÇÃO:

Se os dois ângulos inscritos interceptam o mesmo arco, então:

$$\begin{aligned} 3x &= 45^\circ \\ \frac{3x}{3} &= \frac{45^\circ}{3} \\ x &= 15^\circ \end{aligned}$$

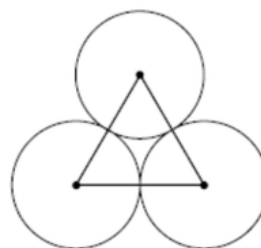
Portanto, com base na igualdade entre os ângulos inscritos que interceptam o mesmo arco, concluímos que o valor de x é 15° .



ATIVIDADE 1

(PAEBES) O triângulo abaixo foi construído unindo-se os centros de três circunferências tangentes de 5 cm de raio. Quanto mede cada lado desse triângulo?

- A) 30 cm
- B) 20 cm
- C) 15 cm
- D) 10 cm

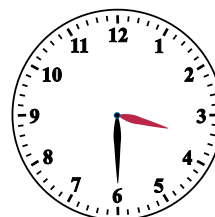


Fonte: D11 (9º ANO - Mat.) - Blog do Prof. Warles, 2025.

ATIVIDADE 2

Gabriel tem um compromisso às 15h30. Qual é a medida do menor ângulo entre os ponteiros das horas e dos minutos neste horário?

- A) 75°
- B) 90°
- C) 60°
- D) 45°



Design: Szkolne Inspiracje / Fonte: Canva

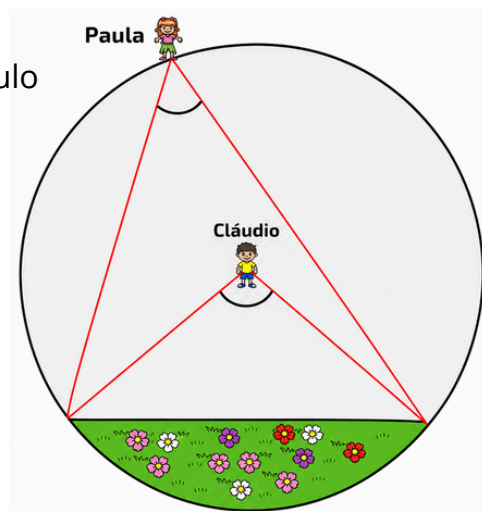


ATIVIDADE 3

Paula e Cláudio estão em pontos distintos de uma praça circular, observando o mesmo jardim, como mostra a figura.

Sobre a relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito, podemos afirmar:

- A) são iguais.
- B) o ângulo central é dobro do ângulo inscrito.
- C) o ângulo central é o triplo do ângulo inscrito.
- D) o ângulo central é a metade do ângulo inscrito.



Fonte: D11 (9º ANO - Mat.) - Blog do Prof. Warles, 2025.

ATIVIDADE 4

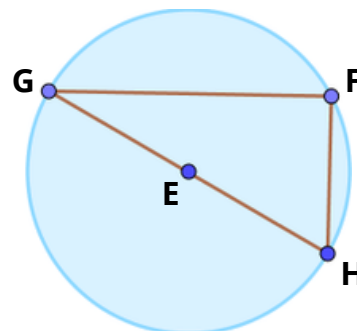
Durante uma atividade prática em um parque temático de matemática, os estudantes do 9º ano observaram uma maquete circular que representa um lago. Três estacas foram colocadas nos pontos F, G e H da borda do lago, formando o triângulo FGH , como mostrado na figura.

O monitor explicou que, neste triângulo:

- O ponto E representa o centro da circunferência.
- O segmento $\overline{GH}$ é um diâmetro do círculo.
- A medida do ângulo $F\hat{G}H = 34^\circ$.

Com base nessas informações e nas propriedades da circunferência, qual é a medida do ângulo $F\hat{H}G$ no triângulo FGH ?

- A) 56°
- B) 68°
- C) 90°
- D) 37°



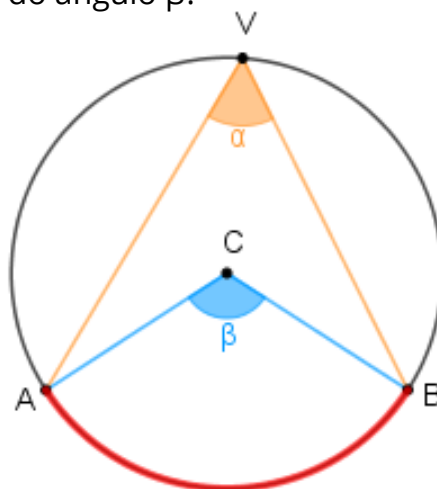
Fonte: Elaboração própria



ATIVIDADE 5

Durante uma aula de matemática, a professora mostrou a figura de uma circunferência onde o ponto C é o centro. Ela explicou que o ângulo α , formado fora do centro, é chamado de ângulo inscrito, e que ele intercepta o mesmo arco que o ângulo central β . Sabendo que $\alpha = 40^\circ$, qual é o valor do ângulo β ?

- A) 40°
- B) 60°
- C) 80°
- D) 100°

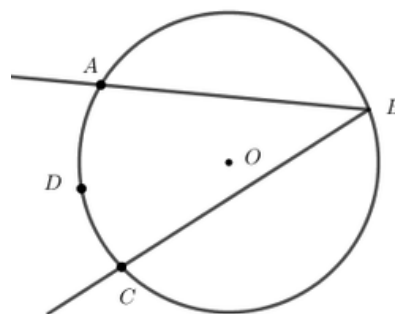


Fonte: CLUBES OBMEP, 2025

ATIVIDADE 6

OBMEP - Na figura, o ângulo $\widehat{ABC}$ mede 76° . Calcule a medida angular do arco $\widehat{ADC}$.

- A) 38°
- B) 76°
- C) 90°
- D) 152°



Fonte: CLUBES OBMEP, 2025

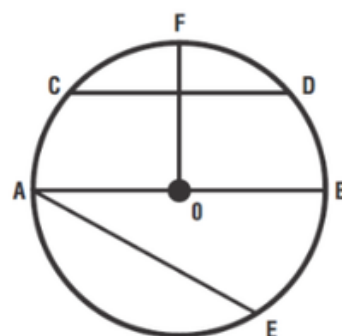


ATIVIDADE 7

Na aula de matemática, os alunos do 9º ano foram desafiados a montar um jogo de alvo utilizando uma circunferência. Para planejar o desenho no papel milimetrado, a professora Lilian pediu que identificassem corretamente os elementos que compõem a figura do alvo.

Ela marcou o centro como ponto O e desenhou os segmentos $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ e $\overline{OF}$ como mostra a imagem.

Com base na posição desses segmentos em relação à circunferência, qual é a classificação correta para $\overline{CD}$, $\overline{OF}$ e $\overline{AB}$, nessa ordem?



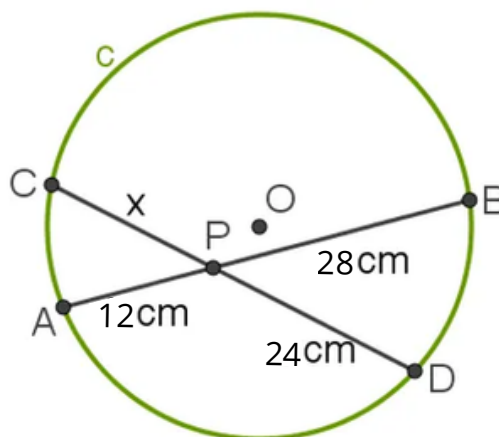
Fonte: D11 (9º ANO - Mat.) - Blog do Prof. Warles, 2025.

- A) corda, raio e diâmetro
- B) diâmetro, raio e corda
- C) raio, corda e diâmetro
- D) corda, diâmetro e raio

ATIVIDADE 8

Determine o valor de x, sabendo que, quando duas cordas de uma circunferência se intersectam internamente, o produto das medidas dos segmentos de uma corda é igual ao produto das medidas dos segmentos da outra.

- A) 56 cm
- B) 16 cm
- C) 14 cm
- D) 8 cm



Fonte: Mundo Educação, 2025.

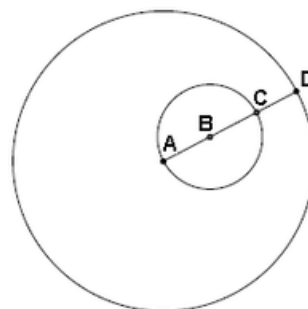


ATIVIDADE 9

Na figura, o ponto B é o centro da circunferência menor, de raio 2,25 cm. O segmento $\overline{AD}$ intercepta duas circunferências e passa por B. Sabe-se que o ponto D pertence à circunferência maior, de raio 8,1 cm.

Com base nessas informações, qual é o comprimento do segmento $\overline{CD}$?

- A) 2,25 cm
- B) 3,6 cm
- C) 4,5 cm
- D) 5,85 cm

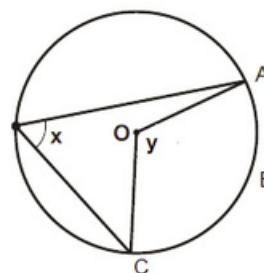


Fonte: D11 (9º ANO - Mat.) - Blog do Prof. Warles, 2025.

ATIVIDADE 10

Na figura, o ponto O é o centro da circunferência. Sabendo que x mede 35° , quanto mede o arco $\widehat{ABC}$?

- A) 35°
- B) 70°
- C) 90°
- D) 105°



Fonte: Blog do Enem



Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo desse capítulo. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?



Refleta sobre sua aprendizagem

- Sou capaz de reconhecer a circunferência e o círculo como lugares geométricos, identificando seus elementos, como centro, raio, diâmetro, corda, arco, ângulo central e ângulo inscrito?
- Consigo resolver problemas que envolvam relações entre os elementos de uma circunferência e de um círculo, utilizando conceitos de raio, diâmetro, corda, arco, ângulo central e ângulo inscrito de forma adequada?

Autoavaliação

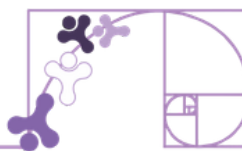
Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Conseguí compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Reconhecer circunferência/círculo como lugares geométricos, seus elementos (centro, raio, diâmetro, corda, arco, ângulo central, ângulo inscrito).	☐	☐	☐
Resolver problemas que envolvam relações entre os elementos de uma circunferência/círculo (raio, diâmetro, corda, arco, ângulo central, ângulo inscrito).	☐	☐	☐



Dica: Revise os tópicos que você marcou como “**preciso revisar**” e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências



BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

CLUBES OBMEP. Ângulo central e ângulo inscrito – Problemas. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/angulo-central-e-angulo-inscrito-problemas/>. Acesso em: 19 abr. 2025.

MUNDO EDUCAÇÃO. Relações métricas na circunferência: relação entre cordas. 2025. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/relacoes-metricas-na-circunferencia-relacao-entre-cordas.htm>. Acesso em: 30 abr. 2025.

NOVA ESCOLA. Triângulo retângulo inscrito na circunferência – Plano de aula. Disponível em: <https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/9ano/matematica/triangulo-retangulo-inscrito-na-circunferencia/1454>. Acesso em: 19 abr. 2025.

Orientações curriculares. Currículo ES, 2024. Disponível em: <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares/>. Acesso em: 10 fev. 2025.

Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

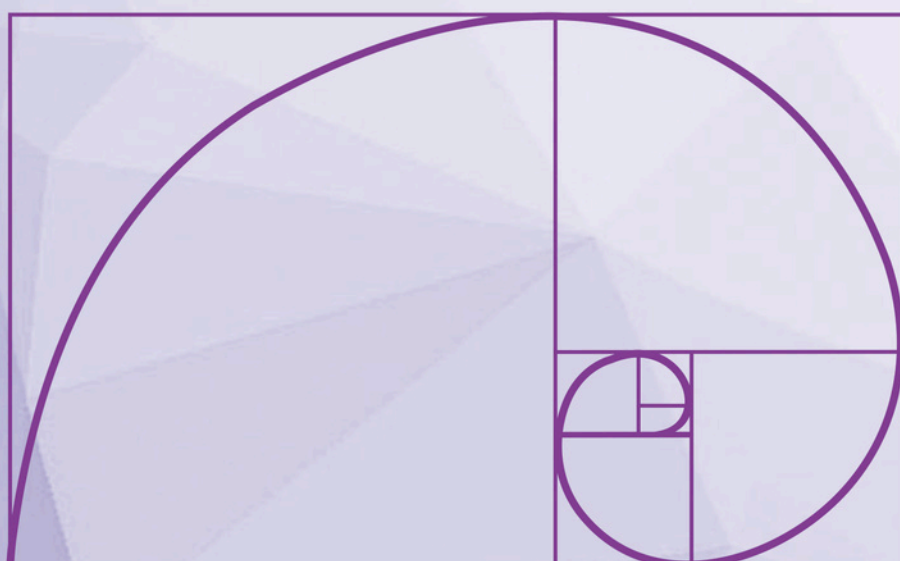


GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

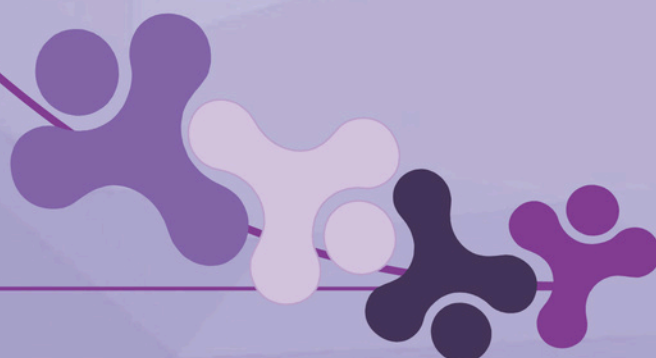


Gerência de Currículo
da Educação Básica

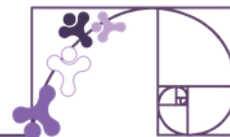
SEDU 2026



Capítulo 9: Números irracionais, reais e operações com números reais



Apresentação



Prezado(a) estudante,

Você já percebeu como os números estão presentes em diversas situações do nosso cotidiano, como em medidas, cálculos, estimativas e comparações? Para compreender melhor essas situações, estudamos os números irracionais e os números reais, que ampliam nossa compreensão sobre os diferentes conjuntos numéricos. Os números irracionais possuem infinitas casas decimais não periódicas, enquanto os números reais englobam tanto os números racionais quanto os irracionais. Além disso, ao realizar operações com números reais, desenvolvemos estratégias para resolver problemas, interpretar resultados e aplicar conhecimentos matemáticos em diferentes contextos do dia a dia, fortalecendo nosso raciocínio lógico e nossa capacidade de análise.

O que você vai estudar neste capítulo

Neste capítulo, você será convidado(a) a expandir seu conhecimento sobre conjuntos numéricos ao explorar a natureza dos números irracionais e a estrutura completa dos números reais, compreendendo a representação desses valores na reta numérica e as propriedades das operações fundamentais. Você aprenderá a identificar dízimas não periódicas e raízes não exatas, como $\sqrt{2}$ e π , dominando técnicas para simplificar expressões e realizar cálculos precisos envolvendo potências e radicais. Ao longo do estudo, você desenvolverá o raciocínio lógico necessário para diferenciar conjuntos e interpretar fenômenos que exigem alta precisão, percebendo como o domínio dos reais é essencial para a ciência, a tecnologia e a resolução de problemas complexos do dia a dia.

Expectativas de aprendizagem

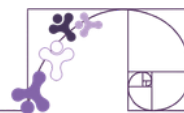
Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- ✓ Reconhecer que o lado de um quadrado e sua diagonal são incomensuráveis;
- ✓ Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica;
- ✓ Estimar a localização de alguns números irracionais na reta numérica: raízes quadradas não exatas, pi e phi (número de ouro);

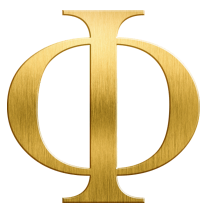


- ✓ Comparar ou ordenar números reais, com ou sem suporte da reta numérica;
- ✓ Calcular o resultado de adições, subtrações, multiplicações ou divisões envolvendo números reais;
- ✓ Calcular o resultado de potenciação ou radiciação envolvendo números reais.

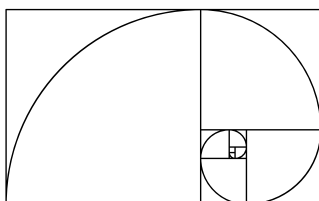
Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.



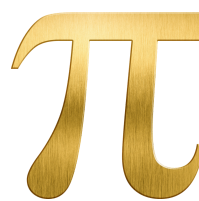
CONJUNTOS DOS NÚMEROS IRRACIONAIS



Design: TiTi Lee / Fonte: canva



Design: Koblizeek / Fonte: canva



Design: TiTi Lee / Fonte: canva

A razão áurea resulta em um número que fascina a humanidade há séculos. Conhecido também como número de ouro ou simplesmente *phi* (representado pelas letras gregas φ ou Φ), esse número aparece de maneira surpreendente em diversas áreas do conhecimento humano. Desde a arte até a arquitetura, passando pela biologia e até mesmo pela astronomia, ele se destaca por estar associado a formas consideradas harmoniosas e esteticamente agradáveis. Civilizações antigas, como os gregos, acreditavam que a proporção envolvendo a razão áurea possuía propriedades quase místicas.

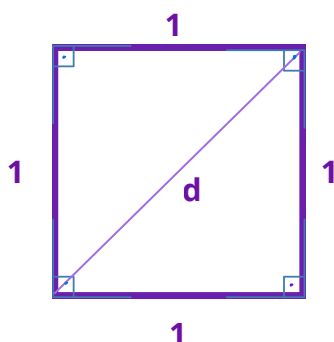
A razão áurea resulta em um número irracional, assim como o famoso π (pi). Isso significa que sua representação decimal é infinita e não periódica, ou seja, ela nunca termina e não apresenta uma repetição regular de dígitos. Estima-se que seu valor aproximado seja 1,6180339887..., mas é impossível escrevê-lo de forma exata com algarismos decimais ou fração comum. Essa característica já revela uma das maravilhas da matemática: certos números fogem completamente dos padrões mais simples de representação.

Apesar de toda a aura mística que envolve o número Φ , é importante lembrar que ele é, antes de tudo, um conceito matemático. Sua presença em estruturas naturais, como o arranjo das pétalas de flores ou a disposição das sementes em um girassol, não deve ser interpretada como algo sobrenatural, mas como um convite para observar o mundo por meio de uma lente matemática. O estudo desses padrões amplia nosso entendimento sobre o universo e torna a Matemática ainda mais fascinante.



Nem todos os números com infinitas casas decimais apresentam um padrão de repetição. Quando os algarismos decimais se estendem indefinidamente sem formar uma sequência que se repete, estamos diante de um número irracional. Esses números não podem ser escritos na forma de fração exata, pois sua parte decimal é infinita e não periódica. O conjunto dos números irracionais inclui exemplos famosos como π (pi), usado em cálculos de circunferência, e $\sqrt{2}$, a raiz quadrada de 2, que aparece em contextos geométricos. Eles se distinguem dos racionais justamente por não possuírem uma fração geratriz e por apresentarem uma sequência decimal que nunca se repete de forma regular.

Consideremos um quadrado de lado unitário.



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2}, \text{ pois } d > 0.$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135623...$$

$\sqrt{2}$ é um número cuja representação decimal tem infinitas casas não periódicas depois da vírgula.

Em um quadrado, a relação entre o lado e a diagonal pode ser estudada por meio do Teorema de Pitágoras. Quando aplicamos esse teorema em um quadrado de lado 1, descobrimos que a diagonal mede $\sqrt{2}$, um número que não pode ser escrito como fração. A razão entre a diagonal e o lado é $\sqrt{2}$, que é um número irracional. Isso significa que o lado e a diagonal não têm uma medida comum exata, eles são incomensuráveis. Essa descoberta, que remonta aos antigos gregos, foi um dos primeiros indícios da existência dos números irracionais.



No diagrama de Venn ao lado, está representada a relação entre os conjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$), dos inteiros ($\mathbb{Z}$), dos racionais ($\mathbb{Q}$) e dos irracionais ($\mathbb{I}$).

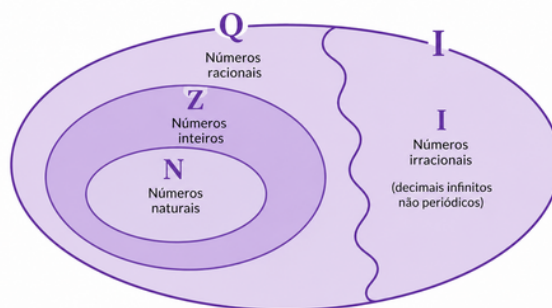


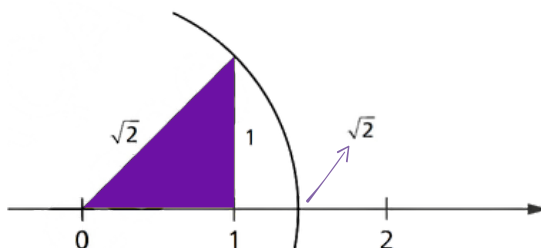
Imagem gerada por IA

REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS NA RETA

Há um procedimento geométrico que permite representar alguns números irracionais na reta ordenada com o uso de um compasso.

