PRÁTICAS EXPERIMENTAIS DE *Matemática* PARA O ENSINO FUNDAMENTAL



Governo do Estado do Espírito Santo
Secretaria de Estado da Educação
Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental

Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo

Andrea Guzzo Pereira
Secretário de Estado da Educação

Subsecretaria de Educação Básica e Profissional

Subsecretária de Estado de Educação Básica e Profissional

Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental - Geief

Rafaela Teixeira Possato de Barros
Gerente

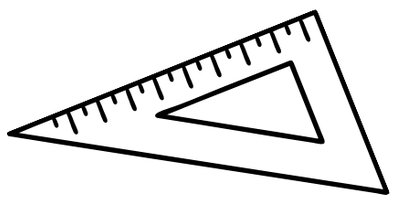
Débora Aparecida Furieri Matos
Subgerente

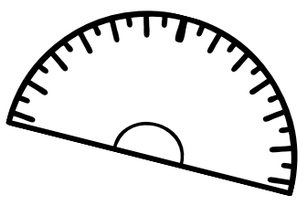
Euléssia Costa Silva
Guilherme Escarpini Helmer
Equipe responsável

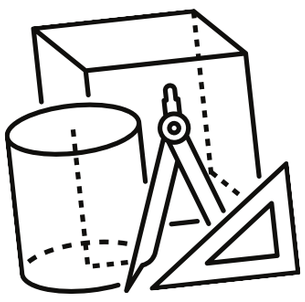
Adriana Lisboa Chaves Rezende
Antonio da Silva Pereira Neto
Euléssia Costa Silva
Guilherme Escarpini Helmer
Ivana Lima Brito
Júlio César Campos
Luara Zucolotto Afonso
Monalisa Di Paula Silva de Albuquerque
Roque Alves da Silva Júnior
Simone Maria Oliveira Gonçalves
Tatiana Gomes dos Santos Peterle
Equipe Técnica da Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental

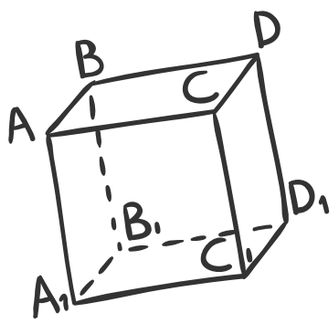
Adalzira Ribeiro da Hora
Sandra Mara Moura Machado
Equipe de Apoio da Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental

APRESENTAÇÃO

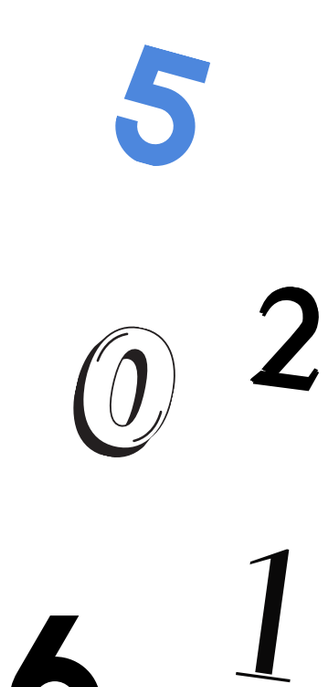














Prezado(a) professor(a),

A educação contemporânea tem sido profundamente marcada por desafios relacionados ao letramento matemático, contexto em que a experimentação matemática emerge como um imperativo educacional e se constitui fator essencial à vivência escolar e cidadã e à intervenção no mundo.

Pensando nisso, e com vistas a subsidiar o desenvolvimento da experimentação matemática do 6º ao 9º ano, a Gerência de Educação Infantil e Ensino Fundamental - Geief elaborou o documento *Práticas Experimentais de Matemática no Ensino Fundamental.*

O objetivo é que, a partir deste material, os(as) professores de Matemática desenvolvam o trabalho com práticas experimentais em pelo menos uma aula semanal desse componente curricular.

Assim, abarcando diferentes metodologias de ensino e considerando as distintas formas de aprender dos(as) estudantes, propomos o desenvolvimento de práticas que contribuam para a ampliação e o aprofundamento de importantes conhecimentos matemáticos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental.

Desse modo, professor(a), desejamos que estas práticas fomentem a sua práxis pedagógica voltada ao letramento matemático de seus(suas) estudantes, contando, para isso, com a sua preciosa contribuição, elemento essencial para o sucesso educacional pelo qual almejamos.

Bom trabalho!

Por que promover práticas experimentais de Matemática?

Professor(a), o dinamismo que marca a sociedade contemporânea exige práticas de ensino cada vez mais diversificadas, que atendam às diferentes expectativas e necessidades de aprendizagem dos(as) estudantes. Desse modo, concebemos que o trabalho com práticas experimentais de Matemática pode fomentar o(a):

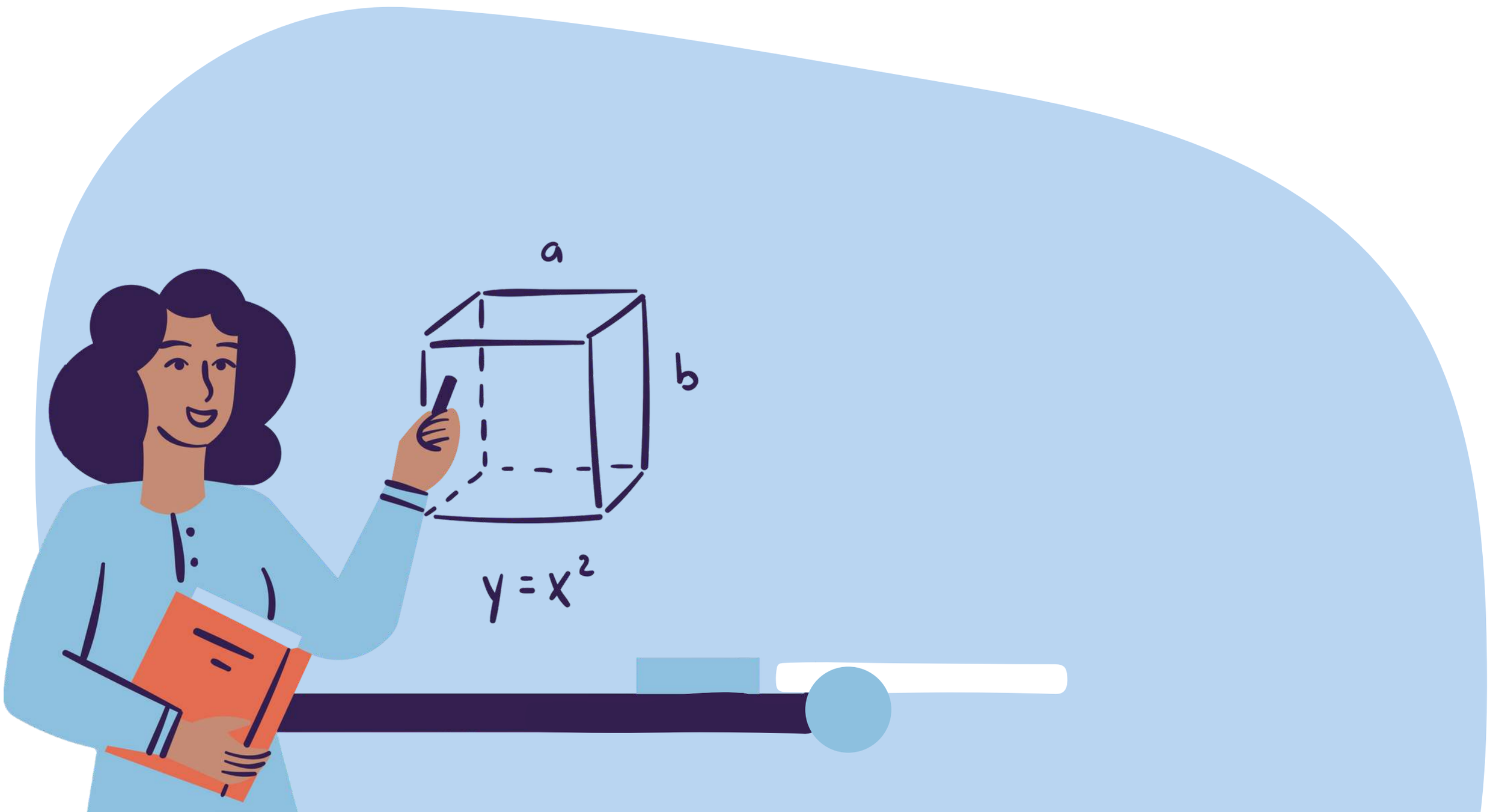
Desenvolvimento e consolidação de habilidades: a realização de experimentos contribui para o desenvolvimento de habilidades essenciais, sobretudo aquelas cujos resultados estão fragilizados no ensino fundamental anos finais. A abordagem prática, aliada à ludicidade, ajuda a ilustrar conceitos, evidenciando sua aplicabilidade em situações concretas, o que amplia as possibilidades de aprendizagem dos(as) estudantes.

Pensamento crítico: a experimentação matemática instiga o pensamento crítico, uma vez que, por meio de experiências, os(as) estudantes aprendem a formular perguntas e a levantar hipóteses, tendo a oportunidade de refletir, a partir da mediação do(a) professor(a), sobre a própria construção de conhecimentos.

Compreensão e aplicação da lógica matemática: os diferentes conhecimentos que compõem a vida cotidiana são fundamentalmente perpassados pela lógica matemática, o que torna imprescindível sua compreensão e aplicação pelos(as) estudantes.

Engajamento: A vivência com práticas experimentais pode motivar os(as) estudantes ao promover um contato mais dinâmico e lúdico com os diferentes conhecimentos, constituindo um contexto mais propício ao estreitamento do vínculo dos(as) estudantes com os seus estudos.

Combate ao estigma de que a matemática é difícil e inacessível: a cultura de que a matemática é difícil e inacessível se configura como um obstáculo ao processo educacional que urge ser mitigado. Ao vivenciar experiências com a matemática, intencionamos que os(as) estudantes percebam que é possível aprendê-la (e de diferentes formas).