Vamos ver como é possível, por exemplo, localizar o número irracional $\sqrt{2}$ em uma reta numérica, partindo da construção de um triângulo retângulo isósceles, em que os catetos têm a mesma medida. Acompanhe:

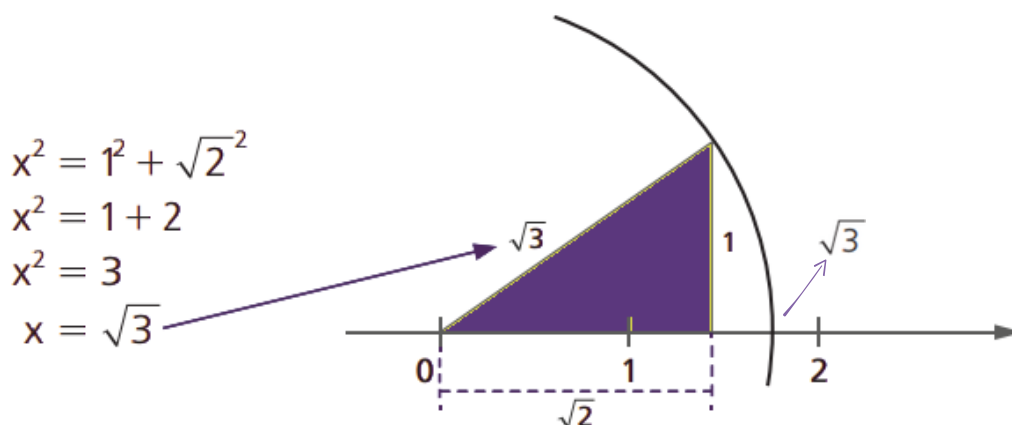
Vamos construir um triângulo retângulo isósceles cujos lados menores medem 1 unidade, com um dos catetos sobre a reta numérica.



O maior lado desse triângulo mede $\sqrt{2}$ unidades. O ponto correspondente a esse valor na reta numérica pode ser encontrado colocando-se a ponta-seca do compasso em 0 e tomando como raio a medida da hipotenusa. O ponto em que a ponta de grafite cruza a reta numérica corresponde a $\sqrt{2}$.

Podemos fazer uma construção semelhante para posicionar o número irracional $\sqrt{3}$ sobre a reta numérica.

Vamos, a partir da figura anterior, construir um triângulo retângulo cujos lados menores medem agora 1 e $\sqrt{2}$ unidades. Podemos verificar que a medida do maior lado desse triângulo é $\sqrt{3}$.



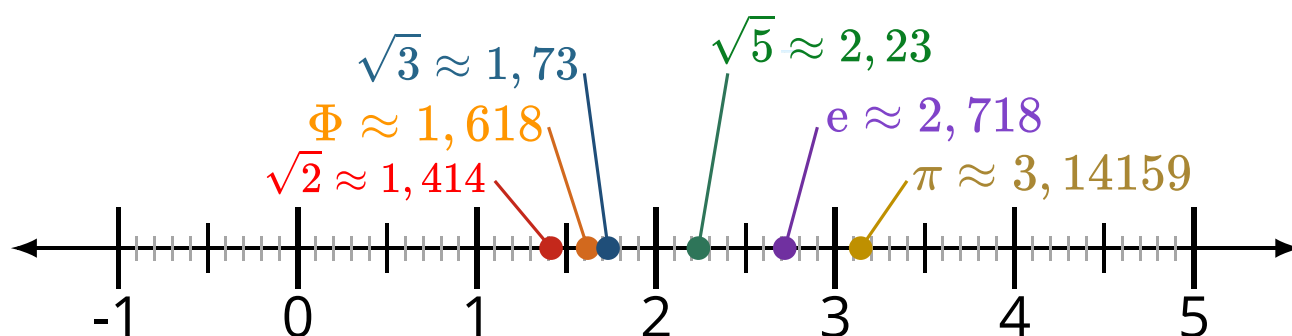
Observando essas construções geométricas, é possível perceber que os números irracionais $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ estão entre os números 1 e 2.

Com o uso de uma calculadora, conferimos que $\sqrt{2} = 1,41421356237309...$. Podemos considerar que um valor aproximado para $\sqrt{2}$ é 1,414.

Ainda com o uso da calculadora, conferimos que $\sqrt{3} = 1,732050807568...$, podendo considerar que um valor aproximado é 1,732.

Outra possibilidade é localizar os números irracionais de **modo aproximado**, focando na casa dos décimos para representar o número em questão na reta numérica. Podemos representar $\sqrt{2}$ aproximadamente na posição 1,4 da reta numérica, assim como na posição 1,7 para $\sqrt{3}$.

Abaixo apresentamos uma reta numérica com alguns números irracionais.





No diagrama de Venn ao lado, está representada a relação entre os conjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$), dos inteiros ($\mathbb{Z}$), dos racionais ($\mathbb{Q}$) e dos irracionais ($\mathbb{I}$).

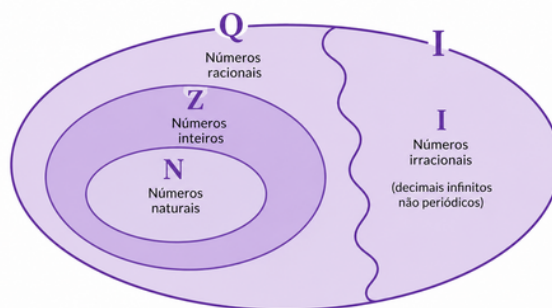


Imagem gerada por IA

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Quando reunimos todos os números racionais (que podem ser escritos como frações) com os números irracionais (que possuem casas decimais infinitas e não periódicas), formamos um conjunto ainda maior: o conjunto dos números reais. Esse conjunto é representado pela letra $\mathbb{R}$ e inclui todos os tipos de números que usamos no dia a dia e na matemática escolar: naturais, inteiros, decimais, frações e raízes não exatas. Ou seja, qualquer número que possa ser representado em uma reta numérica pertence ao conjunto dos números reais.

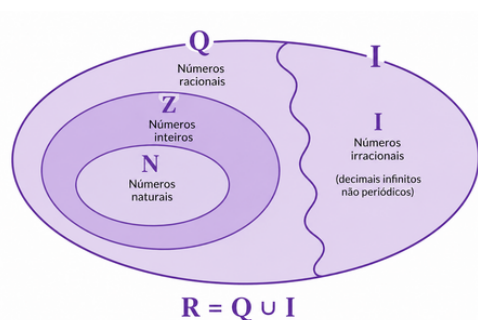
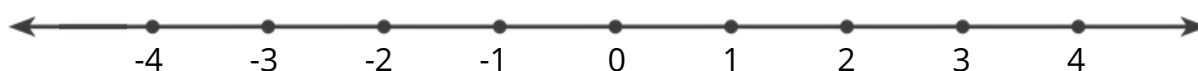


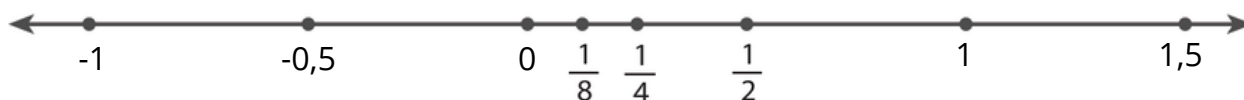
Imagem gerada por IA

REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NA RETA NUMÉRICA

Já vimos como representar números inteiros em uma reta numérica.



Da mesma maneira, vimos como representar números racionais em uma reta.

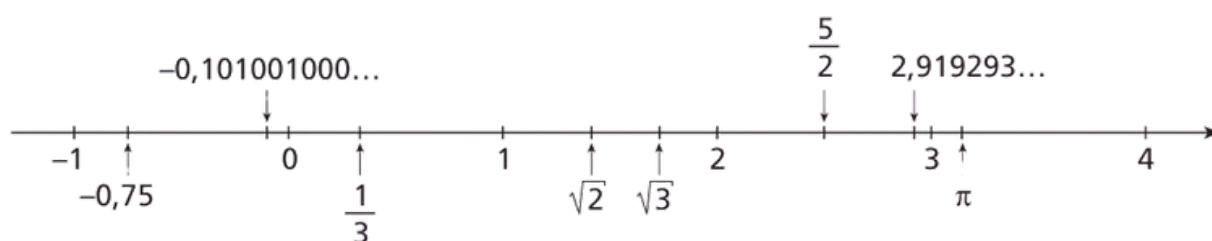




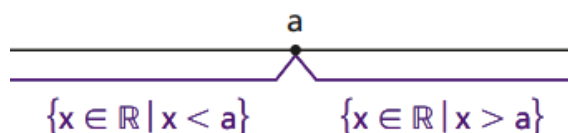
Entendemos que é impossível representar todos os números, pois, entre dois números racionais, existe uma infinidade de outros números racionais. Mesmo que fosse possível, os pontos que representariam esses números não seriam suficientes para cobrir toda a reta numérica. Faltariam ainda os pontos correspondentes aos **números irracionais** para completá-las.

Para cada número real, há um ponto correspondente na reta numérica e, para cada ponto da reta, há um número real correspondente. Por isso, dizemos que existe uma correspondência 1 a 1 entre os números reais e os pontos de uma reta.

Se marcarmos na reta ordenada os números racionais e os números irracionais, preencheremos totalmente a reta, que passará a se chamar **reta real ou reta numérica**. Veja alguns exemplos de números reais.



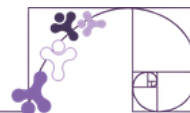
Na reta real, os números estão ordenados. Um número **a** é menor que qualquer número **x** colocado à sua direita e maior que qualquer número **x** à sua esquerda.



Na reta real acima, temos a seguinte relação entre os números:

$$-1 < -0,75 < 0,101001000... < 0 < \frac{1}{3} < 1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2 < \frac{5}{2} < 2,919293... < 3 < \pi < 4$$

Exercícios Resolvidos



1) Determine o símbolo que substitui corretamente cada espaço usando $\in$, $\notin$, $\supset$, $\subset$.

a) $0 \text{ ___ } \mathbb{R}$

e) $(\mathbb{I} \cup \mathbb{Z}) \text{ ___ } \mathbb{R}$

b) $\mathbb{Q} \text{ ___ } \mathbb{R}$

f) $0,25 \text{ ___ } \mathbb{Q}$

c) $\mathbb{Z} \text{ ___ } \mathbb{N}$

g) $0,333... \text{ ___ } \mathbb{I}$

d) $\mathbb{R} \text{ ___ } \mathbb{Z}$

h) $\mathbb{I} \text{ ___ } \mathbb{R}$

RESOLUÇÃO:

Considerando que:

$\subset$ - Está contido: quando um conjunto é subconjunto de outro, ou seja, está dentro de outro.

$\supset$ - Contém: quando um conjunto possui um subconjunto, ou seja, quando um conjunto tem um subconjunto dentro.

$\in$ - Pertence: quando um elemento pertence a um conjunto.

$\notin$ - Não pertence: quando um elemento não faz parte do conjunto.

a) $0 \in \mathbb{R}$

e) $(\mathbb{I} \cup \mathbb{Z}) \subset \mathbb{R}$

b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

f) $0,25 \in \mathbb{Q}$

c) $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$

g) $0,333... \notin \mathbb{I}$

d) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$

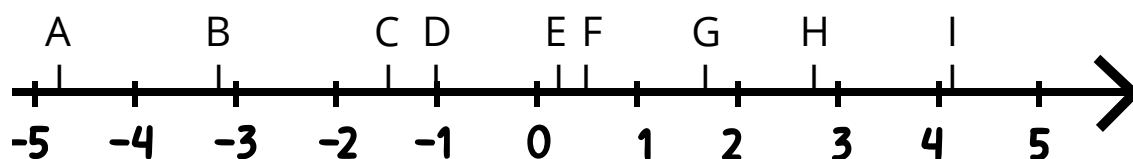
h) $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$



2) Associe cada número apresentado a uma das letras indicadas na reta numérica.

$$\sqrt{3}; \quad -1; \quad \frac{3}{7}; \quad -1,5; \quad \sqrt{17};$$

$$-4,785; \quad \sqrt{8}; \quad \frac{4}{25}; \quad -3,2$$



RESOLUÇÃO:

$$A = -4,785$$

$$F = \frac{3}{7}$$

$$B = -3,2$$

$$G = \sqrt{3}$$

$$C = -1,5$$

$$H = \sqrt{8}$$

$$D = -1$$

$$I = \sqrt{17}$$

$$E = \frac{4}{25}$$

3) Represente os números abaixo em uma reta numérica e, em seguida, escreva-os em ordem crescente.

$$\sqrt{5}; \quad -\frac{2}{5}; \quad \sqrt{25}; \quad 5,222...; \quad -2,5; \quad +\sqrt{2}; \quad -\sqrt{2}$$



RESOLUÇÃO:

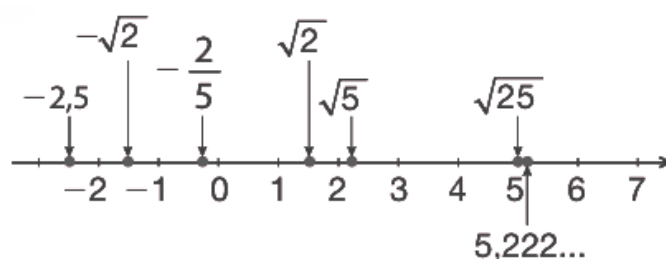
Para posicioná-los corretamente na reta numérica, precisamos encontrar o valor aproximado das raízes e das frações.

Vamos calcular:

$$\sqrt{5} \approx 2,236... \quad -\frac{2}{5} = -0,4 \quad \sqrt{25} = 5 \quad 5,222... \quad -2,5$$

$$\sqrt{2} \approx 1,41421... \quad -\sqrt{2} \approx -1,41421...$$

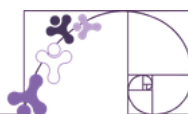
Agora que temos as aproximações decimais, basta posicioná-los na reta numérica.



Enfim, organizamos os números do menor para o maior valor, ou seja, em ordem crescente:

$$-2,5 < -\sqrt{2} < -\frac{2}{5} < \sqrt{2} < \sqrt{5} < \sqrt{25} < 5,222...$$

Material Extra



VÍDEO

Números Irracionais

<https://www.youtube.com/watch?v=uc0EpuarO9o>

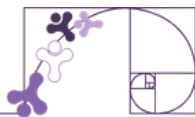




PRÁTICAS EXPERIMENTAIS DE *Matemática* PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

No ano de 2026, o Ensino Fundamental – Anos Finais, apresenta, no componente curricular Matemática, as Práticas Experimentais de Matemática, que têm como finalidade fomentar o processo de ensino e aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento e a consolidação de habilidades, do pensamento crítico e da compreensão e aplicação da lógica matemática no cotidiano.

Nesse contexto, seu(sua) professor(a) conduzirá você e sua turma em uma prática experimental de Matemática, com o objetivo de promover uma aprendizagem mais dinâmica e participativa. A proposta busca evidenciar que o conhecimento matemático está presente em diversas situações do dia a dia e que aprender de forma colaborativa torna esse processo mais significativo e interessante.



ATIVIDADE 1

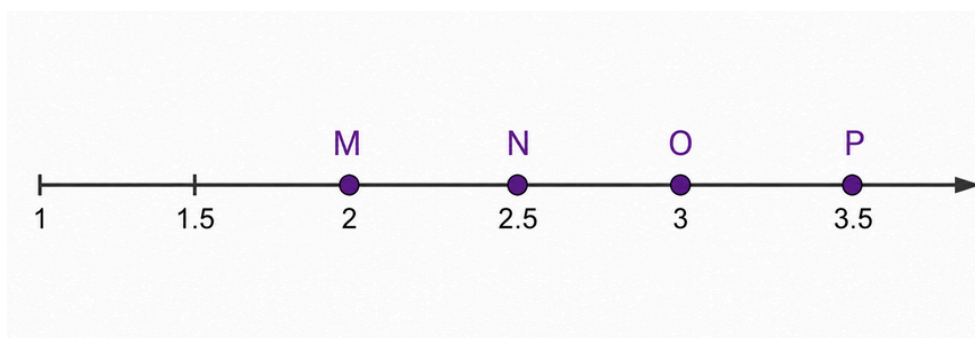
O número irracional $\sqrt{30}$ está entre os números inteiros 5 e 6 pois **30** está entre **$5^2 = 25$ e $6^2 = 36$** .

Seguindo nesse mesmo raciocínio, podemos afirmar que o número irracional $\sqrt{105}$ está entre:

- A) 8 e 9
- B) 9 e 10
- C) 10 e 11
- D) 11 e 12

ATIVIDADE 2

Na reta numérica abaixo, qual ponto está mais próximo da localização do número irracional $\sqrt{6}$?

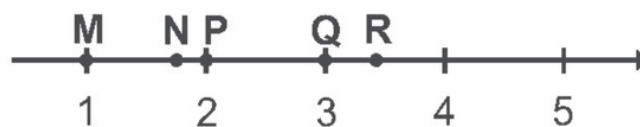


- A) M
- B) N
- C) O
- D) P



ATIVIDADE 3

Observe abaixo cinco pontos representados na reta real dividida em segmentos de mesma medida.

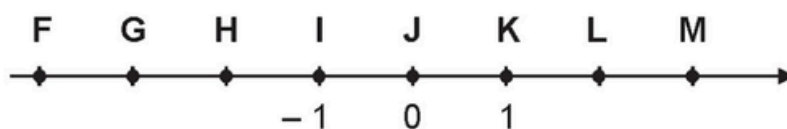


O número $2\sqrt{3}$ está melhor representado pelo ponto

- A) N.
- B) P.
- C) Q.
- D) R.

ATIVIDADE 4

Observe a reta numérica abaixo. Essa reta está dividida em segmentos de mesma medida.



O número correspondente a $-\sqrt{5}$ está localizado entre quais pontos dessa reta?

- A) F e G.
- B) G e H.
- C) H e I.
- D) K e L.



ATIVIDADE 5

Observe os seguintes números:

$$\frac{7}{3}, \sqrt{9}, \sqrt{5}, \frac{5}{6}$$

Colocando esses números em ordem crescente, a alternativa correta é:

- A) $\frac{5}{6}, \sqrt{5}, \frac{7}{3}, \sqrt{9}$
- B) $\sqrt{5}, \frac{5}{6}, \sqrt{9}, \frac{7}{3}$
- C) $\sqrt{9}, \sqrt{5}, \frac{7}{3}, \frac{5}{6}$
- D) $\sqrt{9}, \frac{5}{6}, \sqrt{5}, \frac{7}{3}$

ATIVIDADE 6

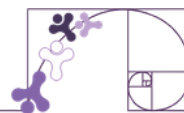
Dois famosos números aparecem com frequência tanto na matemática quanto na natureza: o número π (pi), que representa a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, e o número φ (phi), também chamado de número de ouro ou proporção áurea, associado a proporções harmônicas presentes em obras de arte, na arquitetura e em elementos naturais, como plantas e conchas.

Considere:

- $\pi \approx 3,141592654...$
- $\varphi \approx 1,618033989...$

Assinale a alternativa correta:

- A) Tanto π quanto φ são números irracionais, pois não podem ser expressos como uma fração exata entre dois números inteiros, e suas casas decimais continuam infinitamente sem repetição ou padrão.
- B) O número π é irracional, mas φ é racional, pois aparece na arte e na natureza.
- C) O número φ é irracional, mas π é um número racional, pois frequentemente utilizamos a aproximação 3,14 para representar seu valor.
- D) Ambos π e φ são números racionais, pois podem ser expressos como uma fração exata entre dois números inteiros.



OPERAÇÕES COM NÚMEROS REAIS

Já estudamos que há certas limitações quando realizamos operações nos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Veja alguns exemplos:

No conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), não é sempre possível fazer subtrações, divisões exatas ou extrair raízes quadradas que resultem em naturais.

No conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$), as divisões nem sempre resultam em inteiros, e a raiz quadrada de alguns números não é um número inteiro.

No conjunto dos racionais ($\mathbb{Q}$), a raiz quadrada exata de certos números pode não ser um número racional.

Por outro lado, no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$), conseguimos realizar todas as operações fundamentais, adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto a divisão por zero), além de extrair raízes quadradas de números positivos.

É importante lembrar que não podemos extrair a raiz quadrada de números negativos dentro do conjunto dos números reais, pois não existe número real que, ao ser elevado ao quadrado, resulte em um número negativo.

Por isso, por exemplo, $\sqrt{-4}$ não pertence ao conjunto $\mathbb{R}$.

POTENCIAÇÃO

A **potenciação** é uma operação utilizada para representar uma multiplicação de fatores iguais, na qual podemos identificar os seguintes elementos.

base: fator que se repete

expoente: indica a quantidade de vezes que o fator se repete

$$5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ fatores iguais}} = 125$$

Lemos 5^3 das seguintes maneiras:

- Cinco elevado ao cubo;
- Cinco ao cubo ou
- Cinco elevado à terceira potência.



Veja alguns exemplos de potências com base positiva:

- $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
- $(0,2)^2 = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$
- $5^0 = 1$
- $9^1 = 9$
- $1^{100} = 1$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$

Exemplos de potência com base negativa:

- $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$
- $(-0,3)^3 = (-0,3) \cdot (-0,3) \cdot (-0,3) = -0,027$

Agora, estudaremos potências com expoente negativo.

POTÊNCIA COM EXPOENTE NEGATIVO

Um número diferente de zero elevado a um expoente negativo é igual ao inverso desse número elevado ao oposto do expoente.

Assim, sendo a (base) um número diferente de zero e n (expoente) um número natural, temos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{ou} \quad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

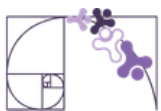
Lembre-se de que o inverso de um número a diferente de zero é $\frac{1}{a}$

Observe alguns exemplos:

a) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

b) $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{(-27)} = -\frac{1}{27}$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4}$



PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS

Neste tópico, estudaremos algumas propriedades das potências.

- **1ª propriedade: Multiplicação de potências de mesma base**

Para calcular o produto de potências de mesma base real não nula e expoentes inteiros, **mantemos** a base e **somamos** os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, a \in \mathbb{R}^*, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$$

$\mathbb{R}^*$ é o conjunto dos números reais, exceto o zero!

Veja alguns exemplos:

$$\blacktriangleright 2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$\blacktriangleright (0,43)^5 \cdot (0,43) = (0,43)^{5+1} = (0,43)^6$$

$$\blacktriangleright \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+(-3)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$\blacktriangleright (-3)^{-2} \cdot (-3)^4 = (-3)^{-2+4} = (-3)^2$$

- **2ª propriedade: Divisão de potência de mesma base**

Para calcular o quociente de potências de mesma base real não nula e expoentes inteiros, **mantemos** a base e **subtraímos** os expoentes.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, a \in \mathbb{R}^*, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$$

Veja alguns exemplos:

$$\blacktriangleright (0,6)^4 \div (0,6) = (0,6)^{4-1} = (0,6)^3 \quad \blacktriangleright \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2-(-3)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2+3} = \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$$

$$\blacktriangleright 8^5 \div 8^5 = 8^{5-5} = 8^0 = 1 \quad \blacktriangleright 3^{-3} \div 3^{-2} = 3^{(-3)-(-2)} = 3^{-3+2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

- **3ª propriedade: Potência de uma potência**

Para calcular a potência de uma potência com base real não nula e expoentes inteiros, **mantemos** a base e **multiplicamos** os expoentes.

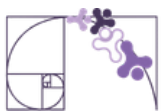
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, a \in \mathbb{R}^*, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$$

Veja alguns exemplos:

$$\blacktriangleright (2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$$

$$\blacktriangleright (2,5^3)^4 = (2,5)^{3 \cdot 4} = (2,5)^{12}$$

$$\blacktriangleright (11^2)^{-4} = 11^{2 \cdot (-4)} = 11^{-8} = \left(\frac{1}{11}\right)^8$$



- **4ª propriedade: Potência de um produto.**

A potência de um produto pode ser transformada em um produto de potências.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{Z}$$

Veja alguns exemplos:

▶ $(3 \cdot 7)^3 = 3^3 \cdot 7^3$

▶ $(1,5 \cdot 0,6)^5 = 1,5^5 \cdot 0,6^5$

▶ $\left(\frac{1}{7} \cdot (-3)\right)^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot (-3)^2$

- **5ª propriedade: Potência de um quociente.**

A potência de um quociente pode ser transformada em um quociente de potências.

$$(a \div b)^n = a^n \div b^n, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{Z}$$

Veja alguns exemplos:

▶ $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$

▶ $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{5^{-2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \div \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{4} \div \frac{1}{25} = \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{1} = \frac{25}{4}$

POTÊNCIA COM EXPOENTE FRACIONÁRIO

Sendo a um número racional positivo, n e m números naturais, com $n > 1$ e $m > 0$, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

O índice do radical corresponde ao denominador do expoente da potência.

Exemplo: $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$



POTÊNCIA COM NÚMERO DECIMAL NO EXPOENTE

Você já estudou como representar um número decimal na forma fracionária. Então, para resolver potências com números decimais no expoente, basta transformá-lo em fração e, sem seguida, resolver conforme fizemos no tópico anterior.

Exemplo: $16^{0,5} = 16^{\frac{5}{10}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

RAIZ QUADRADA EXATA

A **raiz quadrada exata** de um número racional não negativo **a** é o número racional não negativo que, elevado ao quadrado, resulta em **a**. Por exemplo:

- A raiz quadrada de 36 é 6, pois $6^2 = 36$, e $6 > 0$. Indica-se $\sqrt{36}$.
- A raiz quadrada de $\frac{1}{4}$ é $\frac{1}{2}$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, e $\frac{1}{2} > 0$. Indica-se $\sqrt{\frac{1}{4}}$.
- A raiz quadrada de 0,0625 é 0,25, pois $0,25^2 = 0,0625$ e, $0,25 > 0$. Indica-se $\sqrt{0,0625}$.

Note que todo número quadrado perfeito tem uma raiz quadrada exata.

RAIZ QUADRADA APROXIMADA

Nem todo número racional não negativo tem raiz quadrada exata. Quando isso acontece, a raiz desse número é um número irracional, ou seja, é um número com infinitas casas decimais e sem um período que se repita. Por exemplo:

$\sqrt{3}$ é um número irracional, pois não existe **n** racional tal que $n^2 = 3$.

Usando uma calculadora, obtemos o seguinte:
1,7320508075688772935274463415059...





Como chegar nesse resultado?

Podemos determinar o número que expressa a raiz quadrada, com aproximação de uma ou mais casas decimais, fazendo uma estimativa desse valor.

Vamos verificar, então, como estimar a raiz quadrada de 3 com os conhecimentos que temos sobre os números quadrados perfeitos.

- 3 é um número que está entre os quadrados perfeitos 1 e 4.
- Como $1 = 1^2$ e $4 = 2^2$, o número procurado está entre 1 e 2.
- Vamos descobrir que número é esse fazendo tentativas.

$$(1,1)^2 = 1,21$$

$$(1,2)^2 = 1,44$$

$$(1,3)^2 = 1,69$$

$$(1,4)^2 = 1,96$$

$$(1,5)^2 = 2,25$$

$$(1,6)^2 = 2,56$$

$$(1,7)^2 = 2,89$$

$$(1,8)^2 = 3,24, \text{ mas este é maior do que } 3.$$

Observando os cálculos, verificamos que $\sqrt{3}$ é maior do que 1,7 e menor do que 1,8.

1,7 e 1,8 são números que representam aproximações para $\sqrt{3}$ até décimos.

Para não termos dois valores, convencionamos que o número procurado corresponde ao menor valor e escrevemos: $\sqrt{3} \approx 1,7$.

Caso haja a necessidade de uma aproximação de duas casas decimais, fazemos mais tentativas.

$$(1,71)^2 = 2,9241$$

$$(1,72)^2 = 2,9584$$

$$(1,73)^2 = 2,9929$$

$$(1,74)^2 = 3,0276, \text{ mas este é maior do que } 3.$$

Pela convenção já estabelecida, podemos escrever $\sqrt{3} \approx 1,73$, ou seja, a raiz quadrada de 3 é aproximadamente 1,73.

Se quisermos uma aproximação de três ou mais casas decimais, fazemos mais tentativas conforme acabamos de fazer.



RAIZ CÚBICA

A raiz cúbica de um número racional **a** é o número racional que, elevado ao cubo, resulta em **a**.

Indica-se a raiz cúbica de **a** por $\sqrt[3]{a}$.

Acompanhe os exemplos:

- A raiz cúbica de 125 é 5, pois $5^3 = 125$. Indica-se $\sqrt[3]{125} = 5$.

RAÍZES ENÉSIMAS

Além da raiz quadrada e da raiz cúbica, há também outras raízes: raiz quarta, raiz quinta, raiz sexta, raiz sétima etc.

Vamos estender nosso estudo definindo as chamadas raízes enésimas para números reais.

Consideremos um número real **a** e um número natural **n**, com **n** > 1. A raiz enésima do número **a** é indicada pela expressão:

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \\ \text{índice} & \sqrt[n]{a} & \text{radicando} \end{array}$$

De modo geral, dado **a** um número real e **n** um número natural, com **n** > 1, temos de considerar dois casos:

- Para **n** par e **a** ≥ 0: $\sqrt[n]{a}$ é igual ao número real **b**, com **b** ≥ 0, tal que **b**ⁿ = **a**.
- Para **n** ímpar: $\sqrt[n]{a}$ é igual ao número real **b**, tal que **b**ⁿ = **a**.

Se o número real **a** for negativo, e o expoente **n** for par, a expressão $\sqrt[n]{a}$ não está definida no conjunto dos números reais.

Assim, temos:

- A raiz quarta de 16, indicada por $\sqrt[4]{16}$, é igual a 2, pois $2 > 0$ e $2^4 = 16$.
- A raiz quinta de 243, indicada por $\sqrt[5]{243}$, é igual a 3, pois $3^5 = 243$.
- $\sqrt[11]{-2\,048} = -2$, pois $(-2)^{11} = -2\,048$.
- A raiz $\sqrt[4]{-16}$ não está definida no conjunto dos números reais, pois -16 é um número real negativo, e 4 é um número par.



SIMPLIFICANDO RADICAIS

Se um ou mais fatores do radicando têm o expoente igual ao índice do radical, esses fatores podem ser extraídos do radicando.

Em alguns casos, o expoente do radicando é maior do que o índice do radical. Procura-se, então, fazer transformações convenientes no radicando, conforme indicado a seguir

$$\bullet \sqrt{10^3} = \sqrt{10^2 \cdot 10} = \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{10} = 10 \cdot \sqrt{10}$$

$$\bullet \sqrt{2^3 \cdot 5^4} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5^2} = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 50 \cdot \sqrt{2}$$

Há situações, porém, em que há necessidade de fazer uma fatoração do radicando antes de realizar a extração dos fatores. Acompanhe a situação a seguir.

Simplificar $\sqrt{75}$.

Fatorando o radicando 75, obtém-se $3 \cdot 5^2$. Daí, temos:

$$\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5^2} = 5\sqrt{3}$$

ADIÇÃO ALGÉBRICA DE RADICAIS

Só é possível realizar a soma/subtração algébrica de radicais quando eles são semelhantes. Dizemos que dois ou mais radicais são **semelhantes** quando têm o mesmo índice e o mesmo radicando. Observe:

$\sqrt{10}$ e $3\sqrt{10}$ são radicais semelhantes.

$\sqrt{2}$ e $4\sqrt{3}$ não são radicais semelhantes.

Se em uma expressão há radicais semelhantes, podemos reduzi-los a um só termo.

Vamos, então, considerar estas situações:

1) Reduzir a um só termo a expressão $10 \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 11\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$.

Observe que $\sqrt{3}$ é o fator comum a todos os termos.

$$10 \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 11\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (10 + 5 - 11 + 2) \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Logo, $6\sqrt{3}$ é a forma mais simples da expressão dada.



2) Simplificar a expressão $6\sqrt{5} - 2\sqrt{7} - 5\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$.

$$6\sqrt{5} - 2\sqrt{7} - 5\sqrt{5} + 3\sqrt{7} = 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 1\sqrt{5} + 1\sqrt{7} = \sqrt{5} + \sqrt{7}$$

$\sqrt{5} + \sqrt{7}$ é a maneira mais simples de escrever a expressão dada usando radicais, pois não há mais radicais semelhantes para serem reduzidos.

Há expressões que exigem a simplificação de seus termos antes da realização da adição. Observe os exemplos a seguir.

1) Calcule o valor de $\sqrt{50} + \sqrt{18}$.

Como $50 = 2 \cdot 5^2$ e $18 = 2 \cdot 3^2$, vamos, então, simplificar cada radical com a extração de fatores do radicando.

$$\sqrt{50} + \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2 \cdot 3^2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

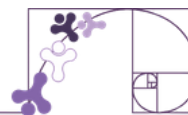
2) Simplificar a expressão $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{75}}{2\sqrt{147}}$.

$$\frac{\sqrt{12} + \sqrt{75}}{2\sqrt{147}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 5^2}}{2\sqrt{3 \cdot 7^2}} = \frac{2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{14\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

3) Escrever a forma mais simples da expressão $\sqrt{200} + \sqrt{500} + \sqrt{8} - \sqrt{45}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{200} + \sqrt{500} + \sqrt{8} - \sqrt{45} &= \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{3^2 \cdot 5} \\ &= 10\sqrt{2} + 10\sqrt{5} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{5} = 12\sqrt{2} + 7\sqrt{5}\end{aligned}$$

Exercícios Resolvidos



1) Utilizando as propriedades vistas, reduza em uma única potência.

a) $5^4 \cdot 5^{-3}$ b) $\frac{2^{-3}}{2^{-1}}$ c) $(7^{-4})^{-3}$ d) $(-6)^{-3} \cdot (-6)^{-2}$ e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$

RESOLUÇÃO:

a) $5^4 \cdot 5^{-3} = 5^{4+(-3)} = 5^1$

d) $(-6)^{-3} \cdot (-6)^{-2} = (-6)^{(-3)+(-2)} = (-6)^{-5}$

b) $\frac{2^{-3}}{2^{-1}} = 2^{-3-(-1)} = 2^{-3+1} = 2^{-2}$

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4+(-1)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}$

c) $(7^{-4})^{-3} = 7^{(-4) \cdot (-3)} = 7^{12}$

2) Escreva $\sqrt{700}$ na forma simplificada.

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{7} = 10 \cdot \sqrt{7}$$

simplificando o radical

3) A matemática esteve presente em várias culturas ancestrais, como as africanas. Os povos africanos desenvolveram sistemas avançados de medição, como o uso de bastões de contagem, e desenvolveram técnicas para resolver problemas do cotidiano, como a divisão de alimentos ou a construção de abrigos. Inspirados pela engenhosidade africana, vamos resolver uma questão.

Em uma aldeia africana, um artesão está produzindo colares com sementes de uma planta rara. Para medir a quantidade exata de sementes para cada colar, ele usa um sistema matemático baseado em potências.

- Cada colar requer exatamente $4\frac{3}{2}$ sementes.
- Ele deseja produzir 5 colares, mas apenas 36 sementes estão disponíveis.





- a) Quantas sementes são necessárias para produzir um único colar?
- b) Ele tem sementes suficientes para produzir os 5 colares? Justifique.
- c) Caso faltem sementes, quantos colares completos ele pode fazer?

RESOLUÇÃO:

a) Para calcular $4^{\frac{3}{2}}$, temos $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$

Assim, cada colar precisa de 8 sementes .

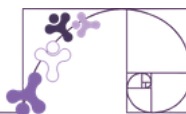
b) Para 5 colares: $5 \times 8 = 40$ sementes.

Como ele tem apenas 36 sementes, não é suficiente para os 5 colares .

c) Dividindo 36 sementes pelo número necessário por colar: $36 \div 8 = 4,5$

Ele pode produzir 4 colares completos .

Material Extra

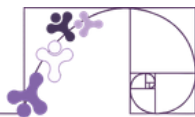


VÍDEO

Potenciação

<https://www.youtube.com/watch?v=jqzG0npdp1Q>





ATIVIDADE 1

Na cidade de Maratáizes, uma cooperativa de agricultores cultiva abacaxis em grandes plantações organizadas de forma padronizada.

Cada fazenda da cooperativa possui 100 terrenos.

Em cada terreno, são plantadas 100 fileiras de pés de abacaxi.

Cada fileira tem exatamente 100 abacaxis plantados.

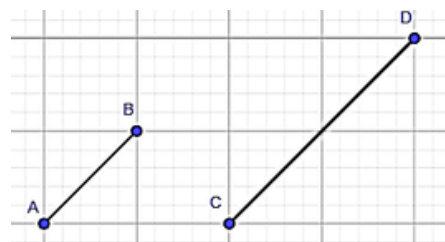
a) Considerando esses dados, quantos abacaxis há no total em uma fazenda?

b) Represente essa quantidade em potência de 10.

ATIVIDADE 2

Na figura ao lado, o segmento $\overline{AB}$ é a diagonal de um quadrado de lados medindo 1 unidade e seu comprimento pode ser calculado pelo teorema de Pitágoras da seguinte forma:

$$AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097 \dots$$



A medida desse comprimento é um número irracional e pode ser aproximado por 1,41.

Usando, também, o teorema de Pitágoras, podemos concluir que o comprimento do segmento $\overline{CD}$ é um número irracional dado por $\sqrt{8}$.

Em relação a esses números, qual das alternativas a seguir **NÃO** é verdadeira?

- A) $\sqrt{8}$ é o dobro de $\sqrt{2}$
- B) O valor aproximado de $\sqrt{8}$ é 2,82
- C) A soma $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$
- D) A soma $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$



ATIVIDADE 3

O número $16^{0,5}$ pode ser escrito como $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$.

O número $10^{0,5}$ está:

- A) entre 0 e 1
- B) entre 1 e 2
- C) entre 2 e 3
- D) entre 3 e 4

ATIVIDADE 4

Calcule o valor das raízes.

- | | |
|-------------------------------|-----------------------|
| a) $\sqrt{196}$ | f) $\sqrt[3]{-0,125}$ |
| b) $\sqrt[3]{-27}$ | g) $\sqrt{0,01}$ |
| c) $\sqrt[5]{-32}$ | h) $\sqrt{7}$ |
| d) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}}$ | i) $\sqrt{15}$ |
| e) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$ | j) $\sqrt{30}$ |



ATIVIDADE 5

Dados os números $A = 81$, $B = 64$, $C = 9$ e $D = 4$, indique se os números reais abaixo são naturais, racionais não inteiros ou irracionais.

A) $\sqrt{\frac{A}{B}}$

B) $\sqrt{B + C \cdot D}$

C) $\sqrt{\frac{B + D}{A}}$

ATIVIDADE 6

Para somar os números irracionais $\sqrt{8}$ e $\sqrt{72}$ procedemos da seguinte forma:

$$\sqrt{8} + \sqrt{72} = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{36 \times 2} = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

Usando dessa mesma estratégia, a soma de $\sqrt{32} + \sqrt{50}$ é:

A) $8\sqrt{2}$

B) $9\sqrt{2}$

C) $10\sqrt{2}$

D) $12\sqrt{2}$



ATIVIDADE 7

Classifique as expressões abaixo em verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

a) $(4^5)^2 = (4^2)^5$

b) $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$

c) $(8 \div 4)^3 = 8^3 \div 4^3$

d) $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$

ATIVIDADE 8

Considere a expressão numérica a seguir.

$$\sqrt{\frac{2^2 + \sqrt{25} + 1}{2}}$$

Sobre o resultado da expressão, podemos afirmar que:

A) é um número racional, mas não é inteiro.

B) é um número inteiro, mas não é natural.

C) é um número natural.

D) é um número irracional.



ATIVIDADE 9

Utilizando as propriedades de potência, reduza as bases em cada caso.

a) $2^3 \cdot 2^9$

b) $(-3)^2 \cdot (-3)^{-4}$

c) $6^5 \div 6^8$

d) $(0,2)^{-5} \div (0,2)^{-4}$

e) $(4^2)^3$

f) $(2^4)^{-2}$

g) $5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^{-4}$

h) $2^4 \div 2^{-7} \div 2^0$

ATIVIDADE 10

Calcule a potência com fração ou número decimal no expoente.

a) $8^{\frac{2}{3}}$

b) $16^{\frac{1}{2}}$

c) $49^{\frac{2}{4}}$

d) $32^{\frac{1}{5}}$

e) $25^{0,5}$

f) $9^{0,4}$



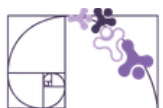
Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo desse capítulo. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?



Refleta sobre sua aprendizagem

- Sou capaz de reconhecer que o lado de um quadrado e sua diagonal são incomensuráveis?
- Consigo reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica?
- Sou capaz de estimar a localização de alguns números irracionais na reta numérica, como raízes quadradas não exatas, π e ϕ (número de ouro)?
- Consigo comparar ou ordenar números reais, com ou sem suporte da reta numérica?
- Sou capaz de calcular o resultado de adições, subtrações, multiplicações ou divisões envolvendo números reais?
- Consigo calcular o resultado de potenciação ou radiciação envolvendo números reais?



Autoavaliação

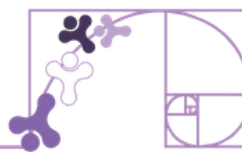
Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Reconhecer que o lado de um quadrado e sua diagonal são incomensuráveis.	☐	☐	☐
Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica;	☐	☐	☐
Estimar a localização de alguns números irracionais na reta numérica: raízes quadradas não exatas, pi e phi (número de ouro).	☐	☐	☐
Comparar ou ordenar números reais, com ou sem suporte da reta numérica.	☐	☐	☐
Calcular o resultado de adições, subtrações, multiplicações ou divisões envolvendo números reais.	☐	☐	☐
Calcular o resultado de potenciação ou radiciação envolvendo números reais.	☐	☐	☐



Dica: Revise os tópicos que você marcou como “**preciso revisar**” e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências



BONJORNO, Giovanni Jr.; CÂMARA, Paulo. Prisma: matemática – conjuntos e funções . São Paulo: FTD, 2020.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. História da matemática. Editora Blucher, 2019.

BURTON, DM A história da matemática: uma introdução . Tradução de Francisco de Assis Carvalho. São Paulo: McGraw-Hill, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. Telaris – Matemática: 9º ano . 3.ed. São Paulo: Editora Ática, 2018.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos . Volume 1. São Paulo: Ática, 2020

MATEMÁTICA NO PAPEL. YouTube. Disponível em: <<https://youtu.be/MBsTxM5G7dY?si=dYFSI9PNouJWSuEY>>. Acesso em: 17 de novembro de 2024.

NOVA ESCOLA. Plano de aula: Aproximações de potência de 10. Disponível em: <https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/6ano/matematica/aproximacoes-de-potencia-de-10/1365>. Acesso em: 7 jun. 2025.

PORTAL DA MATEMÁTICA. YouTube. Disponível em: <<https://youtu.be/wkGyX78gZ8A?si=DJuLfGbFtm3ZEWwF>>. Acesso em: 17 de novembro de 2024.

PORTAL DA MATEMÁTICA. YouTube. Disponível em: <<https://youtu.be/uc0EpuarO9o?si=pFhsCazOIK5csTWz>>. Acesso em: 17 de novembro de 2024.

PORTAL DA MATEMÁTICA. YouTube. Disponível em: <<https://youtu.be/jqzG0npdp1Q?si=h-MXfqBt5qJNwCql>>. Acesso em: 17 de novembro de 2024.

Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

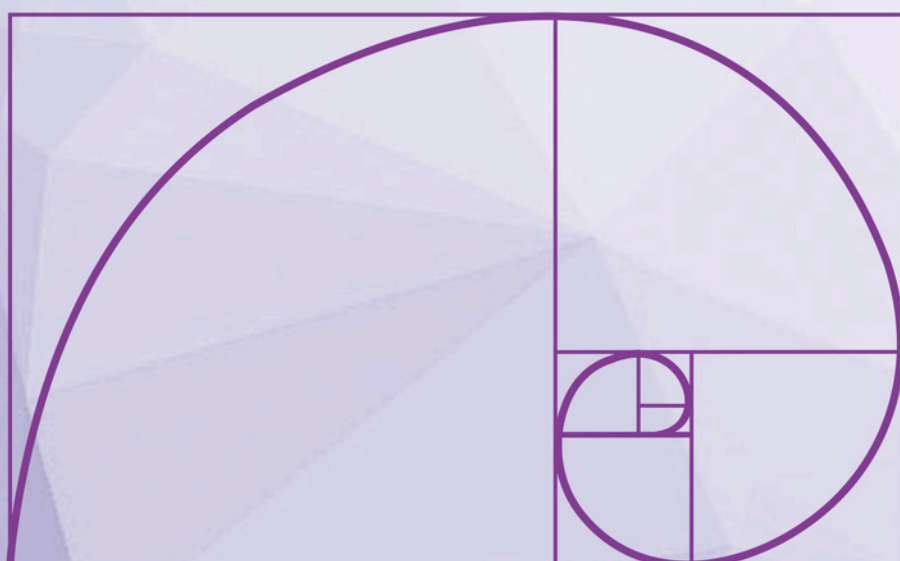


GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

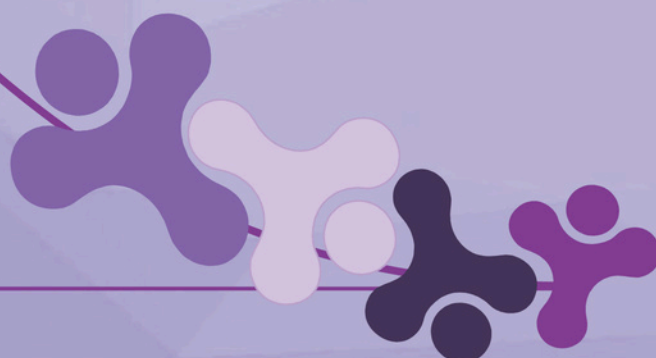


Gerência de Currículo
da Educação Básica

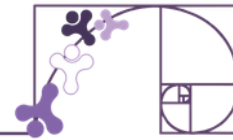
SEDU 2026



**Capítulo 10: Volume de
prismas e cilindros;
Planificações e vistas;
Relação de Euler**



Apresentação



Prezado(a) estudante,

Você já percebeu como a geometria e a álgebra se entrelaçam para nos dar uma visão completa e organizada do espaço ao nosso redor? Ao explorar a Relação de Euler, descobrimos a harmonia lógica entre vértices, faces e arestas, o que nos permite validar a estrutura de poliedros convexos e reconhecer padrões fundamentais. Essa compreensão estrutural se expande com o estudo de planificações e vistas, que desenvolve seu raciocínio espacial ao traduzir formas tridimensionais para o plano, uma habilidade vital para áreas como o design e a arquitetura. Por fim, ao dominar o cálculo de volume de prismas e cilindros, você transforma essa percepção visual em medidas práticas e mensuráveis, capacitando-se para resolver problemas reais de engenharia e do cotidiano com precisão. Integrar esses conhecimentos fortalece sua base matemática e amplia sua capacidade de interpretar e intervir no mundo de maneira técnica, eficiente e estruturada.

O que você vai estudar neste capítulo

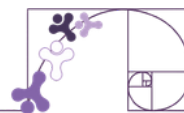
Neste capítulo, você vai estudar a Relação de Euler, aprendendo a identificar a conexão entre vértices, faces e arestas em poliedros convexos. Também irá desenvolver estratégias para interpretar planificações e vistas, utilizando o raciocínio espacial para converter representações bidimensionais em objetos tridimensionais e vice-versa. Além de calcular o volume de prismas e cilindros, compreendendo seus procedimentos de cálculo e aplicações em diferentes situações matemáticas que envolvem a medição de capacidade e ocupação de espaço no mundo real.

Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- ✓ Relacionar objetos tridimensionais às suas planificações ou vistas;
- ✓ Calcular áreas de bases de prismas e cilindros;
- ✓ Resolver problemas que envolvam volume de prismas e cilindros.

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.



RELEMBRANDO FIGURAS GEOMÉTRICAS ESPACIAIS

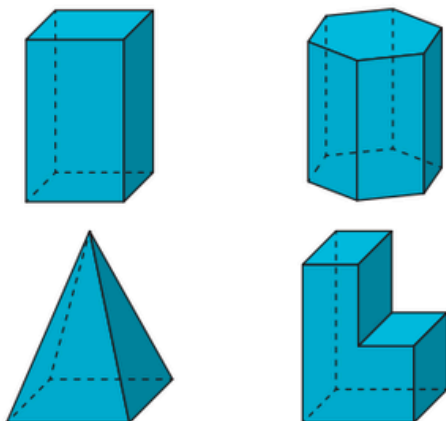
Já estudamos que diversos objetos e elementos do cotidiano, por apresentarem determinadas características, podem ser associados a figuras geométricas espaciais. Acompanhe alguns exemplos:



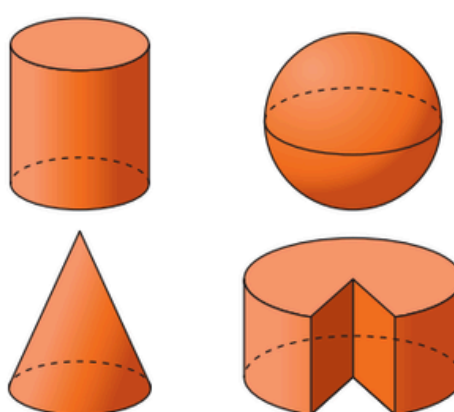
Canva

É possível classificar algumas figuras geométricas espaciais em poliedros e não poliedros. Os poliedros são figuras geométricas espaciais limitadas por uma quantidade finita de polígonos, sendo cada lado de um polígono também lado de apenas um outro polígono. Já as figuras que não têm pelo menos uma dessas características são chamadas não poliedros. Analise alguns exemplos.

• Poliedros



• Não poliedros



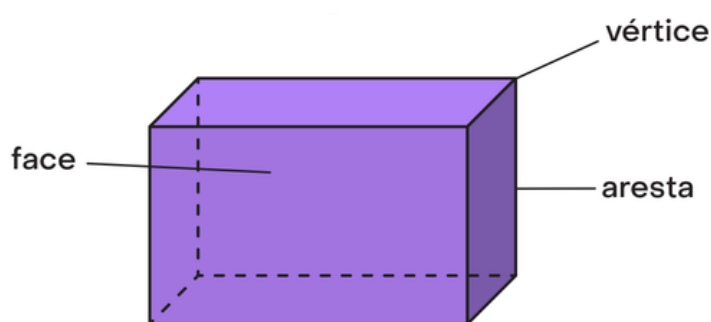
Ilustrações: Sergio L. Filho/Arquivo da editora



PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO E CUBO

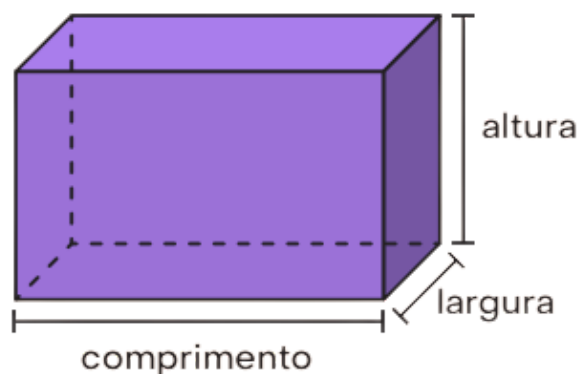


Para enviar mercadorias, algumas empresas usam caixas como as apresentadas na imagem ao lado. Analisando essas caixas, notamos que elas apresentam formatos parecidos. Podemos associar esse formato a um paralelepípedo retângulo, também chamado bloco retangular. Em um paralelepípedo retângulo podemos destacar os elementos a seguir.

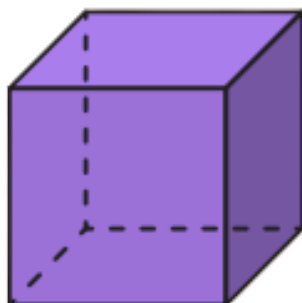


As seis faces de um paralelepípedo retângulo são retângulos.

- Um paralelepípedo retângulo tem três dimensões: comprimento, largura e altura.



- Quando as três dimensões têm a mesma medida, o paralelepípedo retângulo recebe o nome de cubo.



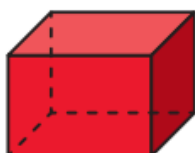


PRISMA E PIRÂMIDE

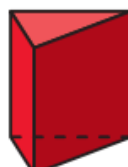
Os poliedros abaixo são **prismas**. No prisma, duas de suas faces são as bases, e as demais são as faces laterais. As bases são idênticas e paralelas entre si, e as faces laterais são paralelogramos. As arestas laterais também são paralelas entre si.



Cubo.



Paralelepípedo
retângulo.



Prisma de base
triangular.



Prisma de base
hexagonal.

Os poliedros abaixo são pirâmides. A pirâmide tem apenas uma face denominada base, e as demais são as faces laterais. As faces laterais são triângulos que têm um vértice em comum.



Pirâmide de base
triangular.



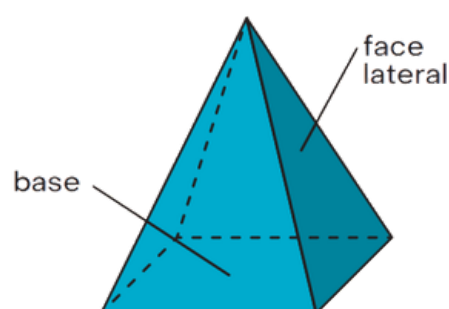
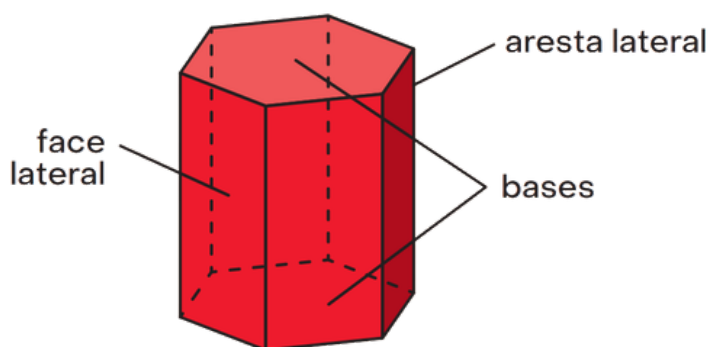
Pirâmide de base
quadrangular.



Pirâmide de base
pentagonal.



Pirâmide de base
hexagonal.



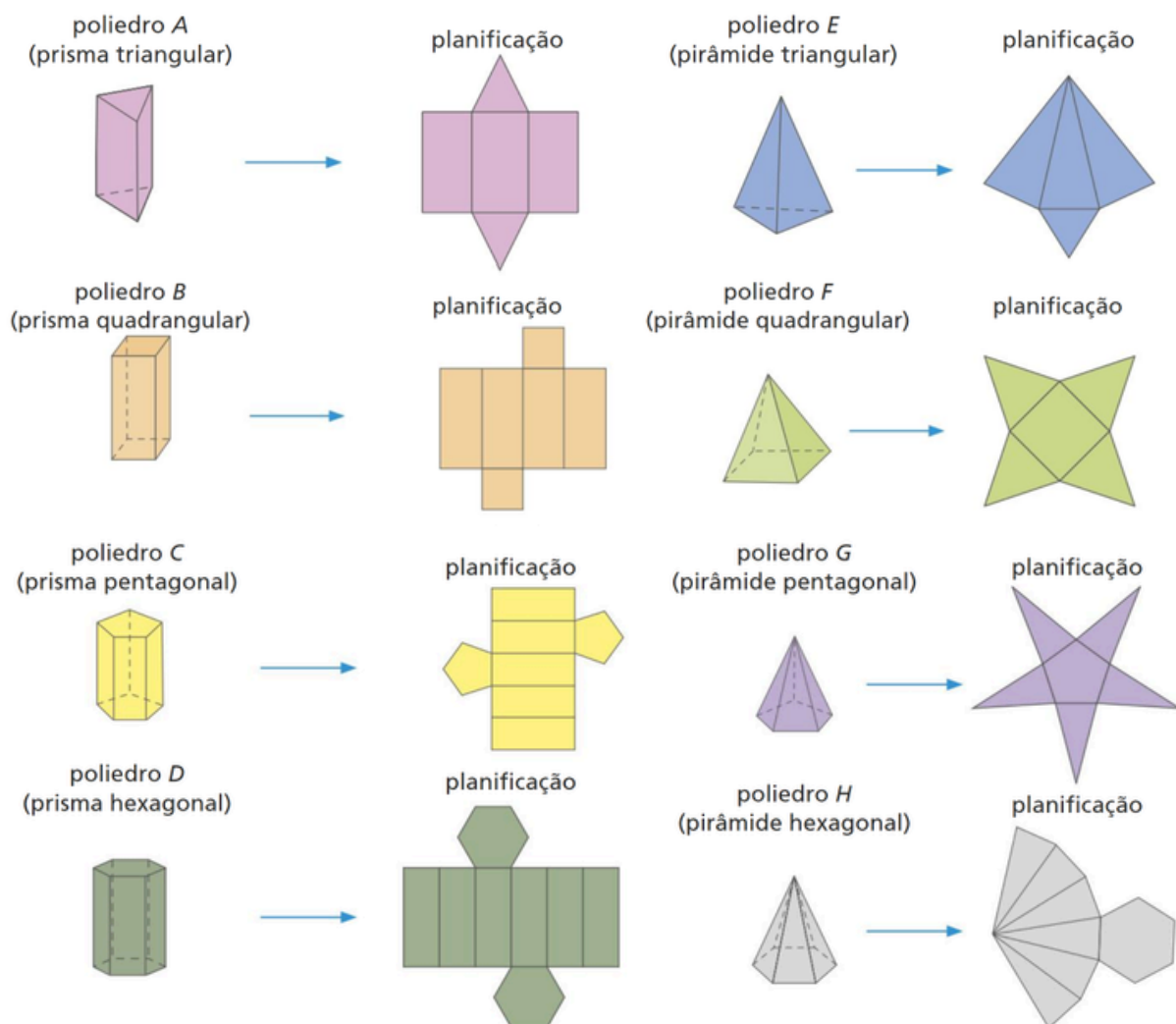
Há poliedros que não podem ser classificados como prisma nem como pirâmide. Conheça alguns exemplos.





PLANIFICAÇÃO DE POLIEDROS

Os poliedros são sólidos geométricos que possuem superfícies formadas por faces planas. Essas superfícies podem ser representadas de maneira planificada, ou seja, desenhadas como se fossem "desdobradas" em um plano. A seguir, observe alguns exemplos de planificações de prismas e pirâmides, que são dois tipos de poliedros muito utilizados em estudos de geometria.



Não há uma única maneira de representar a planificação de um sólido, pois diferentes desdobramentos podem revelar as mesmas faces em posições distintas.

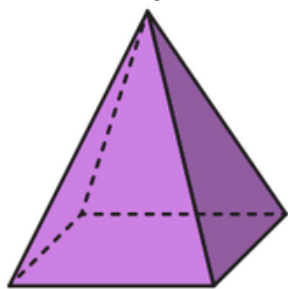


RELAÇÃO DE EULER

A relação entre a quantidade de vértices, de faces e de arestas de alguns poliedros, entre eles os prismas e as pirâmides, pode ser representada pela igualdade a seguir.

$$V + F = A + 2$$

Essa igualdade é conhecida como **relação de Euler**, em homenagem ao matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783).



Observe a pirâmide ao lado.

Note que ela tem:

- 5 vértices (4 vértices na base e uma no topo),
- 8 arestas (4 arestas na base e 4 arestas laterais) e
- 5 faces (1 face na base e 4 faces laterais).

Veremos agora exemplos de como é aplicada a relação de Euler, utilizando o exemplo acima.

1) Um sólido tem 5 **vértices** e 8 **arestas**. Determine a quantidade de **faces**.

Substituindo as informações dadas, temos $V = 5$ e $A = 8$:

$$V + F = A + 2$$

$$5 + F = 8 + 2$$

Resolvendo a equação, temos:

$$F = 8 + 2 - 5$$

$$F = 5$$

Utilizando a relação de Euler, concluímos que esse sólido geométrico tem 5 faces. De fato, como vimos.

Neste primeiro exemplo, determinamos a quantidade de faces. Mas podemos, também, determinar a quantidade de arestas ou a quantidade de vértices.

2) Um sólido tem 5 **vértices** e 5 **faces**. Determine a quantidade de **arestas**.

$$V + F = A + 2$$

$$5 + 5 = A + 2$$

$$A = 8$$

3) Um sólido tem 5 **faces** e 8 **arestas**. Determine a quantidade de **vértices**.

$$V + F = A + 2$$

$$V + 5 = 8 + 2$$

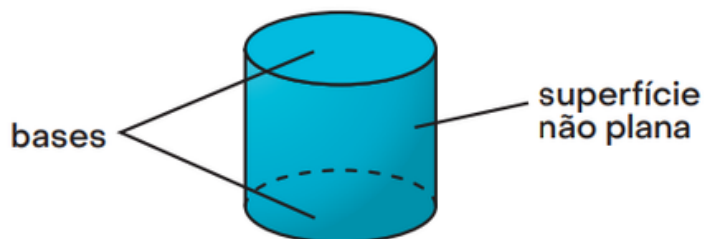
$$V = 5$$

Portanto, a relação de Euler nos permite calcular a quantidade de arestas, vértices e faces num poliedro.

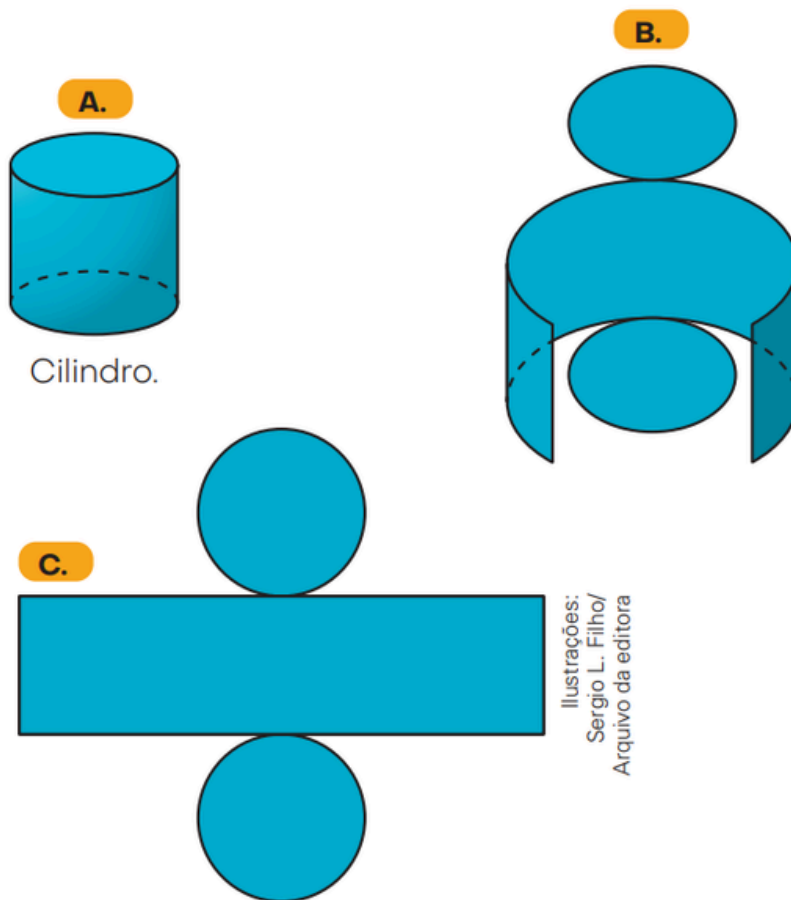


CILINDRO

O cilindro é um sólido geométrico que possui duas bases circulares paralelas e congruentes, ligadas por uma superfície lateral curva, por isso ele é chamado de **não poliedro**. Ele é bastante utilizado em situações do dia a dia, como em latas de alimentos, canos e garrafas. Vamos destacar alguns elementos no cilindro.



A seguir, está representada a planificação da superfície do cilindro.



Planificação da superfície do cilindro.

Ilustrações:
Sergio L. Filho/
Arquivo da editora



VOLUME DO PRISMA E CILINDRO

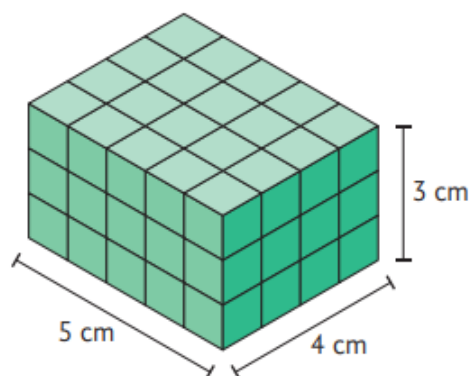
Para calcular o volume de um prisma ou cilindro, utilizamos a mesma ideia: multiplicar a área da base pela altura.