As práticas experimentais de matemática estão estruturadas nas seguintes seções:



APRESENTAÇÃO E CONCEITUAÇÃO

Nesta seção, apresentamos a fundamentação teórica que embasa a prática proposta.



OBJETIVO DA AULA

Nesta seção, detalhamos o objetivo da aula, com vistas a contribuir para a orientação do trabalho docente.



UM POUCO DE HISTÓRIA

Nesta seção, apresentamos alguns momentos e personagens da história da matemática.



DESENVOLVIMENTO

Nesta seção, detalhamos os procedimentos metodológicos necessários à realização da prática, indicando as etapas de execução da prática experimental.



CONSIDERAÇÕES FINAIS E AVALIAÇÃO

Aqui, dispomos os pontos de diálogo necessários ao encerramento da execução da prática, com reflexões e possíveis conclusões que devem ser pensadas com os(as) estudantes.



JOGOS MATEMÁTICOS

Pensando na utilização de jogos analógicos e digitais como ferramentas de promoção da aprendizagem lúdica, as práticas experimentais são complementadas com jogos que versam sobre as temáticas das práticas propostas.

SUMÁRIO

CLIQUE NAS AULAS PARA ACESSÁ-LAS

PRÁTICA 1: CONSTRUINDO E CALCULANDO ÁREAS.....1

PRÁTICA 2: OFICINAS DE CONSTRUCÕES COM RÉGUA E COMPASSO.....11



PRÁTICA 1: CONSTRUINDO E CALCULANDO ÁREAS

Habilidade: (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Objetos de conhecimento:

- Área de figuras planas.

Expectativas de aprendizagem:

- Utilizar expressões de cálculo de área de triângulos e quadriláteros.
- Resolver problemas que envolvam o cálculo de área de triângulos, quadriláteros.

Materiais necessários:

- Régua.
- Tesoura.
- Lápis de cor ou canetas coloridas.
- Cartolina ou papel cartão.
- Malha quadriculada
- Materiais não convencionais para medir área. (folhas A4, post-it, palitos, folhas em outros tamanhos e etc).

APRESENTAÇÃO E CONCEITUAÇÃO

Esta prática experimental foi elaborada a partir da perspectiva de que os(as) estudantes devem se apropriar do conceito de área antes da apresentação de fórmulas prontas, a fim de entenderem o conceito e não apenas realizarem cálculos mecânicos.

Esta proposta inicia-se com uma situação-problema na qual diferentes grupos utilizam unidades de medida não padronizadas para determinar a área de uma mesma superfície. A diversidade de resultados impulsiona a discussão sobre a necessidade de padronização das unidades de medida.

Depois desse momento inicial, propomos o uso da malha quadriculada, para que os(as) estudantes possam compreender que a área corresponde à quantidade de unidades de figuras que pavimentem o plano - neste caso, quadrados - necessárias para revestir completamente uma superfície.

OBJETIVOS DA AULA

Ao final desta aula, os estudantes devem:

- Compreender e aplicar fórmulas de cálculo de área de figuras planas.
- Resolver problemas que envolvam a medição de terrenos e espaços físicos.
- Deduzir experimentalmente a fórmula da área do círculo a partir de recortes.
- Relacionar a matemática com situações do cotidiano de forma prática e visual.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Professor(a), conhecer a história da matemática ajuda os(as) estudantes a entenderem que os conceitos não surgiram prontos, mas foram desenvolvidos ao longo do tempo para resolver problemas reais. Desde a Antiguidade, a humanidade utiliza a geometria para resolver problemas práticos, como medir terrenos, construir edificações e orientar-se durante viagens. Egípcios e babilônios já empregavam conhecimentos geométricos para traçar ângulos, delimitar áreas e erguer monumentos.

Antigo Egito



Os egípcios formavam uma comunidade agrícola que dependia das cheias do Rio Nilo para fertilizar suas terras, porém, a cheia apagava o limite dos terrenos, necessidade que originou os estiradores de corda, que utilizavam cordas com nós igualmente espaçados para refazer a marcação para que a cobrança de impostos fosse realizada corretamente.

Papiros e tábuas de argila



No papiro de Ahmes e no papiro de Moscou, os egípcios sistematizaram problemas práticos de medição de terrenos e de figuras planas, como retângulos e triângulos. Além disso, também desenvolveram um método para o cálculo da área do círculo, em que aproximaram pi a 3,16. Já os babilônios produziram tábuas de argila datadas de aproximadamente 1800 a.E.C., com procedimentos para determinar áreas de quadrados, retângulos, triângulos e trapézios.

China



Na obra chinesa *Os Nove Capítulos da Arte Matemática,* elaborado nos séculos II e I a.E.C., encontram-se diversos problemas envolvendo o cálculo de áreas de terrenos agrícolas e figuras geométricas. Os métodos utilizados baseavam-se frequentemente na decomposição e na recomposição de figuras.

Índia



Textos conhecidos como Śulba Sūtras, elaborados entre os séculos VIII e II a.C., apresentam procedimentos geométricos empregados na construção de altares religiosos. Para a construção desses altares, era necessário transformar figuras preservando suas áreas.

Euclides e Arquimedes



Em sua obra *Os Elementos*, escrita por volta de 300 a.C., Euclides organizou o conhecimento geométrico em um sistema dedutivo. O conceito de área aparece de forma implícita quando ele demonstra que determinadas figuras possuem a mesma extensão superficial, ainda que apresentem formas diferentes. Arquimedes desenvolveu um método para determinar áreas de figuras curvas, conhecido como método da exaustão, que, séculos depois, originaria o cálculo integral.

O conceito de área hoje

A padronização das unidades de medida pelo SI definiu o metro quadrado (m^2) como unidade de medida padrão de área. A padronização resolveu um problema recorrente enfrentado pelas sociedades antigas: diferentes unidades produziam diferentes valores numéricos para uma mesma superfície, dificultando comparações e transações.

Sugestões de perguntas

- O que é área?
- No seu dia a dia, em que situações você usa o conhecimento sobre área?
- Como medimos uma área?
- Quais unidades de medida podemos utilizar?



DESENVOLVIMENTO

Professor(a), peça que os(as) estudantes formem grupos de 4 a 5 pessoas. Inicie a prática desafiando-os(as) a medirem a área de uma local da escola que tenha formato retangular, como a quadra, pátio, sala de aula, ou algum outro espaço da escola. Para medirem, disponibilize materiais não convencionais para medição, como folhas em diferentes tamanhos, post-it, palitos, dentre outros.

Peça que os(as) estudantes escolham um instrumento de medida para realizar a tarefa. Caso os(as) estudantes prefiram utilizar outros objetos, deixe que utilizem, desde que não sejam instrumentos de medidas padronizados, como régua, fita métrica ou trena.

Professor(a), todos os grupos irão medir o mesmo local. A intencão é que tenhamos diferentes valores para a mesma área.

Neste momento, deixe os(as) estudantes livres para medirem da forma como preferirem e peça que façam os registros do processo de medição, não apenas da medida encontrada, mas das estratégias utilizadas.



Imagem gerada por inteligência artificial.



Finalizado o processo de medição, volte à sala de aula com os(as) estudantes para a realização da sistematização dos resultados encontrados. Estruture no quadro uma tabela contendo o grupo, o instrumento de medida e a medições realizadas, como no exemplo a seguir. Peça que os(as) estudantes compartilhem com a turma as estratégias de medição desenvolvidas pelo grupo, explicando o que significa a medida obtida.

Grupo	Instrumento de medida	Medida	Unidade de medida
Grupo 1	Folha A4	500	folhas
Grupo 2	Palitos de churrassco	450	palitos²
Grupo 3	Passos	240	passos²

Com a tabela preenchida no quadro, pergunte aos(às) estudantes o que eles(as) podem explicar sobre a área da quadra e sobre o motivo de as medidas serem todas diferentes.

Algumas perguntas podem ajudar a conduzir esse diálogo:

- Todos mediram o mesmo espaço?
- Alguém mediu errado?
- Qual grupo está correto?
- Por que apareceram números tão diferentes?



DESENVOLVIMENTO

Neste momento, permita que os(as) estudantes debatam, sempre mediando as discussões. É esperado que eles(as) cheguem à conclusão de que as medidas são diferentes pois os instrumentos de medidas utilizados foram diferentes. Dialogue com os(as) estudantes: o número por si só não possui significado; precisa de uma unidade de medida para dar sentido à medida. Por isso, existe a necessidade de uma unidade de medida padrão.

Em seguida, distribua uma malha quadriculada e pedaços de barbante do mesmo tamanho para os grupos, para que comparem as unidades de medida utilizadas no momento anterior com o barbante, para, assim, terem uma unidade de medida padrão.

Depois de comparar a unidade de medida utilizada na primeira parte da prática com a unidade de medida padronizada (o barbante), oriente os(as) estudantes a representarem a área medida na malha quadriculada, utilizando um quadradinho pela quantidade de vezes que utilizaram o barbante, de modo que todos tenham aproximadamente a mesma figura representada na malha quadriculada.

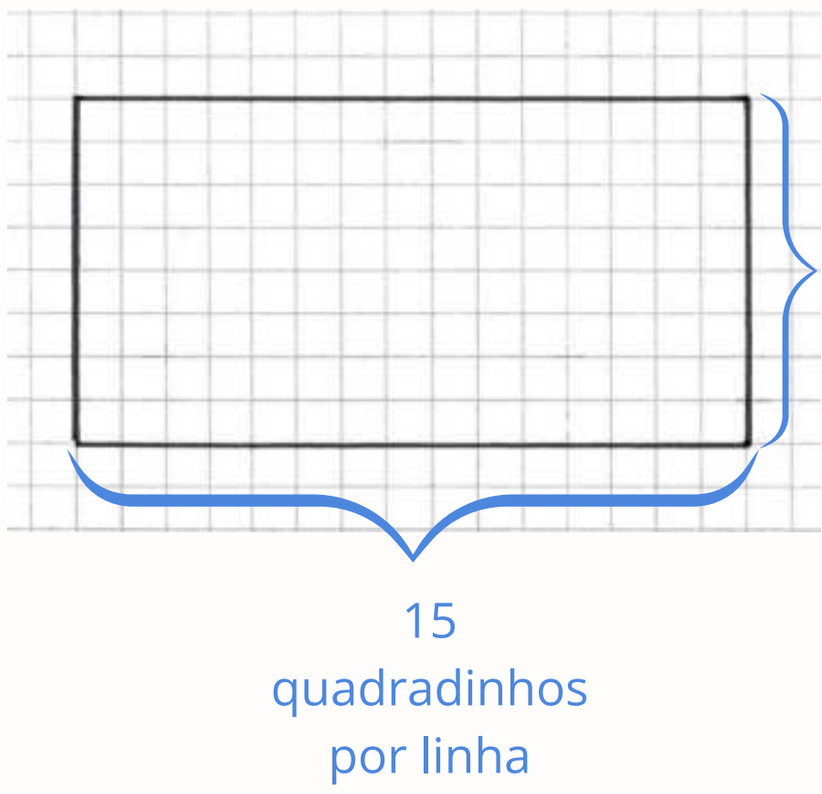
Explique aos(às) estudantes o motivo da padronização e a facilidade que essa padronização proporciona para a sociedade. Explique que a unidade de medida padrão para a medição da área é o quadrado, devido ao fato de seus lados serem congruentes, facilitando os cálculos.

Professor(a), utilize as representações feitas na malha quadriculada para deduzir com os(as) estudantes a fórmula do cálculo de área de um retângulo qualquer.

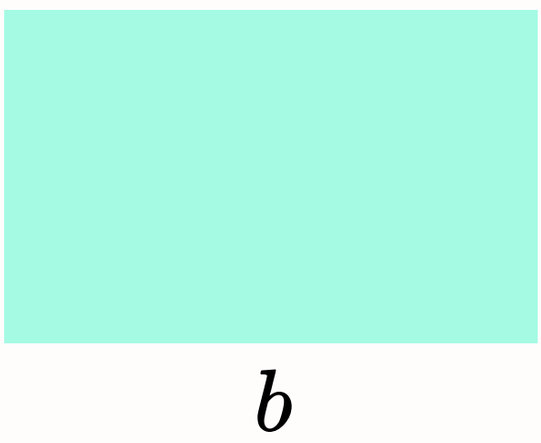
A partir das representações dos(as) estudantes, estabeleça com eles(as) a relação entre as linhas e colunas. Todas as linhas possuem a mesma quantidade de quadradinhos, assim como todas as colunas possuem quantidades iguais de quadradinhos.

Podemos ver no exemplo ao lado que temos:

- 8 linhas com 15 quadradinhos em cada.
- 15 colunas com 8 quadradinhos em cada.



Desse modo, para calcular a quantidade de quadradinhos, ou seja, a área do retângulo, basta multiplicar a quantidade de colunas pelas linhas. Assim, temos a fórmula da área do retângulo:



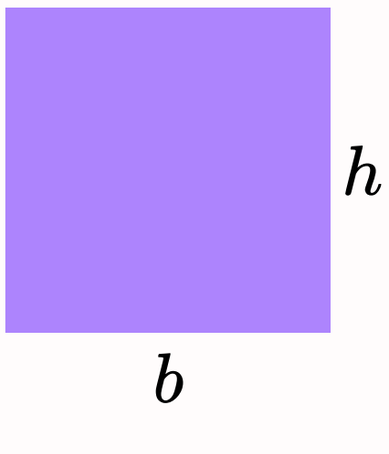
$$A = b \times h$$

A partir da fórmula da área do retângulo, conseguimos entender as fórmulas de cálculo de diversas figuras, como: o quadrado, o paralelogramo, o triângulo e o círculo.

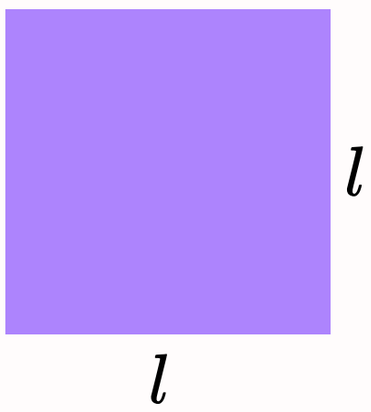


Quadrado

Sabendo que o quadrado é um retângulo, podemos calcular a área com a fórmula do retângulo.



Sabemos também que o quadrado possui todos os lados congruentes, ou seja, b = h. Sendo assim, chamaremos o lado do quadrado de l.



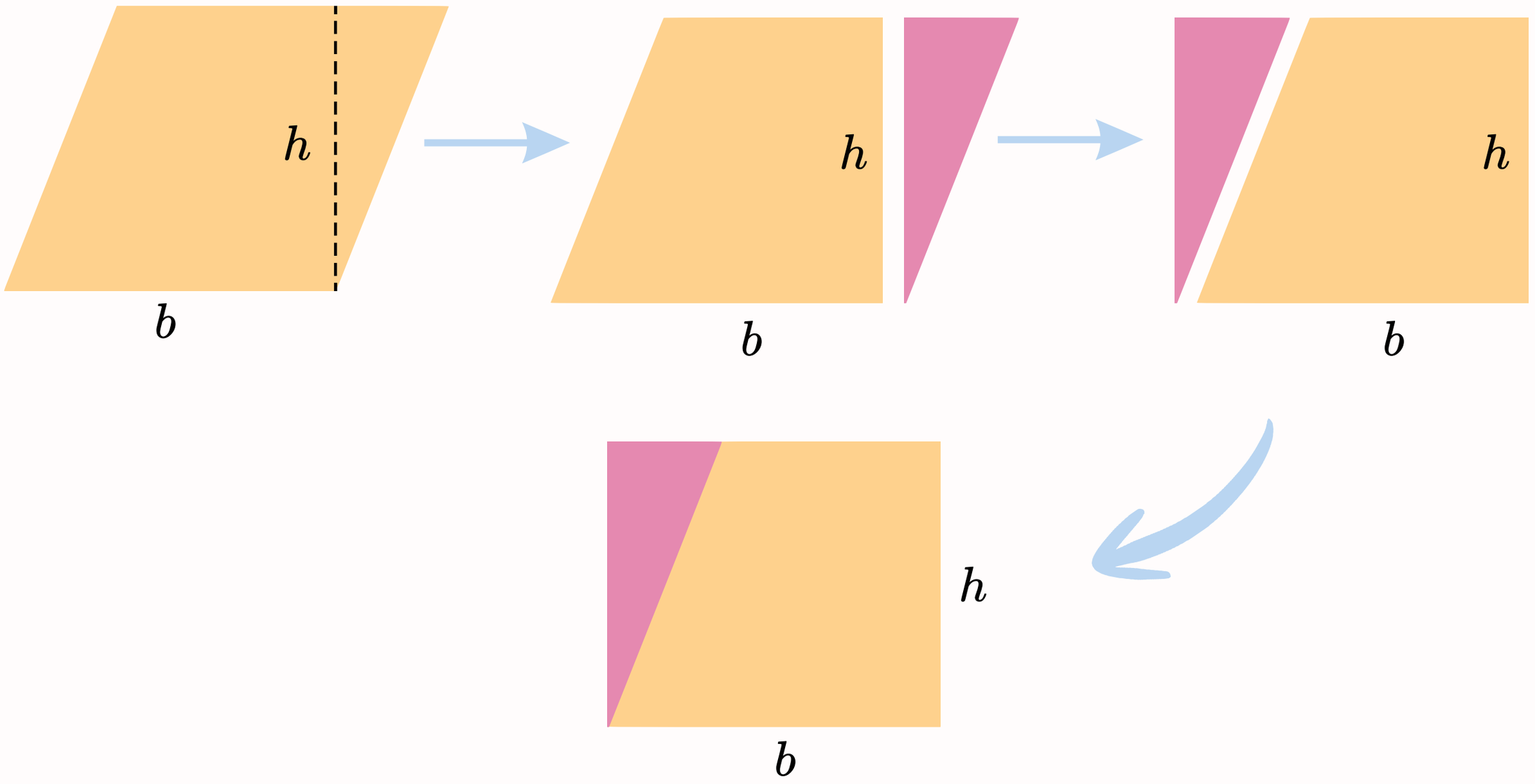
Utilizando a fórmula do retângulo e multiplicanbdo base por altura, temos que:

$$A = l \times l$$

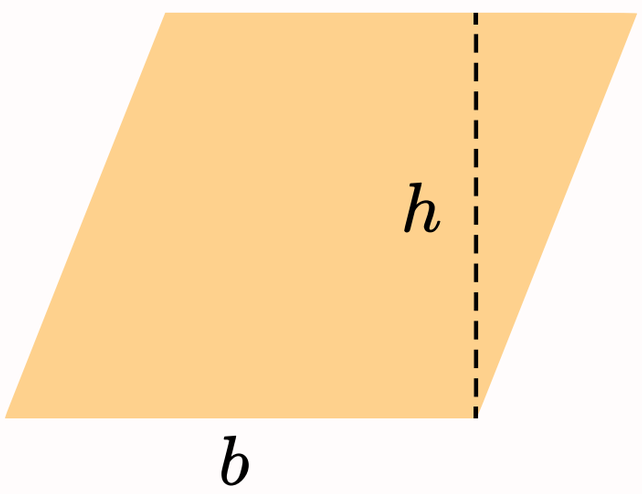
$$A = l^2$$

Paralelogramo

O paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos e congruentes. Para o cálculo de sua área, podemos utilizar a fórmula da área do retângulo, pois, com uma simples manipulação, formamos um retângulo a partir do paralelogramo. Vejamos:



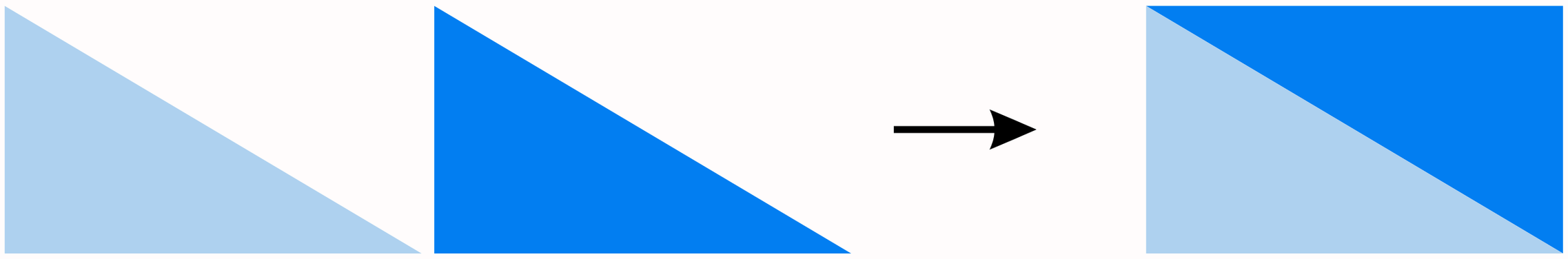
Portanto, a área do paralelogramo é dada pela fórmula:



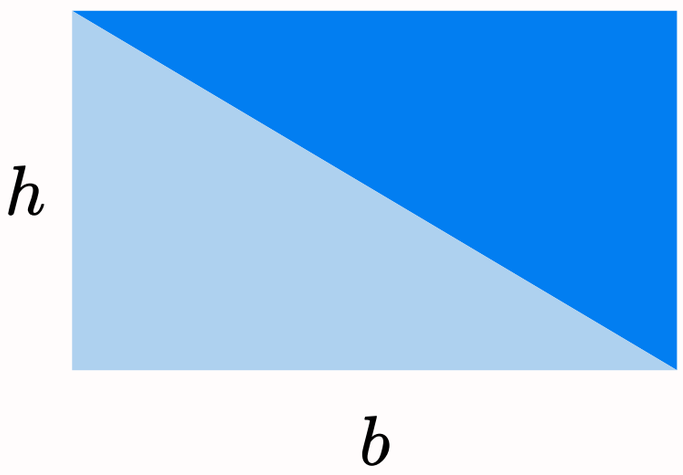
$$A = b \times h$$

Triângulo

O triângulo é um polígono de três lados. Quando unimos dois triângulos por um de seus lados, formamos um quadrilátero.



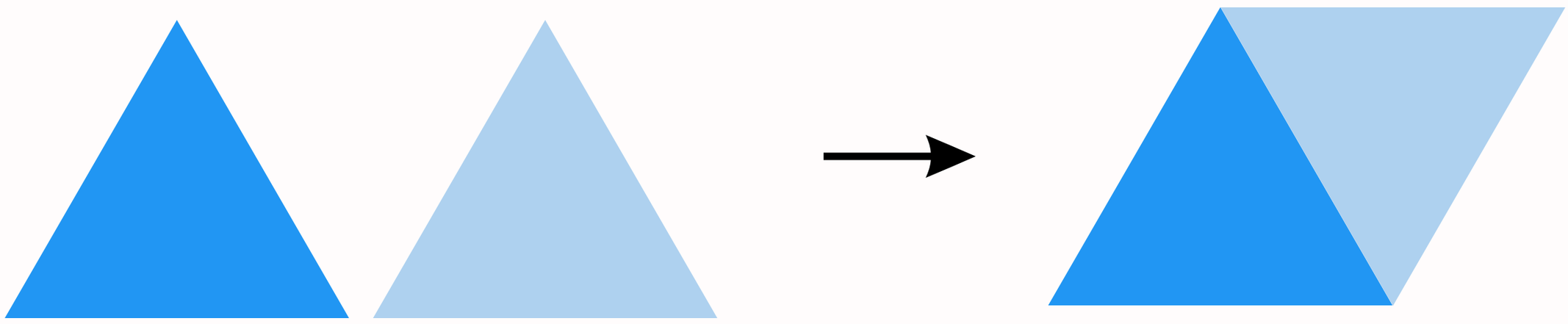
Utilizando dois triângulos retângulo, formamos um retângulo, como demonstrado a cima. Calculando a área do retângulo, temos: $A = b \times h$



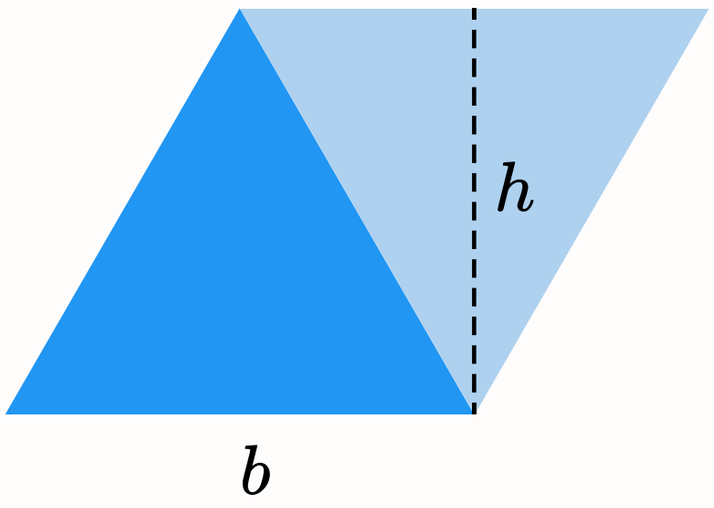
Como o retângulo é formado por dois triângulos, para calcular a área deles, basta dividir a área do retângulo por 2, então, a fórmula da área do triângulo é:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Isso não é válido somente para o triângulo retângulo. Vejamos outro exemplo com o triângulo equilátero.



Com dois trângulos equiláteros, formamos um paralelogramo. Cálculando a área do paralelogramo, temos: $A = b \times h$



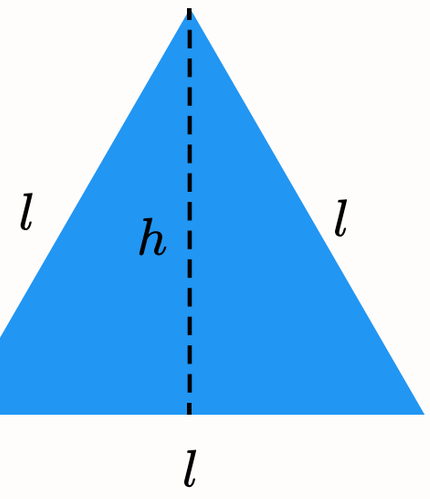
Como o paralelogramo é formado por dois triângulos, para calcular a área deles, basta dividir a área do paralelogramo por 2. Assim, a fórmula da área do triângulo é:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

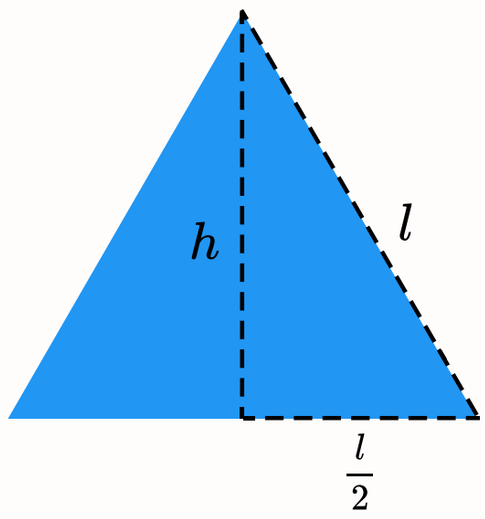


DESENVOLVIMENTO

Diferentemente do triângulo retângulo, a altura do triângulo equilátero não é um de seus lados. Podemos calcular a altura em função do lado do triângulo. Como todos os lados são congruentes, vamos chamá-los de l. Dessa forma, temos:



Utilizando o teorema de Pitágoras, conseguimos encontar o valor de h



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = h^2$$

$$\frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{4h^2}{4}$$

$$3l^2 = 4h^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3l}{4}^2}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Substituindo esse valor na fórmula:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

$$A = \frac{l \times \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}$$

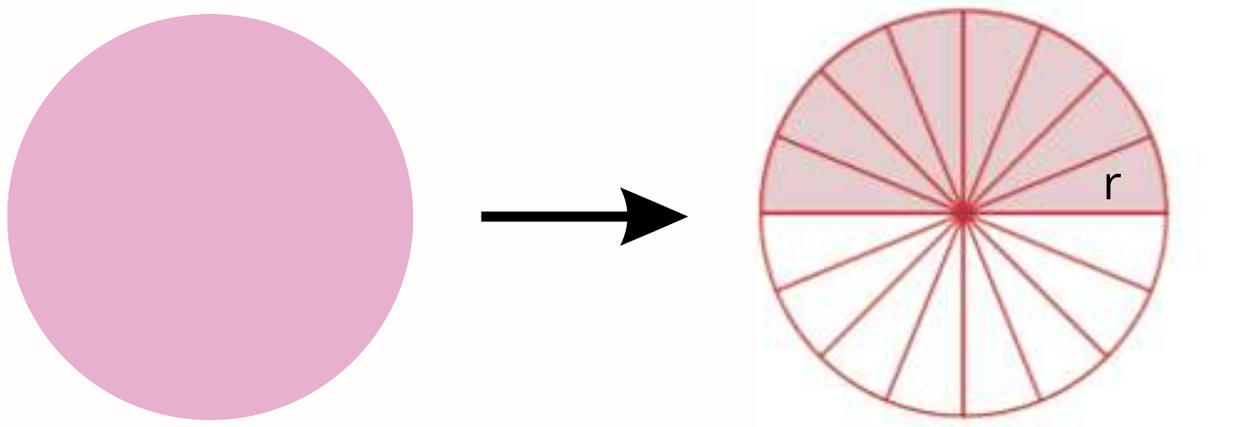
$$A = \frac{l^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$A = l^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