No caso do prisma, basta calcular a área da base (que pode ser de qualquer forma geométrica, como triângulo, quadrado ou pentágono) e multiplicá-la pela altura do prisma.

Já para o cilindro, a base é sempre um círculo. Sendo assim, podemos resumir que a fórmula para o cálculo do volume de um prisma ou cilindro será a multiplicação da área da base pela altura.

$$V = A_b \cdot h$$

Veja o exemplo a seguir para entender melhor como realizar o cálculo do volume de um paralelepípedo ou prisma de base retangular.



Observe que a base é um retângulo, cuja área é 20 cm^2 ($5 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}$).

Para calcular o volume desse sólido, usamos a fórmula $V = A_b \cdot h$, em que a área da base é 20 cm^2 (conforme acabamos de calcular) e a altura do sólido é 3 cm . Portanto, temos:

$$V = A_b \cdot h$$

$$V = 4 \cdot 5 \cdot 3$$

$$V = 60 \text{ cm}^3$$

Quando um prisma for um paralelepípedo retângulo, podemos usar a fórmula: $V = a \cdot b \cdot c$, em que a = comprimento, b = largura e c = altura, não necessariamente nesta ordem (nesse caso, a ordem dos fatores não altera o produto).

Neste caso, bastaria observar que $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$ e $c = 3 \text{ cm}$, obtendo:

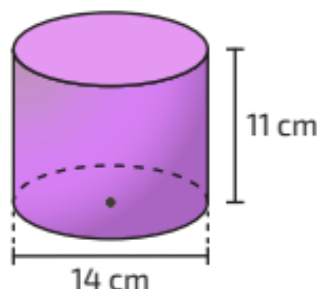
$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 4 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}$$

$$V = 60 \text{ cm}^3$$



Observe o exemplo para calcular o volume do cilindro:



Para calcular o volume V de um cilindro usando a fórmula "área da base vezes altura", seguimos estas etapas:

1. **Encontrar o raio:** O raio r é metade do diâmetro. Para um diâmetro de 14 cm:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{14 \text{ cm}}{2} = 7 \text{ cm}$$

2. **Calcular a área da base:** A área da base A de um cilindro é dada pela fórmula:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Substituindo r e π :

$$A = 3,14 \cdot (7 \text{ cm})^2$$

$$A = 3,14 \cdot 49 \text{ cm}^2$$

$$A = 153,86 \text{ cm}^2$$

3. **Calcular o volume:** Usando a altura $h = 11 \text{ cm}$ e a área da base:

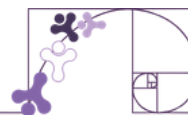
$$V = A \cdot h = 153,86 \text{ cm}^2 \cdot 11 \text{ cm} = 1692,46 \text{ cm}^3$$

Portanto, o volume do cilindro é aproximadamente $1692,46 \text{ cm}^3$.

Sendo a base do cilindro um círculo e considerando que r é a medida do comprimento do raio da base do cilindro, podemos escrever essa fórmula da seguinte maneira:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Exercícios Resolvidos



1) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 4 unidades. Calcule o número de faces.

RESOLUÇÃO:

Para resolver o problema, podemos usar a Fórmula de Euler para poliedros convexos, que é dada por: $V + F = A + 2$

Como o número de aresta excede o número de vértice em 4 unidades, temos:

$$A = V + 4$$

Substituindo, temos:

$$V + F = A + 2$$

$$V + F = V + 4 + 2$$

$$V + F - V = 6$$

$$F = 6$$

O poliedro possui 6 faces.

2) Sabendo que um poliedro possui 8 vértices e que em cada vértice se encontram 3 arestas, determine o número de faces dessa figura.

RESOLUÇÃO:

As arestas que partem e chegam a um vértice são as mesmas, por isso precisamos dividir o número total de arestas por dois.

$$A = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$$

$$V + F = A + 2$$

$$8 + F = 12 + 2$$

$$F = 14 - 8$$

$$F = 6$$

O poliedro possui 6 faces.

3) Considerando uma piscina retangular com 12 metros de comprimento, 6 metros de largura e 1,5 metros de profundidade média, calcule o volume total de água que a piscina pode conter em litros. (1 m³ é igual a 1000 L)



RESOLUÇÃO:

Para calcular o volume total de água que a piscina retangular pode conter, usamos a fórmula do volume de um paralelepípedo: $V = \text{comprimento} \cdot \text{largura} \cdot \text{altura}$, cujos valores são 12 m, 6 m e 1,5 m, respectivamente. Substituindo na fórmula, temos:

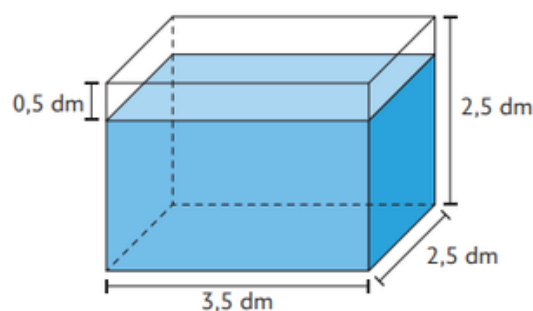
$$V = 12 \cdot 6 \cdot 1,5$$

$$V = 108 \text{ m}^3$$

Para saber em litros, basta multiplicar 108 por 1 000, conforme enunciado:

$$V = 108 \cdot 1000 = 108000 \text{ L}$$

4) Luísa está enchendo o seu aquário com água. O recipiente utilizado tem o formato de um paralelepípedo reto retângulo e está representado a seguir. Qual é a quantidade de água que ela utilizou para encher o aquário, em litros? (1 dm³ é igual a 1 L).



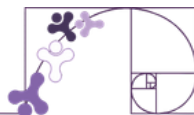
RESOLUÇÃO:

Observe que, embora a altura do sólido seja 2,5 dm, a altura da água (que interessa) é apenas 2 dm.

Temos a fórmula $V = a \cdot b \cdot c$, e que $a = 3,5 \text{ dm}$, $b = 2,5 \text{ dm}$ e $c = 2 \text{ dm}$. Substituindo na fórmula, temos:

$$V = 3,5 \text{ dm} \cdot 2,5 \text{ dm} \cdot 2 \text{ dm} = 17,5 \text{ dm}^3$$

Como 1 dm³ equivale a 1 litro (conforme o enunciado), o volume de água utilizado para encher o aquário foi de 17,5 litros ($17,5 \cdot 1$).



ATIVIDADE 1

Observando as figuras dos sólidos geométricos abaixo ou utilizando a relação de Euler, preencha a tabela conforme o modelo.



Paralelepípedo
(ou prisma de base retangular).



Prisma de base triangular.



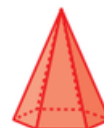
Prisma de base hexagonal.



Pirâmide de base triangular.



Pirâmide de base quadrada.



Pirâmide de base hexagonal.



Pirâmide de base octogonal.

Sólido Geométrico	Quantidade de Lados da Base	Quantidade de Vértices do Sólido Geométrico	Quantidade de Arestas do Sólido Geométrico	Quantidade de Faces do Sólido Geométrico
Paralelepípedo (ou prisma de base retangular)				
Prisma de base triangular				
Prisma de base hexagonal				
Pirâmide de base triangular				
Pirâmide de base quadrada				
Pirâmide de base hexagonal				
Pirâmide de base octogonal				



ATIVIDADE 2

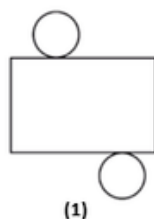
Uma professora de arte está orientando seus alunos na construção de modelos geométricos para uma feira escolar. Um dos alunos escolheu fazer uma pirâmide com base hexagonal e decidiu colocar pequenas esferas decorativas em cada vértice da pirâmide. No entanto, ele não sabe exatamente quantas esferas precisa comprar. A professora lembra que a pirâmide possui 12 arestas e 7 faces.

Ajude o aluno a determinar o número de vértices dessa pirâmide para que ele saiba quantas esferas decorativas comprar.

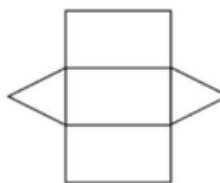
- A) 10 vértices
- B) 9 vértices
- C) 8 vértices
- D) 7 vértices

ATIVIDADE 3

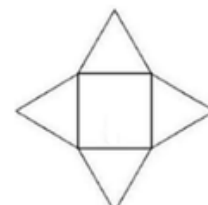
Ao lado, seguem as planificações de três sólidos geométricos. Marque a alternativa que indica, respectivamente, os nomes dos sólidos representados pelas planificações 1, 2 e 3.



(1)



(2)



(3)

- A) 1 - Cilindro, 2 - Pirâmide, 3 - Prisma
- B) 1 - Cilindro, 2 - Cone, 3 - Prisma
- C) 1 - Pirâmide, 2 - Cilindro, 3 - Cone
- D) 1 - Cilindro, 2 - Prisma, 3 - Pirâmide



ATIVIDADE 4

Analise o sólido geométrico abaixo. A representação aproximada da vista superior deste sólido é:

- A)
- B)
- C)
- D)

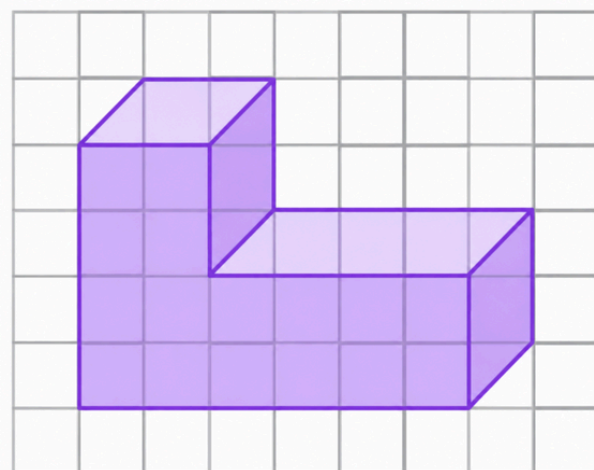


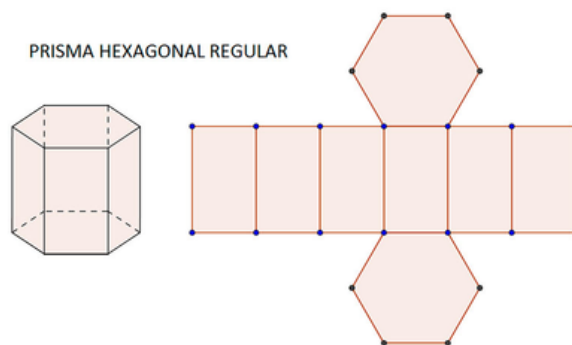
Imagem gerada por IA.

ATIVIDADE 5

Um artesão deseja revestir uma caixinha decorativa em forma de prisma hexagonal regular com tecido. Cada lado do hexágono da base da caixinha mede 6 cm, e a altura do prisma é 10 cm. O artesão planeja revestir toda a superfície externa da caixinha (bases e faces laterais) com o tecido, sem deixar sobras.

Aproximadamente, quanto de tecido (em cm^2) será necessário para revestir toda a caixinha? (use $\sqrt{3} = 1,7$).

- A) $186,84 \text{ cm}^2$
B) $546,84 \text{ cm}^2$
C) $600,84 \text{ cm}^2$
D) $720,84 \text{ cm}^2$





ATIVIDADE 6

Uma família está construindo uma piscina em formato de paralelepípedo retângulo no quintal de sua casa. A piscina terá 10 metros de comprimento, 5 metros de largura e 2 metros de profundidade. Para revestir o fundo da piscina, eles escolheram azulejos especiais que custam R\$ 50,00 por metro quadrado.

Quantos reais a família gastará para revestir o fundo da piscina com esses azulejos?

- A) R\$ 2.500,00
- B) R\$ 3.000,00
- C) R\$ 4.000,00
- D) R\$ 5.000,00

ATIVIDADE 7

Uma caixa de vidro em formato de prisma pentagonal regular está sendo projetada para uma exposição de joias. O arquiteto já sabe que o prisma possui 7 faces (2 bases e 5 faces laterais) e 10 vértices. No entanto, ele quer verificar o número de arestas para calcular o custo da estrutura de metal que sustentará as arestas do prisma. Calcule o número de arestas desse prisma.

- A) 15 arestas
- B) 20 arestas
- C) 25 arestas
- D) 30 arestas

ATIVIDADE 8

A escola decidiu instalar um reservatório de água em formato de cilindro para garantir o abastecimento em dias de seca. O reservatório tem 3 metros de altura e um raio da base de 1 metro.

Qual é o volume total de água (em m^3) que esse reservatório pode armazenar?

Use $\pi = 3,14$.

- A) 18,84 m^3
- B) 12,56 m^3
- C) 9,42 m^3
- D) 21,99 m^3



ATIVIDADE 9

Uma lanchonete oferece dois tamanhos de copos em formato de cilindro:

- O copão com altura de 20 cm e raio de 10 cm.
- O copo pequeno com altura de 10 cm e raio de 5 cm.

Um grupo de amigos está pensando em qual opção escolher: comprar um único copão ou vários copos pequenos para obter a mesma quantidade de bebida.

Sabendo que o preço de um copão é R\$ 26,00 e cada copo pequeno custa R\$ 3,50, qual é a melhor opção em termos de custo-benefício? (considere $\pi = 3,14$).

- A) Comprar um copão, pois ele custa R\$ 26,00 e oferece mais bebida por um preço menor.
- B) Comprar 2 copos pequenos, pois são mais baratos e o volume é o mesmo que o do copão.
- C) Comprar 8 copos pequenos, pois o volume é o mesmo e custa menos.
- D) Comprar tanto o copão quanto os 8 copos pequenos, pois ambos têm o mesmo custo.

ATIVIDADE 10

Carlos está construindo sua casa e precisa escolher entre duas opções de caixa d'água:

- Caixa cilíndrica: Raio = 2 m, Altura = 3 m;
- Caixa retangular: Comprimento = 4 m, Largura = 3 m, Altura = 3 m.

Carlos quer saber qual caixa oferece maior capacidade de armazenamento de água. Qual delas oferece maior capacidade de armazenamento?

Quando necessário use $\pi = 3,14$.

- A) A caixa cilíndrica tem maior volume, com 37,68 m³.
- B) A caixa retangular tem maior volume, com 36 m³.
- C) A caixa cilíndrica tem volume de 36 m³.
- D) Ambas as caixas têm o mesmo volume de 37 m³.





Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo desse capítulo. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?



Refleta sobre sua aprendizagem

- Sou capaz de relacionar objetos tridimensionais às suas planificações ou vistas, identificando corretamente as conexões entre o espaço e sua representação plana?
- Consigo calcular áreas de bases de prismas e cilindros, utilizando as fórmulas adequadas e as propriedades de cada figura geométrica?
- Sou capaz de resolver problemas que envolvam o volume de prismas e cilindros, interpretando o contexto da situação e aplicando os procedimentos de cálculo de forma correta?

Autoavaliação

Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Relacionar objetos tridimensionais às suas planificações ou vistas.	☐	☐	☐
Calcular áreas de bases de prismas e cilindros.	☐	☐	☐
Resolver problemas que envolvam volume de prismas e cilindros.	☐	☐	☐



Dica: Revise os tópicos que você marcou como “**preciso revisar**” e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências



BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**: 6º ano: manual do professor. 10. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da matemática**: 8º ano: ensino fundamental: anos finais. São Paulo: Ftd, 2022.

IMPA. **OBMEP – Portal da OBMEP**. Disponível em:
<https://portaldaobmepimpa.br/index.php/modulo/ver?modulo=40>.
Acesso em: 10 jan. 2025.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida (ed.). **SuperAÇÃO!**: matemática: 8º ano: manual do professor. São Paulo: Moderna, 2022.

Rotinas Pedagógicas Escolares

Matemática

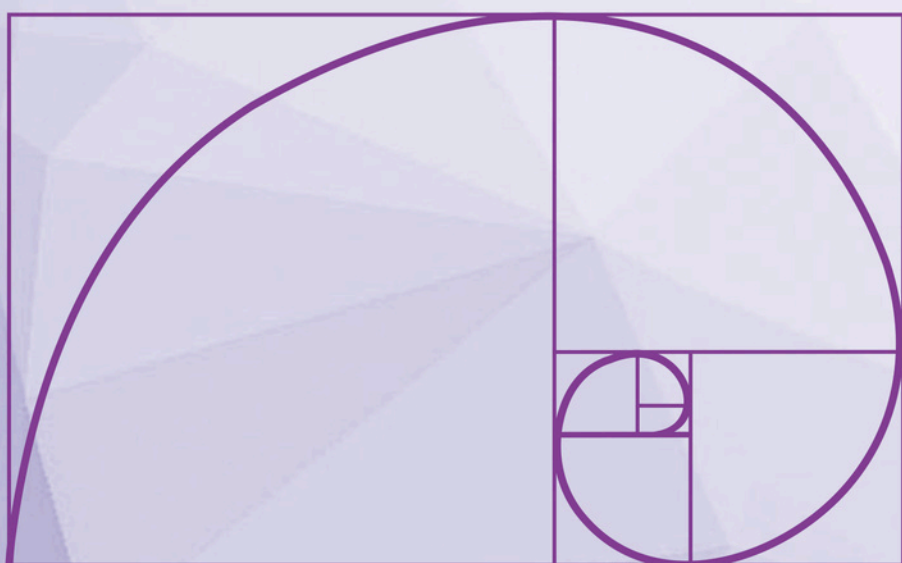


GOVERNO DO ESTADO
DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

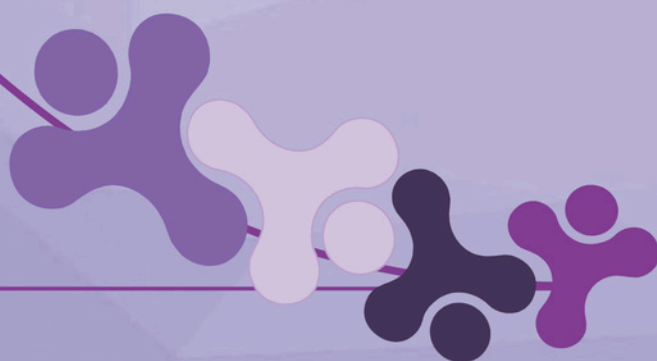


Gerência de Currículo
da Educação Básica

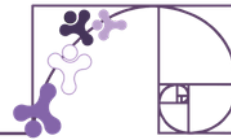
SEDU 2026



Capítulo 11: Funções



Apresentação



Prezado(a) estudante,

Já notou que quase tudo no mundo funciona à base de "causa e efeito"? Para traduzir essa lógica, usamos as Funções. Enquanto a Função Afim descreve crescimentos constantes em linha reta, a Função Quadrática explica curvas e pontos de máximo ou mínimo. Dominar esses temas é a chave para prever tendências, otimizar escolhas e entender os padrões que moldam o seu cotidiano de forma estratégica.

O que você vai estudar neste capítulo

Neste capítulo, você vai estudar o conceito de funções, compreendendo como uma grandeza se transforma em relação a outra. Irá explorar a função afim, analisando como taxas de variação constante formam comportamentos lineares, e a função quadrática, identificando parábolas e pontos de máximo e mínimo. Ao final, você aplicará esses modelos para prever resultados e resolver problemas práticos em diferentes contextos matemáticos e cotidianos.

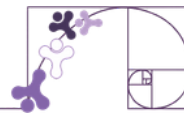
Expectativas de aprendizagem

Ao final dos estudos propostos por este capítulo, espera-se que você seja capaz de:

- ✓ Associar uma das representações de uma função afim a outra de suas representações (tabular, algébrica, gráfica);
- ✓ Associar uma situação que envolva função afim a uma das suas representações (tabular, algébrica, gráfica);
- ✓ Resolver problemas que envolvam função afim;
- ✓ Associar uma das representações de uma função quadrática a outra de suas representações (tabular, algébrica, gráfica);
- ✓ Associar uma situação que envolva função quadrática a uma das suas representações (tabular, algébrica, gráfica).
- ✓ Resolver problemas que envolvam função quadrática.

Ao concluir este capítulo, você será convidado(a) a retomar essas expectativas e refletir sobre o que aprendeu. Essa autoavaliação ajudará você a perceber o quanto evoluiu e o que pode aprimorar.

Conceitos & Conteúdos



A IDEIA DE FUNÇÃO

Leia as situações a seguir:

- O tempo necessário para percorrer um trajeto de bicicleta **depende** da velocidade média do ciclista.



canva



canva

- A quantidade de tinta necessária para pintar uma parede **está em função** da área da parede.

O conceito de função está presente em situações em que relacionamos **duas grandezas variáveis**.

Lembre-se de que **grandeza** é algo que pode ser medido ou contado. *Comprimento, área, volume, massa e população* são alguns exemplos de grandezas.

Acompanhe mais um exemplo:

Lucas foi à loja de conveniência para comprar garrafas de água para um passeio escolar. No local, cada garrafa de água custava R\$ 4,00. Então:

- 2 garrafas custavam R\$ 8,00.
- 3 garrafas custavam R\$ 12,00 e assim por diante.

Considere a tabela abaixo.

Nela, podemos perceber que o preço a pagar é dado em função da quantidade de garrafas compradas.

Quantidade de Garrafas (n)	Preço Total (P em R\$)
1	4,00
2	8,00
3	12,00
4	16,00

- Podemos expressar essa relação com a fórmula matemática: **$P = 4n$** .
- Essa fórmula estabelece uma **lei da função** que relaciona as duas grandezas variáveis.
- Essa relação é o que chamamos de **função**.
- Como a variável “preço P” **depende** da “quantidade n de garrafas”, dizemos que P é a **variável dependente** e n é a **variável independente**.