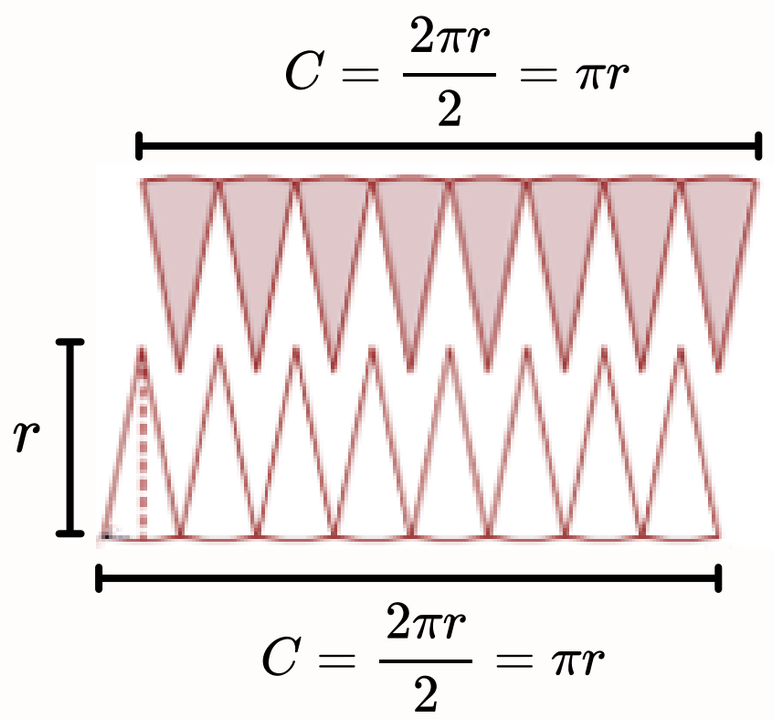
Círculo

A partir de um círculo qualquer, dividindo-o em 16 partes iguais a partir de seu centro, temos:



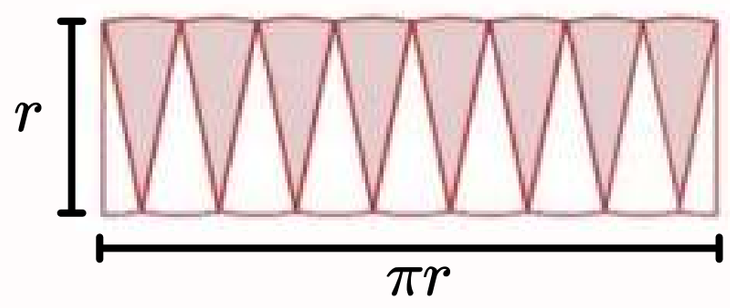
O comprimento da circunferência é dado pela fórmula: $C = 2\pi r$

Podemos, agora, separar as fatias:



Observe que a parte superior, das fatias coloridas, equivale à metade do comprimento do círculo, da mesma forma, a parte inferior, das fatias que não estão coloridas, também equivale à metade do comprimento da circunferência. Observe também que a altura da fatia equivale ao raio do círculo.

Por fim, ao encaixarmos as partes superior e inferior, temos aproximadamente um retângulo, de base πr e altura r.



Utilizando a fórmula do cálculo de área do retângulo, temos que a área do círculo se dá pela fórmula:

$$A = b.h$$
$$A = \pi r.r$$

$$\boxed{A = \pi r^2}$$

Professor(a), realize essa sistematização das fórmulas sempre em diálogo com os(as) estudantes, intigando-os(as) a pensarem em soluções para demostrartem as fórmulas de cálculo.



CONSIDERAÇÕES FINAIS E AVALIAÇÃO

Professor(a), nesta atividade prática, os(as) estudantes compreenderam o conceito de área, não apenas aprenderam a utilizar as fórmulas, mas demostraram geométricamente eles.
Para fins de avaliação, revise com a turma os principais pontos trabalhados, sanando dúvidas podem surgir sobretudo quanto às demonstrações das fórmulas de área de alguns poligonos.
Avalie também a participação dos(as) estudantes.



JOGOS MATEMÁTICOS

Professor(a), elaboramos um jogo para a consolidação das aprendizagens pelos(as) estudantes. Acesse-o por meio do link abaixo:

https://projetosef2.github.io/area/

Regras do Jogo: Construtor de Terrenos

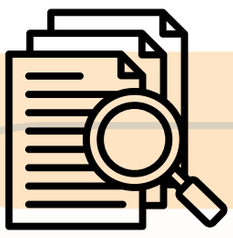
Objetivo:
Construa terrenos com diferentes formas geométricas, ajustando suas medidas para que a área fique mais próxima o possível da área desejada.

Como Jogar:
1. Digite seu nome e clique em *Iniciar*.
2. Em cada fase, será exibida:
- uma forma geométrica;
- uma imagem ilustrativa;
- uma descrição com a área que deve ser atingida.
3. Preencha os campos com as medidas indicadas.
4. Clique em *Testar Construção* para calcular e visualizar seu terreno.

Pontuação:
Você receberá de 0 a 3 estrelas por fase, conforme a precisão do cálculo:
- Erro ≤ 1 m² → ⭐⭐⭐
- Erro ≤ 3 m² →⭐⭐
- Erro ≤ 6 m² → ⭐
- Erro > 6 m² → Nenhuma estrela

Avanço:
- Ao acertar a área com precisão suficiente (pelo menos 1 estrela), o botão Próxima Fase será liberado.
- Ao final de todas as fases, você poderá gerar um relatório em PDF com seu desempenho.

Finalização:
- No fim do jogo, você verá uma mensagem personalizada de parabéns com base na pontuação total.



REFERÊNCIAS

HELMER, Guilherme Escarpini. **Material educativo sobre áreas e perímetro no âmbito do clube de matemática e em oficina de formação de professores**. 2022. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2022.

https://www.onlinemathlearning.com/area-circle-nys.html

https://youtu.be/-UBLutigNMM?si=LTZFY0imjRUCpaMD



JOGOS MATEMÁTICOS

Pontuação:
Você receberá de 0 a 3 estrelas por fase, conforme a precisão do cálculo:

- Erro ≤ 1 m² → ⭐⭐⭐
- Erro ≤ 3 m² →⭐⭐
- Erro ≤ 6 m² → ⭐
- Erro > 6 m² → Nenhuma estrela

Avanço:

- Ao acertar a área com precisão suficiente (pelo menos 1 estrela), o botão *Próxima Fase* será liberado.
- Ao final de todas as fases, você poderá gerar um relatório em PDF com seu desempenho.

Finalização:

- No fim do jogo, você verá uma mensagem personalizada de parabéns com base na sua pontuação total.



REFERÊNCIAS

https://www.onlinemathlearning.com/geometry-help.html#Circles

https://www.onlinemathlearning.com/area-circle-nys.html

https://youtu.be/-UBLutigNMM?si=LTZFY0imjRUCpaMD

PRÁTICA 2: OFICINAS DE CONSTRUCÕES COM RÉGUA E COMPASSO

Habilidade: (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

Objeto de conhecimento: Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

Expectativas de aprendizagem:
Construir mediatriz e bissetriz.
Construir ângulos de 90°, 60°, 45° e 30°.
Construir polígonos regulares.

Materiais necessários:

- Computadores.
- Papel milimetrado ou caderno de cartografia.
- Régua e lápis.
- Canetas coloridas.
- Quadro ou projetor.
- Compasso e transferidor.

APRESENTAÇÃO E CONCEITUAÇÃO

A régua e o compasso são ferramentas fundamentais na geometria clássica, não apenas por sua simplicidade, mas também pela profundidade de conceitos que possibilitam explorar. Essas ferramentas permitem a construção de figuras geométricas com precisão, servindo como base para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade no campo da matemática. Uma das principais importâncias da régua e do compasso reside na sua capacidade de facilitar a visualização de propriedades geométricas. Ao construir um triângulo equilátero ou traçar uma bissetriz, por exemplo, os(as) estudantes podem observar diretamente as relações entre os elementos geométricos. Essa abordagem prática ajuda a solidificar conceitos teóricos, tornando-os mais acessíveis e compreensíveis.

Outro aspecto relevante é o papel histórico dessas ferramentas no desenvolvimento da matemática ao longo dos séculos. Civilizações antigas, como os babilônios e os gregos, utilizaram a régua e o compasso para resolver problemas complexos relacionados à arquitetura, astronomia e arte. Por meio dessas construções simples, eles foram capazes de desenvolver teorias que ainda hoje fundamentam nosso entendimento sobre geometria. Por fim, as construções geométricas com régua e compasso também incentivam a exploração criativa. Ao dominar essas técnicas básicas, os(as) estudantes podem experimentar novas formas e padrões, levando à compreensão de conceitos mais avançados, como simetria e proporção áurea.

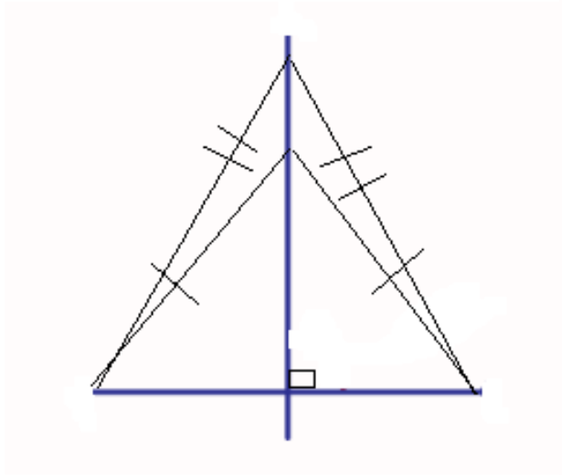


APRESENTAÇÃO E CONCEITUAÇÃO

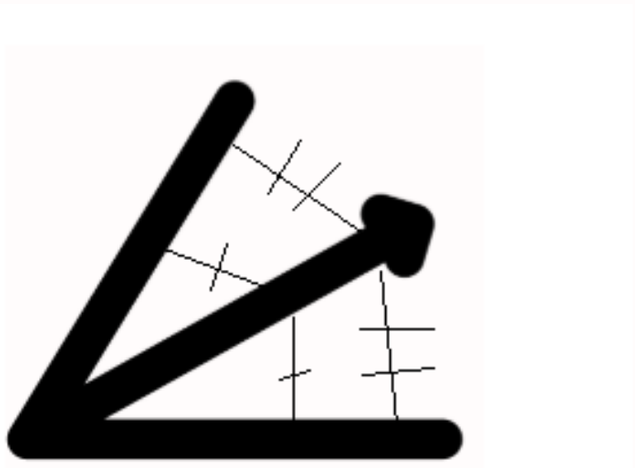
Professor(a): nesta aula prática, vamos construir figuras geométricas básicas no plano. Usaremos instrumentos tradicionais de desenho como régua e compasso e utilizaremos o transferidor apenas para conferir as construções. Vamos construir mediatrizes, bissetrizes, ângulos notáveis (90°, 60°, 45° e 30°) e alguns polígonos regulares.

Para isso, temos aqui, de forma bem simplificada, estes conceitos matemáticos.

- **Mediatriz**: a mediatriz de um segmento é a linha reta que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a ele. Cada ponto da mediatriz é equidistante aos extemos do segmento.

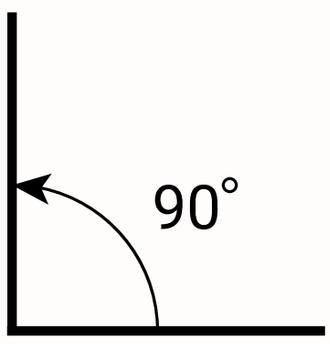


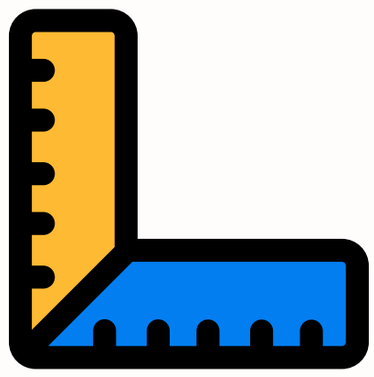
- **Bissetriz**: a bissetriz de um ângulo é a linha que divide o ângulo em dois ângulos iguais. Cada ponto da bissetriz é equidistante dos dois lados do ângulo.



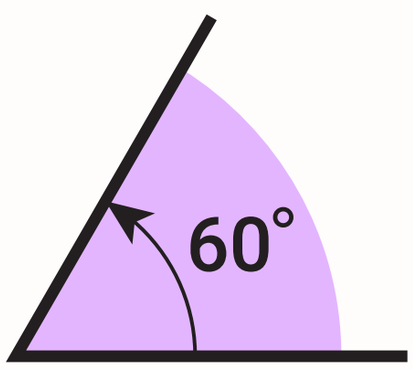
Ângulos notáveis (90°, 60°, 45° e 30°): esses ângulos são chamados de *notáveis* porque aparecem frequentemente em construções geométricas e têm propriedades especiais, que facilitam a criação de outras formas.

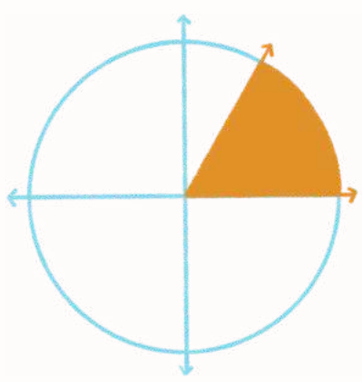
Ângulo de 90°: também conhecido como *ângulo reto*, é fundamental na construção de quadrados e retângulos e na definição de perpendicularidade. No cotidiano, é usado em construções de edifícios, móveis e na criação de layouts de espaços.





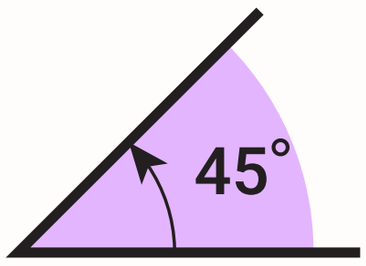
Ângulo de 60°: surge naturalmente na construção de triângulos equiláteros, em que todos os ângulos são de 60°. É usado em design de objetos, como em padrões de mosaicos, e na engenharia de estruturas triangulares.





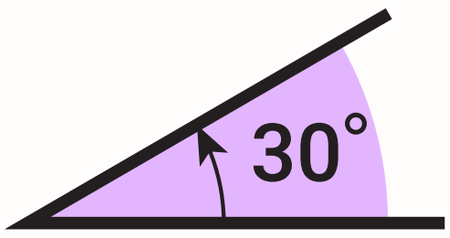
APRESENTAÇÃO E CONCEITUAÇÃO

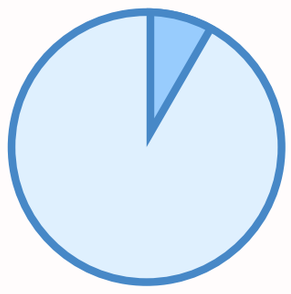
Ângulo de 45°: corresponde à metade de um ângulo reto (90°) e aparece naturalmente em triângulos retângulos isósceles, nos quais os dois ângulos agudos medem 45°. No dia a dia, é muito utilizado em cortes de materiais, como madeira, vidro e molduras, além de estar presente em projetos de arquitetura, desenho técnico e construção civil.





Ângulo de 30°: aparece na construção de triângulos equiláteros e é metade de um ângulo de 60°, sendo útil em várias construções geométricas. É utilizado em design de interiores, na criação de rampas e em projetos de engenharia.





Polígonos regulares: um polígono regular tem todos os lados e ângulos iguais. Construir polígonos regulares, como triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos e hexágonos, é essencial para entender simetrias e padrões geométricos. No cotidiano, esses polígonos são usados em design gráfico, arquitetura, arte e na criação de objetos decorativos.

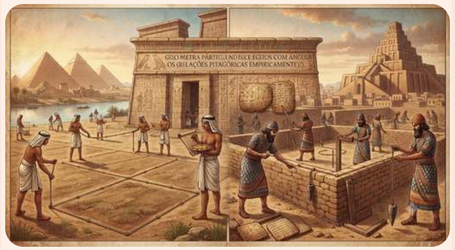
OBJETIVO DA AULA

Desenvolver a capacidade dos(as) estudantes de realizar construções geométricas com precisão, utilizando instrumentos de desenho e/ou softwares de geometria dinâmica, por meio da construção de mediatrizes, bissetrizes, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30°, além de polígonos regulares, promovendo a compreensão das propriedades geométricas envolvidas nessas construções.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Professor(a), conhecer a história da matemática ajuda os(as) estudantes a entenderem que os conceitos não surgiram prontos, mas foram desenvolvidos ao longo do tempo para resolver problemas reais. Desde a Antiguidade, a humanidade utiliza a geometria para resolver problemas práticos, como medir terrenos, construir edificações e orientar-se durante viagens. Egípcios e babilônios já empregavam conhecimentos geométricos para traçar ângulos, delimitar áreas e erguer monumentos.

Egito e Mesopotâmia (c. 3000 a.C.)



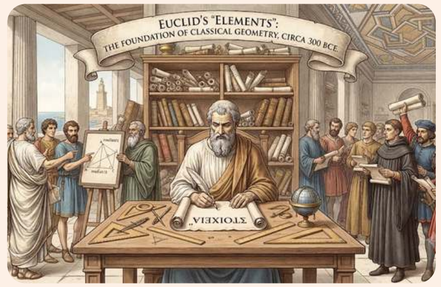
Egípcios e babilônios utilizavam conhecimentos geométricos para medir terras, construir templos e organizar cidades. Os ângulos e as formas geométricas eram empregados de maneira prática, sem demonstrações formais. Há evidências de que relações equivalentes ao Teorema de Pitágoras já eram utilizadas na construção de ângulos retos e no alinhamento de edificações, mostrando que as primeiras construções geométricas surgiram da observação e da experiência.

Grécia Antiga (séculos VI–IV a.C.)



Os gregos transformaram a geometria de um conjunto de técnicas práticas em uma ciência baseada no raciocínio lógico. Matemáticos como Tales de Mileto e Pitágoras passaram a investigar propriedades das figuras e dos ângulos, buscando justificar os procedimentos por meio de demonstrações. Nesse período, surgiram estudos sobre triângulos, polígonos e relações entre ângulos, estabelecendo as bases teóricas que permitiriam o desenvolvimento das construções geométricas clássicas.

Euclides e a sistematização da geometria



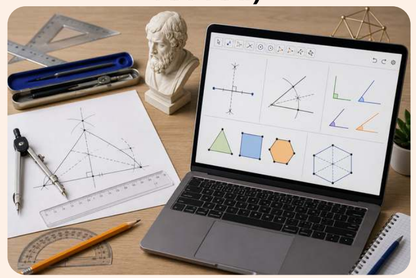
Por volta de 300 a.C., Euclides escreveu *Os Elementos*, obra que organizou o conhecimento geométrico da época por meio de definições, postulados e teoremas. O livro é considerado uma das obras mais influentes da história da matemática. Muitas das construções estudadas atualmente, como mediatrizes, bissetrizes, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30°, têm origem nesses procedimentos clássicos.

O Desenvolvimento da Geometria Moderna (séculos XVII–XIX)



Com o avanço da matemática, estudiosos como Georg Mohr, Lorenzo Mascheroni, Leonhard Euler e Carl Friedrich Gauss ampliaram os conhecimentos geométricos e investigaram novas formas de construção. A geometria passou a ser aplicada não apenas à arquitetura e à engenharia, mas também à astronomia, à navegação e à cartografia, ampliando sua importância científica.