FORMALIZANDO A IDEIA DE FUNÇÃO

Em termos matemáticos, uma função é uma relação entre dois conjuntos, onde cada elemento do primeiro conjunto (chamado de **domínio**) está associado a exatamente um único elemento do segundo conjunto (chamado de **contradomínio**).

É possível representar uma função utilizando a notação de conjuntos. Para isso, observe os exemplos a seguir.

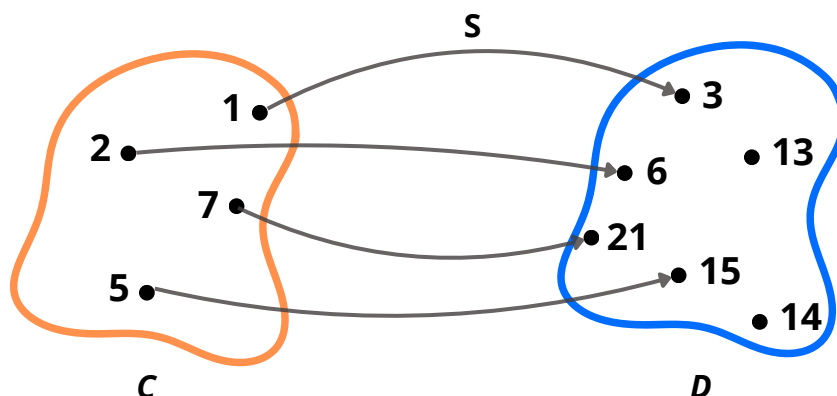
a) Considere os conjuntos **A** e **B** tais que:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e } B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$$

A tabela ao lado mostra uma relação entre os dois conjuntos. Cada número pertencente a **A** está associado ao triplo do próprio número, que pertence a **B**.

A	B
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

b) Observe a seguir o diagrama de uma relação **S** entre os conjuntos **C** e **D**.



Perceba que, nessa representação, cada valor pertencente à **C** está associado a um único valor em **D**.

Nesses dois exemplos anteriores, as relações estabelecidas entre **A** e **B** e entre **C** e **D** são tais que:

- todo elemento do primeiro conjunto tem um correspondente no segundo conjunto;
- cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um único elemento do segundo conjunto.

Assim, podemos dizer que temos, no primeiro exemplo, uma **função de A em B**, e no segundo exemplo, temos uma **função de C em D**.



DEFINIÇÃO E NOTAÇÃO

Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma **função f de A em B** é uma relação que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

$$f : A \rightarrow B$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

Nos dois casos, lemos: f é uma função de A em B.

Além disso, se a função f relaciona o elemento x de A com o elemento y de B, então podemos escrever:

$$f(x) = y \quad (\text{Lemos : f de x é igual a y.})$$

Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Ao definirmos uma função f de A em B, o conjunto A é chamado de **domínio (D(f))** e o conjunto B é o **contradomínio (CD(f))** da função f.

Além disso, para cada $a \in A$, o elemento $b \in B$ tal que $f(a) = b$ é chamado de **imagem** de a pela função f.

Já o conjunto formado pelas imagens de todos os elementos de A é chamado de **conjunto imagem** de f e é indicado por **Im(f)**.

Elementos de uma função

- **Variável independente:** É a grandeza que podemos controlar ou escolher (representada normalmente por x).
- **Variável dependente:** É a grandeza cujo valor depende do valor da variável independente (representada normalmente por y).
- **Lei da função:** É a regra que descreve como os valores de x estão relacionados aos valores de y.
- **Domínio D(f):** é o conjunto de todos os valores que podem ser atribuídos à variável independente, geralmente representada por x. Em outras palavras, o domínio é o conjunto de entradas válidas para a função.
- **Contradomínio CD(f):** é o conjunto de todos os valores possíveis que podem ser atribuídos à variável dependente, geralmente representada por y. É o conjunto de saídas potenciais da função, antes de considerar as restrições específicas do domínio.
- **Imagem Im(f):** é um subconjunto do contradomínio. Ela é composta pelos valores que realmente são obtidos pela função, considerando o domínio específico.



IDENTIFICANDO A LEI DE FORMAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

A **lei de formação** é uma fórmula ou expressão algébrica que define a relação entre as variáveis da função. Normalmente, ela é representada por $y = f(x)$, onde:

- x é a variável independente (entrada ou domínio);
- y é a variável dependente (saída ou imagem);
- $f(x)$ é a regra ou fórmula que define como y é calculado a partir de x .

Por exemplo:

- Na função definida por $y = 2x+3$, a lei de formação é $f(x) = 2x+3$. Isso significa que para cada valor de x , o valor correspondente de y é encontrado multiplicando x por 2 e somando 3.

Como identificar a lei de formação?

1. Observando pares ordenados (x, y)

A partir de uma tabela com valores conhecidos de entrada (x) e saída (y), podemos identificar um padrão. Por exemplo:

x	y
1	3
2	5
3	7

Nesse caso, é possível observar que y aumenta de 2 em 2 e está relacionado a x pela fórmula $y = 2x + 1$.

2. Compreendendo o contexto da situação

Muitas vezes, a lei de formação pode ser identificada a partir de uma situação-problema. Por exemplo:

Uma pizzeria cobra R\$ 20,00 por pizza mais uma taxa de entrega de R\$ 5,00. A função que relaciona o número de pizzas (x) com o preço total (y) é: $y = 20x + 5$.

Por que identificar a lei de formação é importante?

- Permite calcular o valor da saída (y) para qualquer entrada (x).
- Ajuda a entender como as variáveis se relacionam.
- Com a lei de formação, é possível generalizar problemas e encontrar soluções para casos específicos.

Vamos ver alguns exemplos:



a) Um aplicativo de transporte cobra R\$ 2,50 por quilômetro percorrido e uma taxa fixa de R\$ 5,00 pela corrida.

Vamos identificar a lei de formação que relaciona a distância percorrida (**x**, em km) com o valor da corrida (**y**, em reais):

- A cada quilômetro (x), adicionam-se R\$ 2,50 ao valor total.
- O valor inicial da corrida é R\$ 5,00.
- A lei de formação será: **$y = 2,50x + 5$**

Com essa fórmula, é possível calcular o valor da corrida para qualquer distância percorrida.

b) Uma empresa de streaming oferece um plano básico em que o cliente paga R\$ 15,00 mensais pelo serviço e R\$ 2,00 adicionais por cada filme exclusivo, escolhido pelo cliente.

Vamos identificar a lei de formação que relaciona a quantidade de filmes exclusivos (x) com o valor total da mensalidade (y, em reais).

- O valor fixo mensal do plano é R\$ 15,00.
- Para cada filme alugado (x), acrescenta-se R\$ 2,00 ao valor total.
- A variável dependente (y) é o preço total pago no mês, e a variável independente (x) é o número de filmes exclusivos escolhido pelo cliente.
- A lei de formação será: **$y = 2x + 15$** .

Com essa fórmula, é possível calcular o valor total da mensalidade do cliente para qualquer quantidade de filmes exclusivos escolhidos.

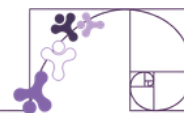
c) Um fornecedor de água mineral vende galões de 20 litros para estabelecimentos comerciais. A tabela abaixo mostra os valores pagos (y) em função da quantidade de galões comprados (x), incluindo uma taxa fixa de entrega no valor de R\$ 10,00.

Quant. de galões (x)	Valor a ser pago (y)
1	35
2	60
3	85

Vamos identificar a lei de formação que relaciona a quantidade de galões comprados (x) com o valor a ser pago (y, em reais).

- O custo inicial da entrega é de R\$ 10,00.
- Por 1 galão será pago R\$35,00 incluindo a taxa de entrega, ou seja $35 - 10 = 25$ reais cada galão.
- A lei de formação será: **$y = 25x + 10$** .

Conceitos & Conteúdos



FUNÇÃO AFIM

As situações nos exemplos já apresentados possuem pares de grandezas cujos valores podem ser relacionados por meio de uma função afim: quantidade de garrafas de água e custo total, valor a pagar pela corrida e quilômetros rodados, mensalidade a ser paga e quantidade de filmes exclusivos, galões de água e preço a pagar.

Observe a situação abaixo:

João foi ao mercado a pedido de sua mãe, que pediu que ele comprasse café. Ao chegar na prateleira, ele viu que cada pacote de café conilon custava R\$ 25,00. Enquanto pegava o pacote, ficou pensando quanto ele pagaria se comprasse dois, três ou até quatro pacotes. “Se um custa R\$ 25,00, dois vão custar R\$ 50,00... e três, R\$ 75,00”, pensava ele que, de tão curioso com a conta, pegou o bloco de notas do seu celular para organizar melhor essas informações. João decidiu anotar em uma pequena tabela os valores que iria pagar de acordo com a quantidade de pacotes.



Design: Canva IA / Fonte: Canva

Quantidade de Pacotes	Valor Total a Pagar
1	R\$25,00
2	R\$50,00
3	R\$75,00
4	R\$100,00
5	R\$125,00
6	R\$150,00

A tabela acima mostra que, para cada quantidade de pacotes de café, existe um único valor total a ser pago. Isso significa que há uma relação entre dois valores: a quantidade de pacotes e o preço total. Quando, para cada valor da primeira coluna (entrada), há apenas um valor correspondente na segunda coluna (saída), estamos diante de uma **função**. Vamos tentar encontrar a **lei da função** do exemplo acima.

A **lei de uma função** é a regra que usamos para relacionar cada valor de entrada (domínio), como a quantidade de pacotes de café, com seu respectivo valor de saída (imagem), como o valor total a pagar. Essa regra pode ser representada por uma expressão matemática.



Vamos chamar a quantidade de pacotes de café de x e o valor total a ser pago de y . A partir da tabela abaixo, podemos observar como esses valores se relacionam. Nosso objetivo agora é tentar descobrir a lei dessa função, ou seja, encontrar uma expressão matemática que relacione x e y .

Quantidade de Pacotes	Valor Total a Pagar	Cálculo
1	R\$25,00	$25 = 25 \cdot 1$
2	R\$50,00	$50 = 25 \cdot 2$
3	R\$75,00	$75 = 25 \cdot 3$
4	R\$100,00	$100 = 25 \cdot 4$
5	R\$125,00	$125 = 25 \cdot 5$
6	R\$150,00	$150 = 25 \cdot 6$
...		...
x	y	$y = 25x$

Desse modo, podemos concluir que a lei da função é $y = 25x$, pois observamos que o valor total a ser pago (y) é sempre igual à quantidade de pacotes de café (x) multiplicada por 25, que é o preço de cada pacote. Essa expressão representa uma função matemática, onde para cada valor de x existe um único valor correspondente de y . Isso nos mostra como é possível utilizar a matemática para representar situações do cotidiano de forma prática e organizada, facilitando cálculos e previsões sem a necessidade de repetir contas a cada nova quantidade.

A situação apresentada cima pode ser relacionada por meio de uma **função afim**.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função afim quando é definida pela sentença matemática $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em $f(x) = ax + b$, os números reais **a** e **b** são chamados coeficientes da função. Analise alguns exemplos a seguir.

- $f(x) = 3x - 1$ (**$a = 3$** , **$b = -1$**)
- $f(x) = -6$ (**$a = 0$** , **$b = -6$**)
- $f(x) = x + 5$ (**$a = 1$** , **$b = 5$**)
- $f(x) = 0$ (**$a = 0$** , **$b = 0$**)
- $f(x) = 7 - 5x$ (**$a = -5$** , **$b = 7$**)
- $f(x) = 12x$ (**$a = 12$** , **$b = 0$**)



- Uma função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$, com a e b números reais e $a \neq 0$ é chamada **função polinomial de 1º grau**.
- Uma função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a = 0$ e $b \neq 0$, é chamada **função constante não nula**.
- A função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ é chamada **função constante nula** (ou **função nula**).

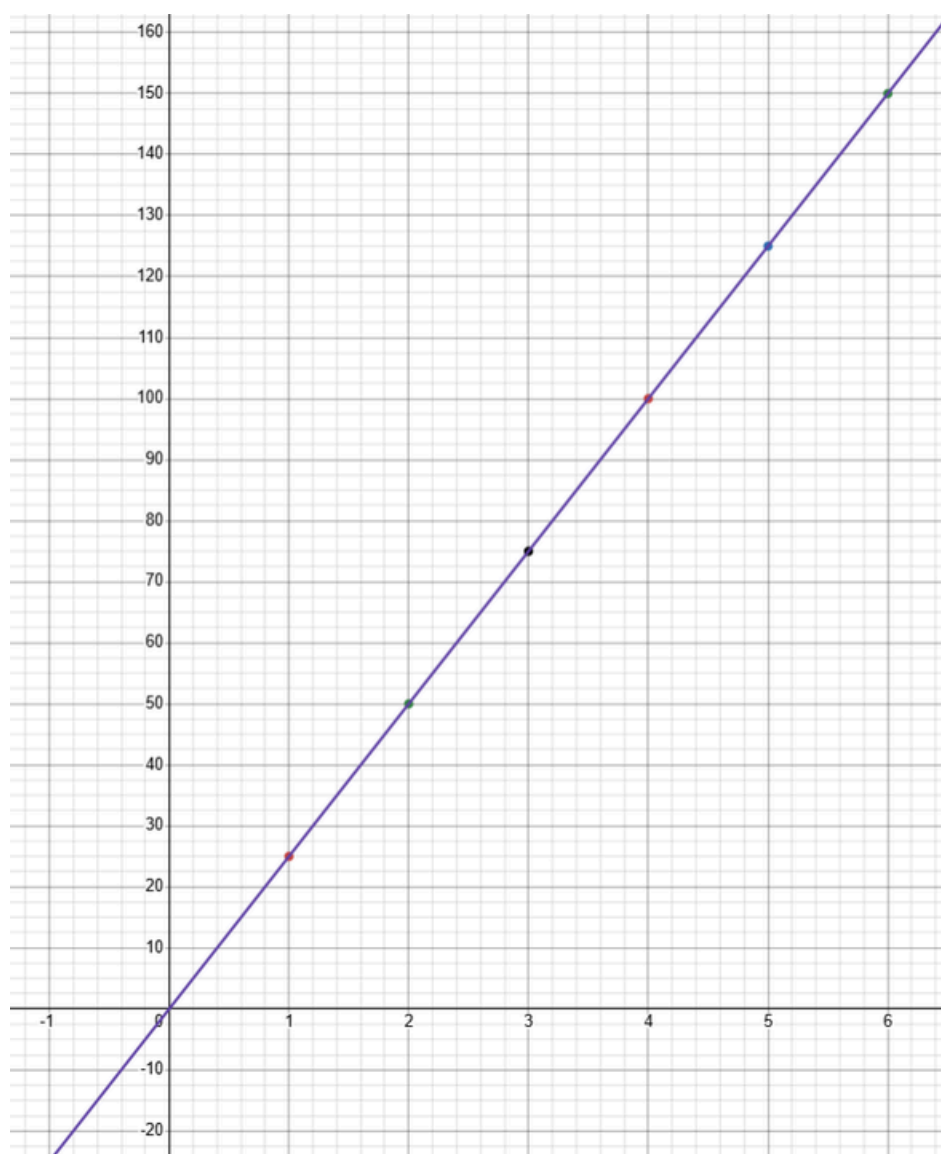
Utilizando o quadro acima, vamos classificar as seguintes funções:

- $f(x) = 3x - 1$ $\longrightarrow$ **Polinomial do 1º grau**
- $f(x) = -6$ $\longrightarrow$ **Constante não nula**
- $f(x) = x + 5$ $\longrightarrow$ **Polinomial do 1º grau**
- $f(x) = 0$ $\longrightarrow$ **Constante nula**
- $f(x) = 7 - 5x$ $\longrightarrow$ **Polinomial do 1º grau**
- $f(x) = 12x$ $\longrightarrow$ **Polinomial do 1º grau**

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO AFIM

Agora que já organizamos os dados em uma tabela e descobrimos a lei da função que relaciona a quantidade de pacotes de café (x) com o valor total a ser pago (y), podemos representar essa relação também por meio de um gráfico no plano cartesiano. O gráfico é uma maneira visual de observar o comportamento da função, facilitando a análise de como os valores crescem ou diminuem. Cada par ordenado da tabela, como $(1, 25)$, $(2, 50)$, $(3, 75)$ e assim por diante, representa um ponto que podemos marcar no plano cartesiano.

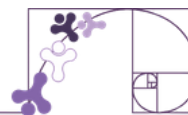
Para a construção do gráfico, utilizaremos os pares ordenados extraídos da tabela, posicionando-os adequadamente no plano cartesiano. Cada par ordenado representa uma correspondência entre a quantidade de pacotes de café adquiridos e o valor total a ser pago. Após a marcação desses pontos, procederemos à ligação entre eles por meio de uma linha contínua, o que permitirá a visualização do comportamento da função representada.



Ao analisar os pontos representados e devidamente conectados no gráfico, é possível observar que eles formam uma reta. Essa característica evidencia que a função em questão possui comportamento linear, o que nos permite afirmar que a função afim é representada, no plano cartesiano, por uma reta.

Domínio (x)	Imagem (y)	Par Ordenado
1	R\$25,00	(1, 25)
2	R\$50,00	(2, 50)
3	R\$75,00	(3, 75)
4	R\$100,00	(4, 100)
5	R\$125,00	(5, 125)
6	R\$150,00	(6, 150)

Exercícios Resolvidos



1) A seguir, são apresentadas algumas expressões que representam funções. Justifique aquelas que não correspondem a funções do 1º grau.

a) $p = 5q$

d) $y = x^2 + 6$

b) $r = s^3 - 7$

e) $r = -2s$

c) $r = \frac{s + 4}{2}$

f) $t = -\frac{3}{4} + u$

RESOLUÇÃO:

As expressões apresentadas representam diferentes tipos de funções. Para identificarmos quais são funções do 1º grau, devemos observar se estão na forma geral $f(x) = ax + b$, em que a variável aparece apenas com expoente 1 (ou seja, não está elevada ao quadrado, ao cubo, nem dentro de uma raiz ou no denominador com variável).

No caso acima, a opção (b) não é função do 1º grau porque o maior expoente é 3, ao invés de 1.

Também a opção (d) não é função do 1º grau porque o maior expoente é 2.

2) Em algumas cidades, para fazer uma corrida em um táxi, são cobrados R\$ 6,00 pela bandeirada, mais R\$ 3,20 por quilômetro percorrido.

a) Escreva no caderno a lei de formação de uma função afim que represente o valor cobrado pela corrida em função da quantidade de quilômetros percorridos.

b) Qual será o valor cobrado por uma corrida ao serem percorridos 15 km.

c) Daniel tem R\$ 55,00 para pagar uma corrida de táxi. Ele tem dinheiro suficiente para pagar uma corrida de 20 km? Justifique sua resposta.



RESOLUÇÃO:

a) Neste caso, queremos representar o valor total da corrida (vamos chamar de $C(x)$) em função da quantidade de quilômetros percorridos, que chamaremos de x . Sabemos que:

- O valor fixo da bandeirada é de R\$ 6,00.
- Além disso, são cobrados R\$ 3,20 por quilômetro.

Assim, a função afim que representa o valor da corrida é:

$$C(x) = 3,2x + 6$$

Onde:

- $C(x)$ é o valor total da corrida, em reais,
- x é a quantidade de quilômetros percorridos.

b) Para descobrir o valor cobrado por 15 km percorridos, basta substituir $x = 15$ na função encontrada no item anterior:

$$C(x) = 3,20x + 6$$

$$C(15) = 3,20 \cdot 15 + 6$$

$$C(15) = 48 + 6$$

$$C(15) = 54$$

c) Vamos calcular quanto custaria uma corrida de 20 km, usando a mesma função:

$$C(20) = 3,20 \cdot 20 + 6 = 64 + 6 = 70$$

O valor total da corrida seria R\$ 70,00.

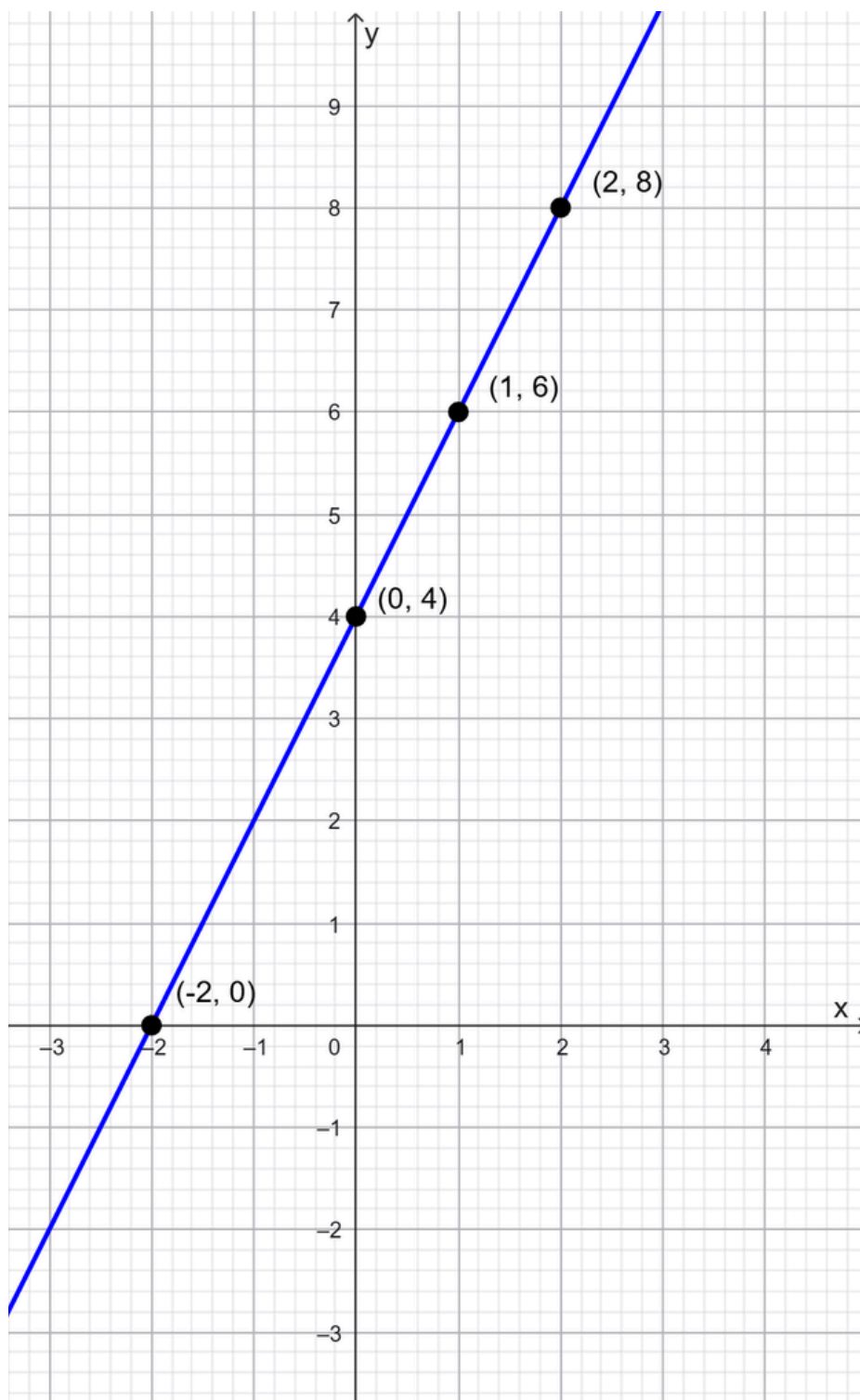
Daniel tem apenas R\$ 55,00, o que não é suficiente para pagar a corrida, pois faltariam R\$ 15,00.

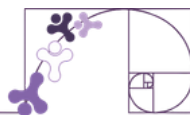
3) A tabela abaixo apresenta alguns valores calculados para a lei de formação $f(x) = 2x + 4$. Construa um gráfico utilizando os pares ordenados desta tabela.

x	$y = f(x) = 2x + 4$	Par ordenado
-2	$f(0) = 2 \cdot (-2) + 4 = 0$	$(-2, 0)$
0	$f(1) = 2 \cdot 0 + 4 = 4$	$(0, 4)$
1	$f(2) = 2 \cdot 1 + 4 = 6$	$(1, 6)$
2	$f(3) = 2 \cdot 2 + 4 = 8$	$(2, 8)$



RESOLUÇÃO:





VÍDEOS

Funções: conceitos básicos

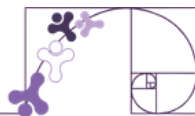
https://www.youtube.com/watch?v=DytqpyUMRm0&list=PL7RjLI0hJPfAx3HzRmhspf_mHkN9LOZ7Up&index=58



Função afim: noções básicas

https://www.youtube.com/watch?v=DytqpyUMRm0&list=PL7RjLI0hJPfAx3HzRmhspf_mHkN9LOZ7Up&index=58





ATIVIDADE 1

Considere a função afim $f(x) = 3x - 5$ definida no conjunto dos números reais. O valor de $f(8) - f(5)$ é:

- A) 7
- B) 8
- C) 9
- D) 10

ATIVIDADE 2

Dadas as funções abaixo, quais delas correspondem a funções polinomiais do 1º grau?

a) $f(t) = 1$

b) $f(r) = -4r$

c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

d) $f(x) = x + 2$

e) $f(x) = 2 - x^3$

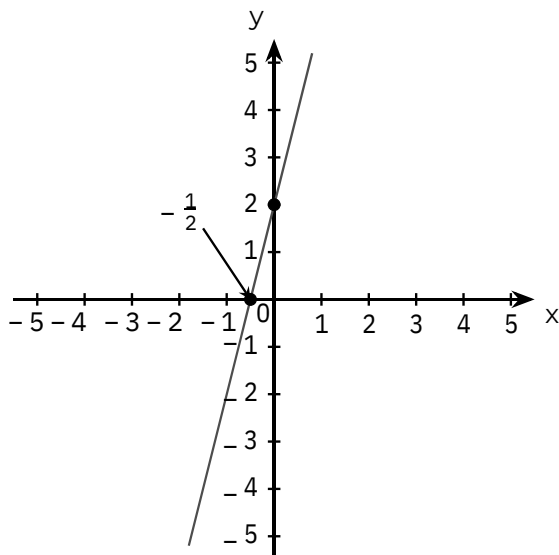
f) $f(t) = 10 - t$



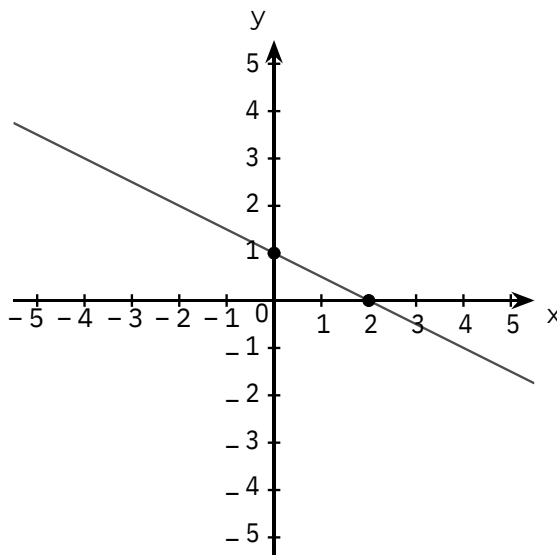
ATIVIDADE 3

(PAEBES) Um esboço do gráfico da função afim definida por $f(x) = 2x + 1$ está representado em:

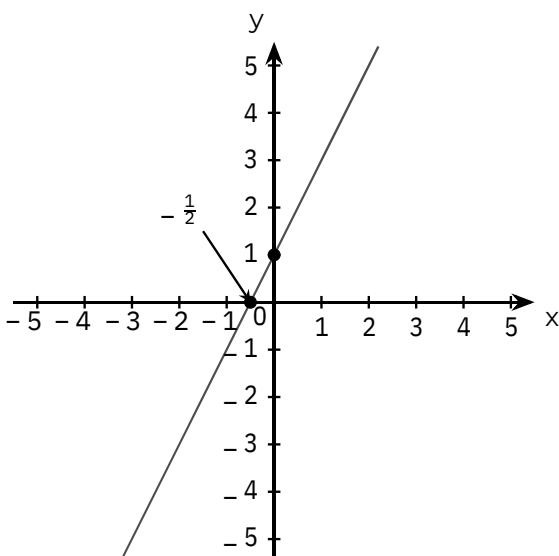
A)



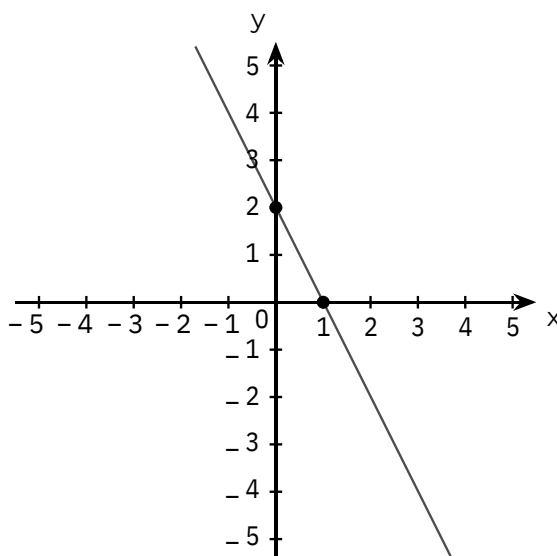
C)



B)



D)





ATIVIDADE 4

Um professor cobra um valor fixo de R\$ 30,00 para matrícula e R\$ 25,00 por cada aula de reforço.

Se y representa o valor total pago por um aluno que fez x aulas, a função que relaciona o valor pago com a quantidade de aulas é:

A) $y = 25x + 30$

B) $y = 30x + 25$

C) $y = 25x - 30$

D) $y = 55x$

ATIVIDADE 5

Uma lavanderia cobra uma taxa fixa de R\$ 10,00 pelo atendimento e R\$ 3,50 por cada peça de roupa lavada. Seja x o número de peças lavadas e y o valor total pago. Com base nessas informações, responda:

a) Escreva a função que relaciona o valor total a pagar (y) com o número de peças lavadas (x).

b) Quanto se paga para lavar 8 peças de roupa?

c) Se uma pessoa pagou R\$ 38,00, quantas peças de roupa ela lavou?



ATIVIDADE 6

Durante uma atividade de leitura supervisionada, João estabeleceu a meta de aumentar seu ritmo de leitura a cada dia. No primeiro dia, ele leu 3 páginas. A partir do segundo dia, decidiu ler sempre duas páginas a mais do que no dia anterior. A tabela abaixo mostra a quantidade de páginas lidas (P) em cada dia (d):

Dias (d)	1	2	3	4
Páginas lidas (P)	3	5	7	9

Com base nessas informações, qual é a expressão algébrica que representa a quantidade de páginas lidas por João em função do número de dias?

- A) $P = d + 1$
- B) $P = d + 2$
- C) $P = 2d$
- D) $P = 2d + 1$

ATIVIDADE 7

Dona Sandra faz entregas com seu carro e cobra da seguinte forma: um valor fixo de R\$ 7,00 pela retirada do produto mais R\$ 1,20 por quilômetro rodado.

Se y representa o valor total cobrado e x a quantidade de quilômetros percorridos, qual função representa corretamente essa situação?

- A) $y = 8,20x$
- B) $y = 7x + 1,20$
- C) $y = 1,20x + 7,00$
- D) $y = 1,20x - 7,00$



ATIVIDADE 8

(PAEBES) Uma empresa de telefonia fixa oferece a seus clientes um plano econômico de serviços telefônicos. Nesse plano, é cobrada uma mensalidade fixa de R\$ 18,10 acrescida de R\$ 0,23 a cada minuto em ligações para qualquer operadora. A lei de formação que relaciona o valor V , em reais, cobrado por essa empresa em função do tempo t , em minutos, de ligações realizadas está representada em:

- A) $V = 0,23t$
- B) $V = 18,10t + 0,23$
- C) $V = 18,10 + 0,23t$
- D) $V = 18,33t$

ATIVIDADE 9

O conjunto de valores formados pelos preços y cobrados por um pintor para executar um serviço está associado ao conjunto de valores formados pelas áreas x que serão pintadas por ele. Cada x está associado a um único y .

Área pintada (m ²)	Total a pagar (R\$)
5	35,00
10	45,00
20	65,00
40	105,00
80	185,00

Essa relação é expressa por uma lei onde, para calcular o total a ser pago pelo cliente, ele toma a área a ser pintada, multiplicada por 2 e adicionada 25, ou seja, $y = 2x + 25$.

Qual o preço cobrado para realizar um serviço de pintura de uma área de 150 m²?

- A) R\$ 300,00
- B) R\$ 325,00
- C) R\$ 400,00
- D) R\$ 1 050,00



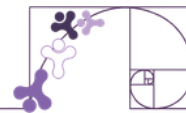
ATIVIDADE 10

A tabela abaixo expressa um conjunto de medidas de tempo (em minutos) onde **cada** elemento é associado a um **único** elemento de um conjunto formado por quantidade de panfletos impressos. Sendo x um elemento do conjunto das medidas de tempo e y um elemento do conjunto formado por quantidade de panfletos impressos, podemos associar x com y por meio de uma **função $y = f(x)$** .

Medida de tempo de impressão (em minuto)	Quantidade de panfletos
2	36
4	72
6	108
8	144
10	180

Qual das leis a seguir relaciona a quantidade de panfletos impressos (y) em função da medida de tempo (x) em minuto, conforme dados da tabela?

- A) $y = x + 34$
- B) $y = 15x + 6$
- C) $y = 18x$
- D) $y = 6x + 24$



FUNÇÃO QUADRÁTICA

Durante uma visita ao Parque Estadual da Pedra Azul, um professor de matemática, acompanhado de seus alunos, se encantou com a grandiosidade e a beleza da famosa formação rochosa. Ao observarem atentamente o contorno do morro, especialmente de determinados pontos das trilhas, perceberam que seu formato lembrava o gráfico de uma parábola, a curva característica da função polinomial do 2º grau, representado pela parábola branca na imagem abaixo.



Fonte: <http://bit.ly/412at3q>

Empolgado com a observação, o professor propôs um desafio aos alunos: descobrir qual seria a função quadrática que modelaria, de forma aproximada, o contorno daquele morro. Para isso, pediu que considerassem, hipoteticamente, que a Pedra Azul tivesse 500 metros de altura em seu ponto mais elevado e 500 metros de largura. A partir dessa informação, eles deveriam pensar em outros pontos de referência e, utilizando conceitos de função quadrática, determinar a equação que representaria essa imponente formação rochosa.

Para resolver o desafio proposto pelo professor e encontrar a função que modelaria o contorno do morro, será necessário compreender primeiro como funciona a função quadrática. Ao longo do nosso estudo, vamos explorar o que é uma função quadrática; o gráfico de uma função quadrática e os valores de máximo e mínimo de uma função quadrática.



LEI DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função polinomial do 2º grau (ou função quadrática) é uma função dada por uma lei de formação do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a , b e c números reais e $a \neq 0$, e é definida para todo x real.

Acompanhe alguns exemplos:

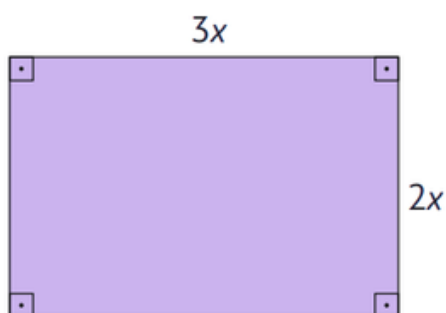
- A função definida por $y = x^2 - x + 3$ é uma função quadrática. Nesse caso, temos: $a = 1$, $b = -1$ e $c = 3$.
- A função dada por $y = -2x^2 + 5x$ é uma função quadrática. Nesse caso, temos: $a = -2$, $b = 5$ e $c = 0$.
- A função definida por $y = x^2 - 1$ é uma função quadrática. Nesse caso, temos: $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$.

Agora, considere a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Vamos determinar o valor da função quando $x = 2$, ou seja, o $f(2)$.

$$\begin{aligned}f(2) &= 2 \cdot (2)^2 - 3 \cdot (2) + 1 \\f(2) &= 2 \cdot 4 - 6 + 1 \\f(2) &= 8 - 6 + 1 \\f(2) &= 3\end{aligned}$$

Assim, quando substituirmos o valor de $x = 2$ na função $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, realizamos os cálculos passo a passo e encontramos $f(2) = 3$.

Considerando o retângulo abaixo, vamos calcular a fórmula para representar a medida da área A .



$$\begin{aligned}A(x) &= 3x \cdot 2x \\A(x) &= 6x^2\end{aligned}$$



Nós encontramos que a fórmula da área do retângulo anterior é $A = 6x^2$.

Caso o valor da área seja 150 m^2 , vamos verificar qual será o valor de x :

$$150 = 6x^2$$

$$\frac{150}{6} = x^2$$

$$25 = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{25}$$

$$x = \pm 5$$

Observando o resultado, percebemos que o valor $x = -5$ representaria uma medida negativa para o lado do retângulo, o que não faz sentido no contexto de um problema de geometria, pois a medida do lado de uma figura geométrica não pode ser negativa. Assim, o único valor que atende à situação proposta é $x = 5$ metros.

REPRESENTAÇÃO TABULAR

A representação tabular é uma das três formas clássicas de apresentar uma função (junto com a lei algébrica e o gráfico). Ela organiza os pares ordenados (x, y) em colunas, facilitando a visualização do comportamento dos números.

Vamos usar como exemplo a função quadrática $f(x) = -x^2 + 4x$:

Aqui está a estrutura ideal de uma representação tabular para essa função, utilizando valores de x de 0 a 4:

x	$y = f(x) = -x^2 + 4x$	Par ordenado
0	$f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 = 0$	(0, 0)
1	$f(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 = 3$	(1, 3)
2	$f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4$	(2, 4)
3	$f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 = 3$	(3, 3)
4	$f(4) = -4^2 + 4 \cdot 4 = 0$	(4, 0)

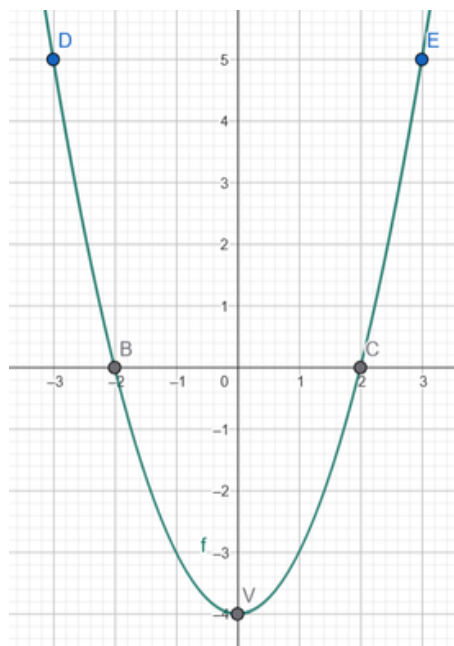
Para representar graficamente, inserimos esses pares ordenados no plano cartesiano e traçamos a parábola (curva da função quadrática).



GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Construir, no plano cartesiano, o gráfico da função definida por $y = x^2 - 4$, sendo x um número real qualquer. Inicialmente, vamos atribuir alguns valores reais para x , como os valores $-3, -2, 0, 2, 3$, substituí-los na lei de formação da função e calcular os respectivos valores de y , determinando os seguintes pares ordenados (x, y) . O conjunto de todos os pontos (x, y) , com x real e $y = x^2 - 4$, é o gráfico da função. Esse gráfico é representado por uma curva chamada de parábola. O ponto V , indicado na figura, chama-se vértice da parábola.

x	y	(x, y)
-3	5	$(-3, 5)$
-2	0	$(-2, 0)$
0	-4	$(0, -4)$
2	0	$(2, 0)$
3	5	$(3, 5)$



DETERMINANDO A LEI DE UMA FUNÇÃO

Vamos retomar o cenário descrito no início, no qual o professor, durante a visita ao Parque Estadual da Pedra Azul, propôs aos alunos o desafio de determinar uma função quadrática que modelasse o contorno do morro. Agora, para dar continuidade a essa proposta, vamos estabelecer algumas medidas hipotéticas que nos ajudarão no cálculo. Consideraremos que o morro possui 500 metros de altura e 500 metros de largura total, posicionando o eixo de simetria no centro da formação rochosa e o eixo x na sua base. A partir dessas informações, vamos aplicar o conhecimento sobre função quadrática para encontrar a lei que descreve, de forma aproximada, esse formato.



- O vértice da parábola está no ponto (0,500), altura máxima no centro.
- A base do morro esteja sobre o eixo x, ou seja, os pontos de interseção com o eixo x (raízes) serão (-250, 0) e (250, 0), pois a largura total é 500 m e dividimos igualmente à esquerda e à direita do eixo de simetria.



Fonte: <http://bit.ly/412at3q>

Sabendo que a função quadrática tem a forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Como o eixo de simetria é o eixo y, temos $b = 0$, logo:

$$y = ax^2 + c$$

No vértice, $c = 500$, então:

$$y = ax^2 + 500$$

Usando um ponto da base, por exemplo (250, 0):

$$0 = a(250)^2 + 500$$

$$0 = 62500a + 500$$

$$62500a = -500$$

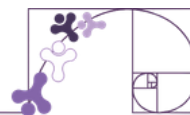
$$a = -\frac{500}{62500}$$

$$a = -0,008$$

Portanto, a função que modela a forma do morro é:

$$y = -0,008x^2 + 500$$

Exercícios Resolvidos



1) Sendo $f(x) = 2x^2 + 5$, determine no caderno o valor de $f(\sqrt{5})$ e o valor de x para que $f(x) = 21$.

RESOLUÇÃO:

Temos a função $f(x) = 2x^2 + 5$.

1. Para calcular $f(\sqrt{5})$, basta substituir x por $\sqrt{5}$ na expressão e simplificar.

2. Para encontrar o valor de x tal que $f(x) = 21$, vamos montar a equação $2x^2 + 5 = 21$ e resolvê-la, isolando x .

$$f(\sqrt{5}) = 2(\sqrt{5})^2 + 5$$

$$f(\sqrt{5}) = 2 \cdot 5 + 5$$

$$f(\sqrt{5}) = 10 + 5$$

$$f(\sqrt{5}) = 15$$

$$2x^2 + 5 = 21$$

$$2x^2 = 16$$

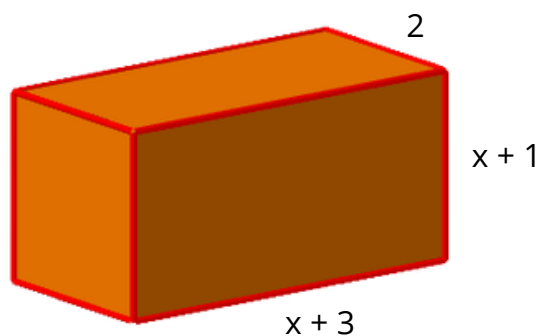
$$x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{8}$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

Ao calcular f de raiz quadrada de 5 na função $f(x) = 2x^2 + 5$, obtemos o valor 15. Já ao resolver a equação $f(x) = 21$, encontramos como soluções x igual a mais ou menos 2 raiz de 2, o que significa que tanto $x = 2$ raiz de 2 quanto $x = -2$ raiz de 2 satisfazem a condição dada.