A Geometria Dinâmica e as Tecnologias Digitais (séculos XX–XXI)



Atualmente, as construções geométricas podem ser realizadas tanto com instrumentos tradicionais quanto com softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra. Essas ferramentas permitem construir mediatrizes, bissetrizes, ângulos notáveis e polígonos regulares de forma rápida e precisa. Além disso, possibilitam movimentar pontos e observar propriedades que permanecem invariáveis, favorecendo a compreensão dos conceitos geométricos.

A Geometria hoje

O trabalho com ângulos e polígonos está presente em diversas áreas profissionais e tecnológicas, tais como: alinhamentos e simetrias no projeto de casas, edifícios, pontes e telhados, criação de logotipos, animações, jogos digitais e modelagem 3D baseada em formas geométricas e polígonos, planejamento de estruturas, máquinas e peças que exigem precisão geométrica, dentre outros.

Sugestões de perguntas

- Onde podemos encontrar ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° em nossa escola ou em nossa cidade?
- Quais profissões dependem diretamente da precisão geométrica?
- A tecnologia substitui a necessidade de aprender construções com régua e compasso?
- É mais importante saber construir uma figura ou compreender as propriedades que justificam sua construção?

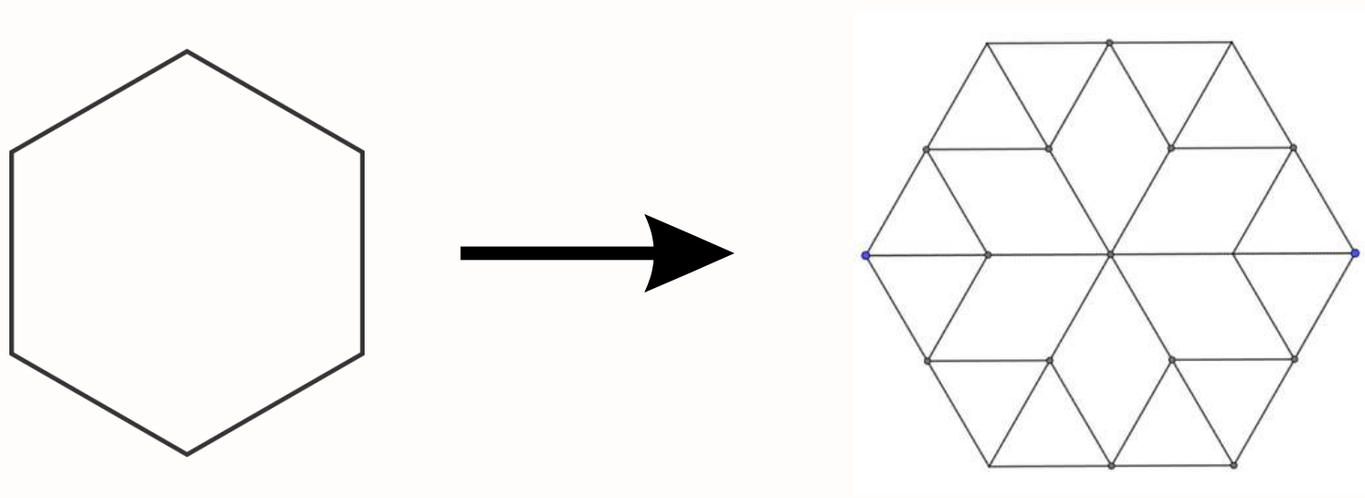


DESENVOLVIMENTO

Professor(a), revise com os(as) estudantes os conceitos de ângulos, polígonos regulares, bissetriz de um ângulo e mediatriz de um segmento. Esses conceitos estão retratados no tópico ***Apresentação e conceituação.***

Proponha esta situação aos(às) estudantes:

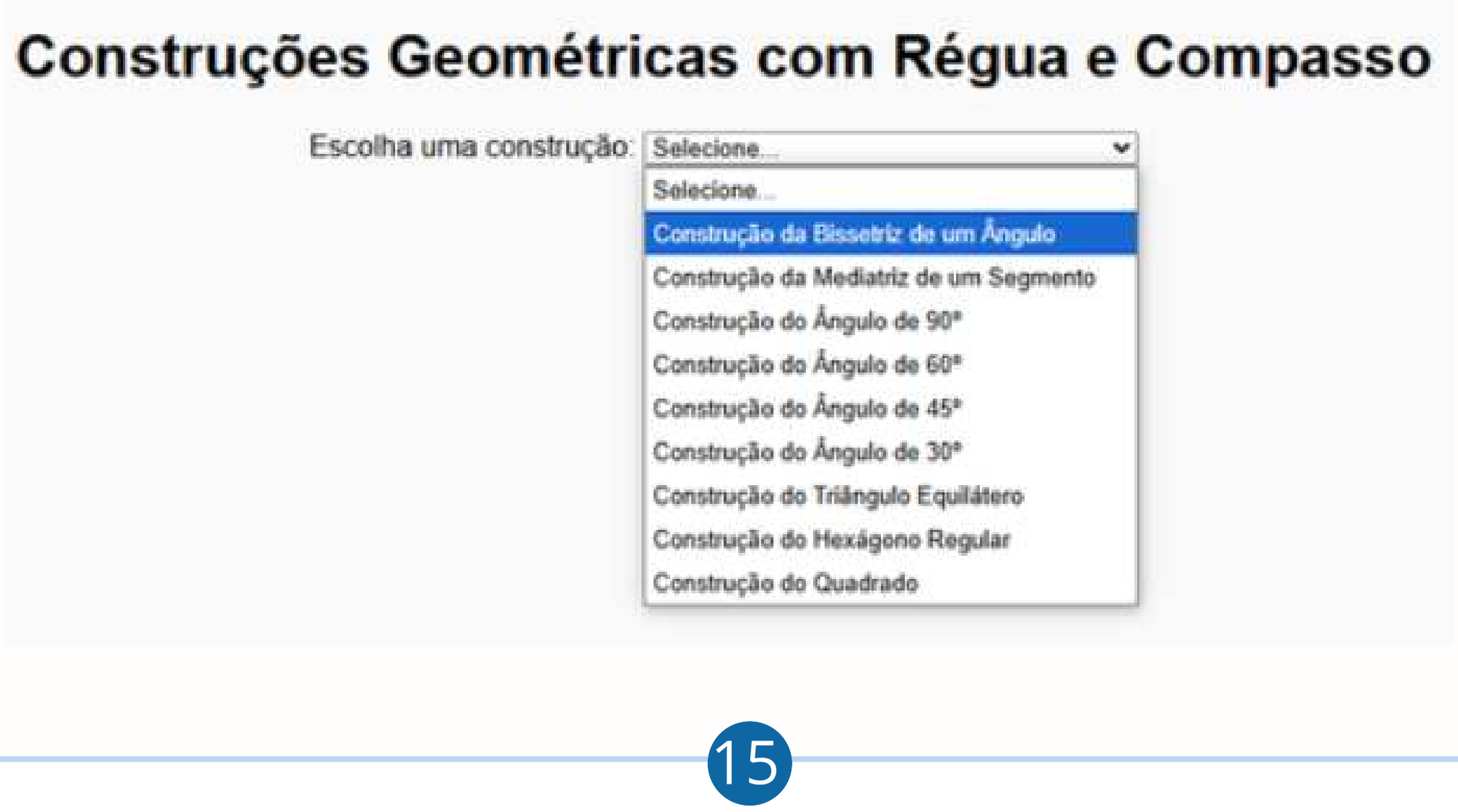
> José Luís é um estudante do 8º ano. Durante a semana de projetos escolares, sua turma recebeu a tarefa de criar uma mandala geométrica, utilizando apenas polígonos regulares, como triângulos equiláteros, quadrados, hexágonos e pentágonos. Seu grupo ficou responsável pela mandala que tem a forma hexagonal. No entanto, ao organizar seu material, José Luís percebeu que esqueceu seu transferidor em casa. Ele tinha em mãos apenas uma folha em branco, um lápis, uma régua e um compasso. Sabendo que a Mandala será exposta na Feira de Matemática da escola, ele precisa encontrar uma forma de construir o hexágono regular para depois construir a Mandala, sem o auxílio do transferidor para medir ângulos.



Separe os(as) estudantes em grupos, forneça a eles folhas de papel A4 ou similar, régua, compasso e lápis e peça que tentem construir o hexágono apenas com esse material. Dê a eles 10 minutos para tentarem. Após esse período, passe de grupo em grupo analisando os lados e os ângulos do hexágono com o auxílio do transferidor.

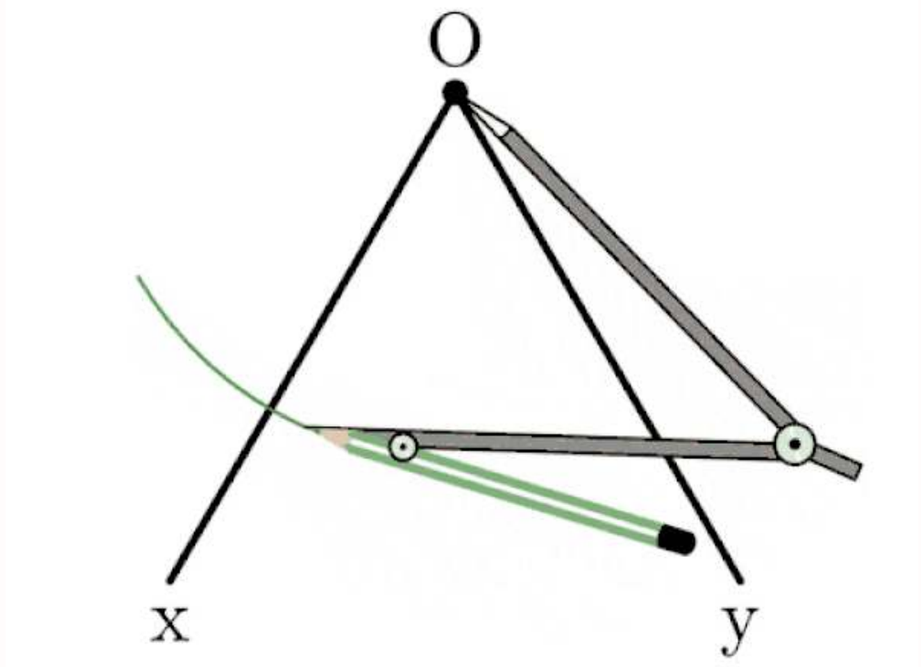
Professor(a), elaboramos um guia com passo a passo para as construções com régua e compasso de todos os conceitos que abordamos. Use um projetor para que todos os grupos possam visualizar esse passo a passo que já vem ilustrado e com animação em alguns casos. Dê um tempo para que os(as) estudantes possam realizar cada construção. Esta etapa é fundamental para a prática experimental. O guia pode ser acessado pelo link ou elo QR code:

https://projetosef2.github.io/rcom/.