2) Expresse na forma $y = ax^2 + bx + c$ a medida do volume do paralelepípedo.





RESOLUÇÃO:

Para determinar a expressão algébrica do volume de um paralelepípedo na forma $y = ax^2 + bx + c$, consideramos que seu volume é dado pelo produto das três dimensões. No problema, os lados medem 2, $x + 1$ e $x + 3$. Assim, o volume depende de x e pode ser escrito multiplicando essas medidas. Ao desenvolver a expressão, obtemos um polinômio quadrático em x , que representa como o volume varia quando a dimensão variável muda. Esse procedimento organiza o resultado na forma padrão, permitindo identificar claramente os coeficientes a , b e c da função quadrática associada ao volume.

$$V = 2 \cdot (x + 1) \cdot (x + 3)$$

$$V = 2 \cdot [(x + 1)(x + 3)]$$

$$V = 2 \cdot (x^2 + 3x + x + 3)$$

$$V = 2 \cdot (x^2 + 4x + 3)$$

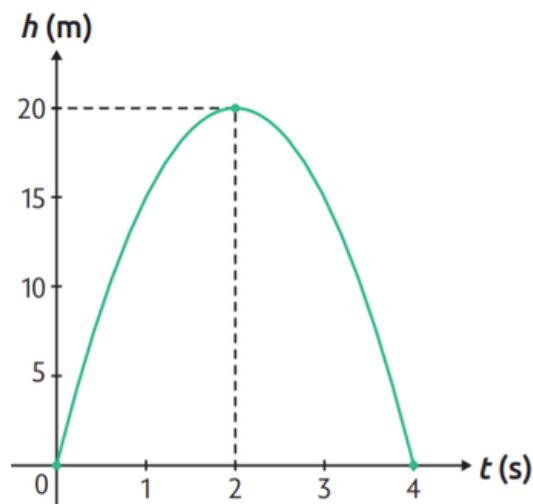
$$V = 2x^2 + 8x + 6$$

Após realizar os cálculos, chegamos à expressão do volume do paralelepípedo na forma $y = ax^2 + bx + c$. Nesse caso, o resultado foi $y = 2x^2 + 8x + 6$, onde o coeficiente a é 2, o coeficiente b é 8 e o coeficiente c é 6. Essa função quadrática mostra como o volume varia de acordo com o valor de x , permitindo analisar de forma direta a relação entre a dimensão variável e o volume total.

3) Em uma partida de futebol, Gabriel fez um lançamento no qual a trajetória da bola descreveu uma parábola. Essa trajetória tem a medida de sua altura h (em metros) dada em função da medida do tempo t (em segundos) decorrido após o chute.

Analise a trajetória da bola e responda às questões.

- Qual foi a medida da altura máxima atingida pela bola?
- Quantos segundos depois do lançamento a bola tocou o solo novamente?
- Sabendo que a trajetória da bola pode ser descrita por $h = -5t^2 + 20t$, determine a altura atingida pela bola, após 2,5 segundos do lançamento.





RESOLUÇÃO:

A trajetória vertical da bola é dada por $h = -5t^2 + 20t$, onde h é a altura em metros e t é o tempo em segundos após o chute.

a) A parábola é voltada para baixo (coeficiente de t^2 igual a -5), portanto, a altura máxima ocorre no vértice. Podemos observar no gráfico que essa altura máxima é atingida no instante $t = 2$ s. Sendo assim, $h = 20$ metros.

b) Podemos observar no gráfico que a bola toca o solo novamente no instante $t = 4$ s. Portanto, isso ocorre 4 segundos após o lançamento.

c) A altura da bola após 2,5 segundos do lançamento pode ser determinada substituindo $t = 2,5$ na expressão $h = -5t^2 + 20t$. Ao realizar o cálculo, obtém-se que a bola está a 18,75 metros de altura nesse instante.

$$h(2,5) = -5 \cdot (2,5)^2 + 20 \cdot (2,5)$$

$$h(2,5) = -5 \cdot 6,25 + 50$$

$$h(2,5) = -31,25 + 50$$

$$h(2,5) = 18,75 \text{ m}$$

4) Dada a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$, faça uma tabela com os pares ordenados, utilizando para x os valores $-1, 0, 1, 2$ e 3 e construa o seu gráfico.

RESOLUÇÃO:

Inicialmente vamos construir a tabela, substituindo cada valor de x na função $f(x)$ para encontrar cada par ordenado.

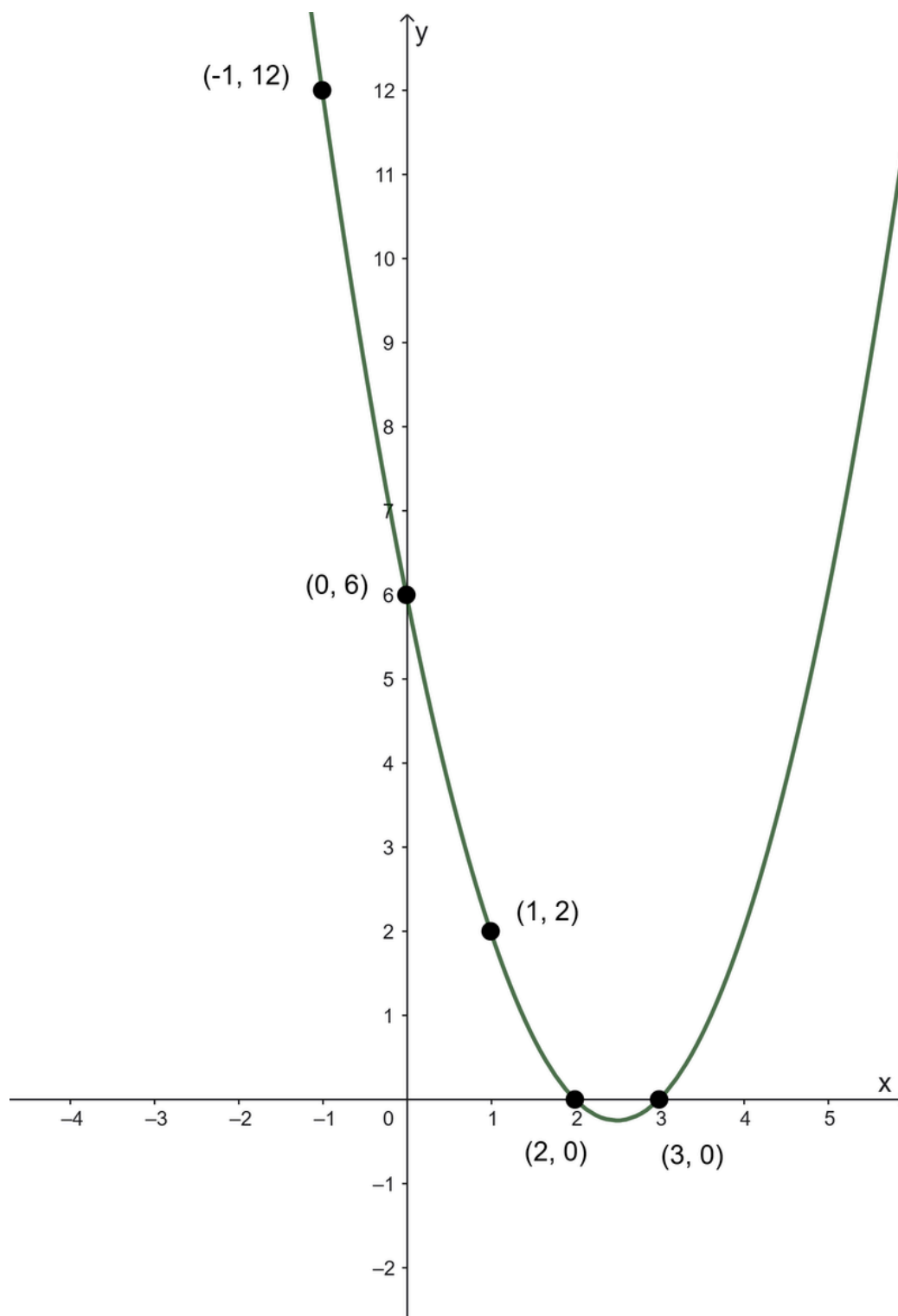
x	$y = f(x) = x^2 - 5x + 6$	Par ordenado
-1	$f(-1) = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 12$	$(-1, 12)$
0	$f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$	$(0, 6)$
1	$f(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$	$(2, 0)$
3	$f(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$	$(3, 0)$

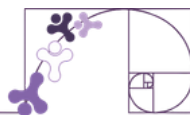


Assim, de acordo com a tabela, obtemos os seguintes pares ordenados:

$(-1, 12)$; $(0, 6)$; $(1, 2)$; $(2, 0)$; $(3, 0)$.

Marcando esses pontos no plano cartesiano, temos:



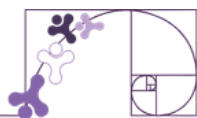


VÍDEOS

Função quadrática

<https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=61>





ATIVIDADE 1

Em uma comunidade rural, foi implantado um projeto de incentivo ao uso de energia limpa. Cada residência recebeu um painel solar, e, ao longo das semanas, os moradores passaram a instalar novos painéis em outras casas, de forma organizada e crescente.

A tabela abaixo mostra a produção total de energia solar (em kWh) gerada por semana no projeto:

Nº de Semanas	1	2	3	4	5
Produção (kWh)	150	600	1350	2400	3750

A equipe responsável quer estimar qual será a produção acumulada de energia na 8ª semana. Para isso, é necessário entender o padrão de crescimento da produção ao longo das semanas.

Observe os dados da tabela e responda:

- Você acha que a produção está aumentando de forma linear (mesmo valor a cada semana) ou de outra forma? Justifique.
- Pesquisando os valores da tabela, é possível perceber que eles seguem um padrão baseado no número da semana ao quadrado multiplicado por um número fixo. Consegue descobrir essa relação?
- Use sua expressão para estimar a produção de energia solar na 8ª semana.



ATIVIDADE 2

Em um experimento de laboratório, a temperatura T (em graus Celsius) de um certo material ao longo do tempo t (em minutos) é dada pela seguinte função:

$$T(t) = 2t^2 - 3t + 5$$

Sabendo disso, calcule a temperatura do material nos seguintes instantes:

- a) $t = 0$ min b) $t = 2$ min c) $t = 4$ min d) $t = 6$ min

ATIVIDADE 3

Dada a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, qual é o valor de $f(-3)$?

- A) -31
B) -29
C) 31
D) 49

ATIVIDADE 4

Dada a função quadrática $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, qual é o valor de $f\left(\frac{2}{3}\right)$?

- A) $\frac{10}{9}$
B) $\frac{2}{3}$
C) $\frac{4}{9}$
D) 2



ATIVIDADE 5

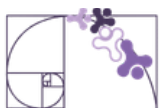
Considere a função quadrática: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

a) Complete a tabela abaixo, calculando os valores correspondentes de $f(x)$ para cada valor de x .

x	$f(x) = x^2 + 2x - 3$	Par ordenado $(x, f(x))$
-2		
-1		
0		
1		
2		

b) Marque os pares ordenados obtidos no plano cartesiano.

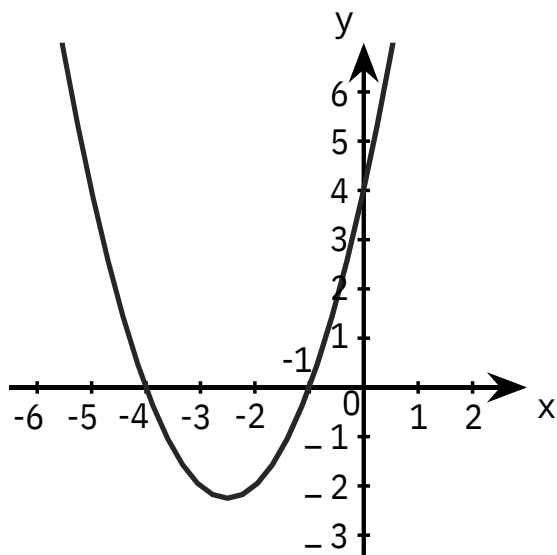
c) Una os pontos com uma linha curva suave, representando graficamente a função.



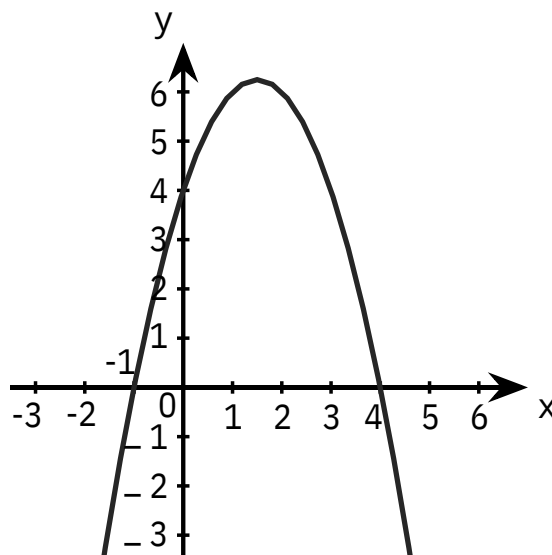
ATIVIDADE 6

(PAEBES) Qual é o gráfico que melhor representa a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 3x + 4$?

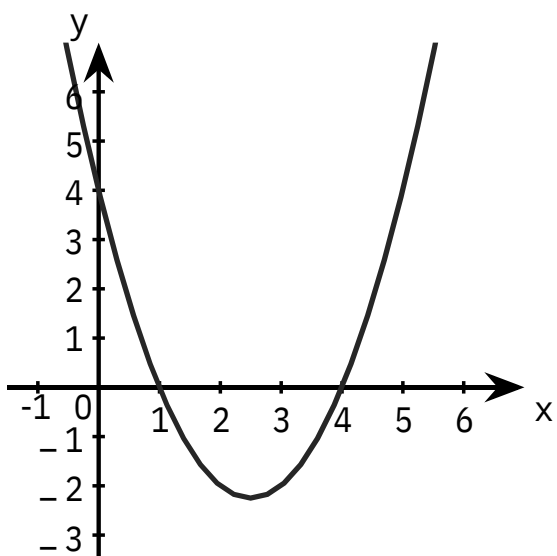
A)



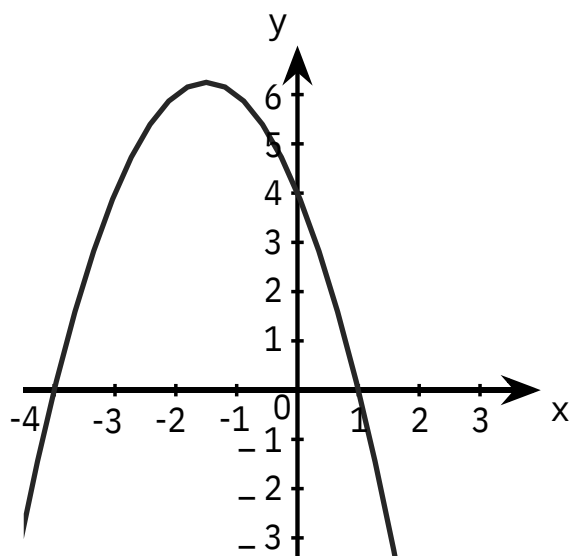
B)



C)



D)





ATIVIDADE 7

(PAEBES - Adaptada) Um canhão disparou uma bala, de forma que a altura H , em metros, atingida por essa bala em função do tempo t , em segundos, é dada por:

$$H(t) = -5t^2 + 60t, \quad \text{com } 0 \leq t \leq 12$$

Desconsiderando a altura do canhão, sabe-se que a altura máxima, em relação ao solo, é atingida 6 segundos após o disparo. Qual é a altura máxima atingida pela bala?

- A) 120 m
- B) 150 m
- C) 160 m
- D) 180 m

ATIVIDADE 8

(PAEBES - Adaptada) A potência elétrica $P(i)$, em watt, fornecida por um gerador em função da intensidade i da corrente elétrica, em ampere, é dada por:

$$P(i) = 12i - 6i^2$$

Sabendo que a potência máxima fornecida pelo gerador é 6 watts, qual é a intensidade da corrente elétrica (em ampere) correspondente a essa potência?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4



ATIVIDADE 9

Um viveiro escolar começou a produzir mudas de plantas para arborizar a escola e a comunidade. O número total de mudas produzidas ao final de cada semana foi anotado na tabela abaixo:

Nº da Semana	1	2	3	4	5
Nº de Mudas	50	200	450	800	1250

Com base nos dados da tabela, qual é a expressão algébrica que representa a quantidade total de mudas produzidas (**M**) ao final de **x** semanas?

- A) $M(x) = 50x^2$
- B) $M(x) = 100x^2$
- C) $M(x) = 150x^2$
- D) $M(x) = x^2 + 50$

ATIVIDADE 10

Durante uma campanha de arrecadação de alimentos promovida por uma escola, registrou-se o total acumulado de alimentos (em kg) ao final de cada semana. A tabela a seguir mostra esses dados:

Semana	1	2	3	4	5
Alimentos (kg)	6	9	14	21	30

Qual é a expressão algébrica que representa essa função?

- A) $A(x) = x^2 + 3$
- B) $A(x) = x^2 + 5$
- C) $A(x) = x^2 + 7$
- D) $A(x) = x^2 + 9$



Chegou o momento de pensar sobre o que você aprendeu neste capítulo.

As Expectativas de Aprendizagem apresentadas no início indicavam os principais objetivos do estudo desse capítulo. Agora, vale a pena refletir: o quanto você avançou em relação a cada um deles?



Refleta sobre sua aprendizagem

- Consigo relacionar as diferentes formas de representar uma função afim, transitando com clareza entre tabelas, fórmulas algébricas e gráficos?
- Sou capaz de identificar situações do cotidiano que envolvam uma função afim e traduzi-las corretamente para uma de suas representações?
- Consigo resolver problemas práticos que utilizem os conceitos de função afim de forma eficiente?
- Sou capaz de associar as representações de uma função quadrática, compreendendo como uma expressão algébrica se reflete em sua tabela ou em seu gráfico?
- Consigo interpretar uma situação real que envolva uma função quadrática e conectá-la à sua representação gráfica ou algébrica?
- Consigo resolver problemas práticos que envolvam os conceitos de função quadrática de forma eficiente?



Autoavaliação

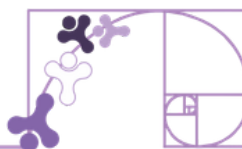
Marque a opção que melhor representa como você se sente em relação ao seu aprendizado neste capítulo:

Expectativa de Aprendizagem	Consegui compreender bem	Compreendi parcialmente	Preciso revisar
Associar uma das representações de uma função afim a outra de suas representações (tabular, algébrica, gráfica).	☐	☐	☐
Associar uma situação que envolva função afim a uma das suas representações (tabular, algébrica, gráfica).	☐	☐	☐
Resolver problemas que envolvam função afim.	☐	☐	☐
Associar uma das representações de uma função quadrática a outra de suas representações (tabular, algébrica, gráfica).	☐	☐	☐
Associar uma situação que envolva função quadrática a uma das suas representações (tabular, algébrica, gráfica).	☐	☐	☐
Resolver problemas práticos que envolvam os conceitos de função quadrática de forma eficiente	☐	☐	☐



Dica: Revise os tópicos que você marcou como “**preciso revisar**” e converse com seu professor(a) sobre as dúvidas. Aprender Matemática é um processo que se fortalece com a prática e com o diálogo.

Referências



BONJORNO, Giovanni Jr.; CÂMARA, Paulo. Prisma: matemática – conjuntos e funções . São Paulo: FTD, 2020.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Matrizes de referência de matemática do Saeb – BNCC. Brasília, 2022.

Orientações curriculares. Currículo ES, 2024. Disponível em: <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares/>. Acesso em: 18 jun. 2025.

DANTE, Luiz Roberto. Telaris – Matemática: 9º ano . 3.ed. São Paulo: Editora Ática, 2018.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. Matemática em contextos . Volume 1. São Paulo: Ática, 2020.

DANTE, L. R. Teláris Essencial: Matemática 9º ano (ALUNO). SÃO PAULO, SP: Editora Ática S.A, 2022.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R. A Conquista Matemática 9º Ensino Fundamental – Anos Finais. São Paulo, SP: Editora FTD, 2022.

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO. Estado do Espírito Santo é o 1º do Brasil em porcentagem de investimentos em ciência e tecnologia. Governo do Estado do Espírito Santo, 2024. Disponível em: <https://www.es.gov.br/Noticia/estado-do-espírito-santo-e-o-1o-do-brasil-em-porcentagem-de-investimentos-em-ciencia-e-tecnologia>. Acesso em: 30 dez. 2024.

Orientações curriculares. Currículo ES, 2024. Disponível em: <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoescurriculares/>. Acesso em: 10 jun. 2025.

PROF. WARLES. Blog do Prof. Warles. Disponível em: <https://profwarles.blogspot.com/>. Acesso em: 29 dez. 2024.

TEIXEIRA, L. A. SuperAÇÃO! Matemática 9º ano: Manual do Professor. Moderna, 2022.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA. MatEssencial: Matemática essencial para o ensino médio. Imagem disponível em: <https://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/medio/img/zex15.png>. Acesso em: 26 jun. 2025.