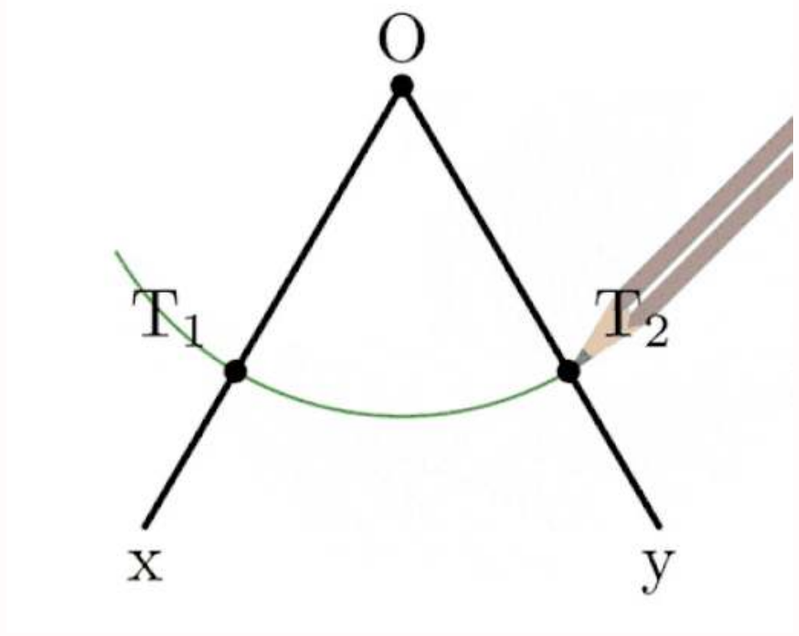


Construções Geométrica com régua e compasso

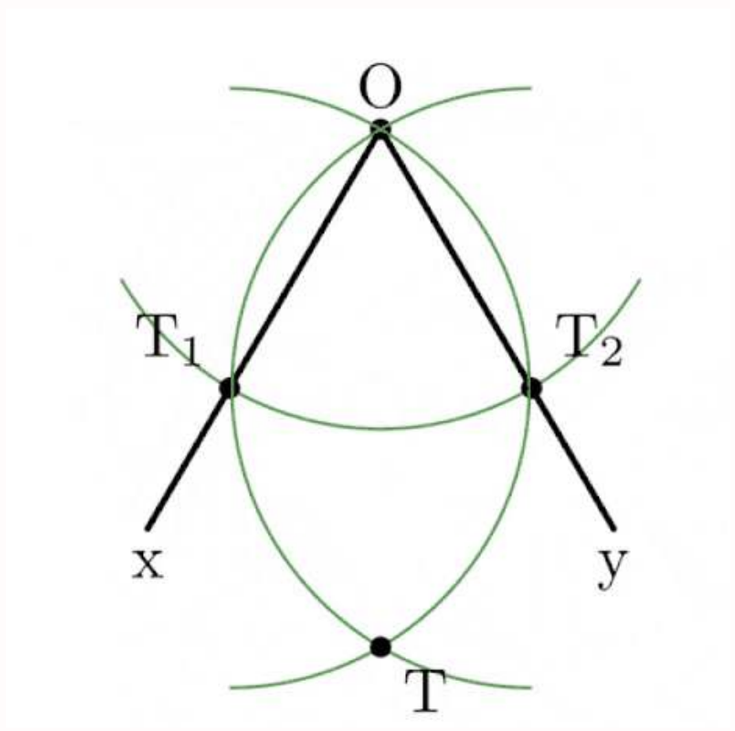
Construção da bissetriz de um ângulo:



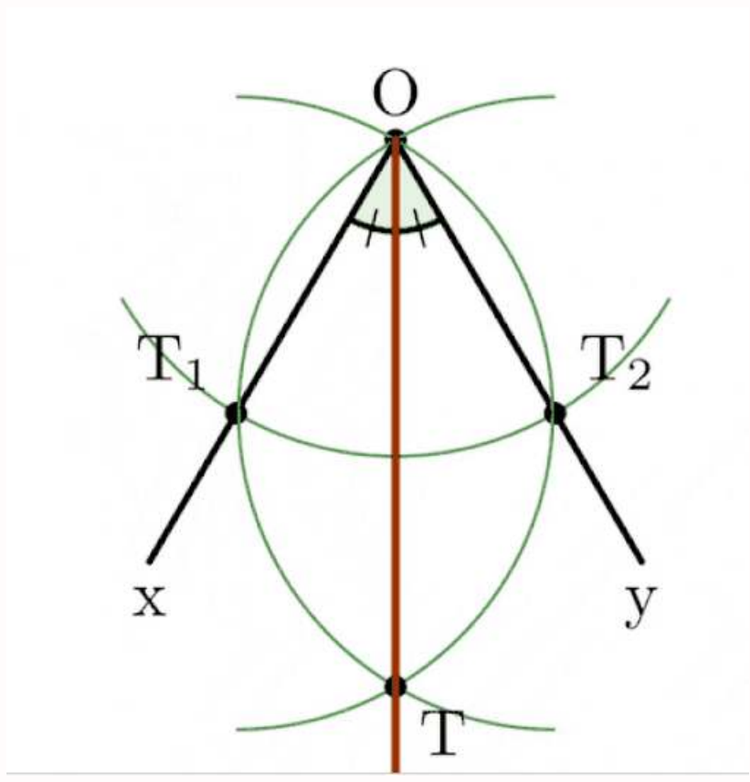
1.Trace um ângulo qualquer e nomeie seus pontos: O (Vértice do ângulo), x e y (extremidades dos lados do ângulo).



2.Com a ponta seca do compasso em O, trace um arco que intercepte os dois lados do ângulo. Marque os pontos de interseção com T1 (no lado Ox) e T2 (No lado Oy.

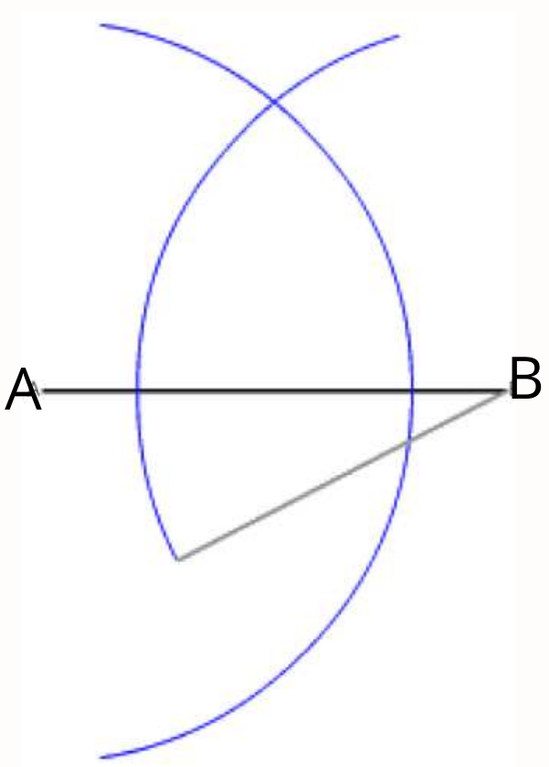


3.Posicione a ponta seca do compasso em T1 e trace um arco dentro do ângulo. Sem alterar a abertura do compasso, repita o processo com a ponta em T2, de modo que os dois arcos se cruzem em um ponto T.

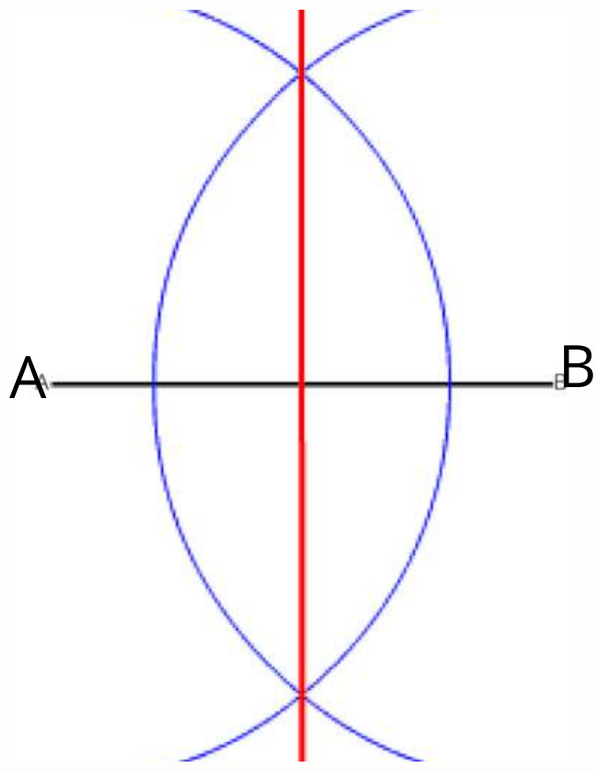


4.Desenhe a bissetriz: use a régua para unir o ponto O (vértice do ângulo) ao ponto T (interseção dos arcos). A linha OT será a bissetriz do ângulo.

Construção da mediatriz de um segmento:

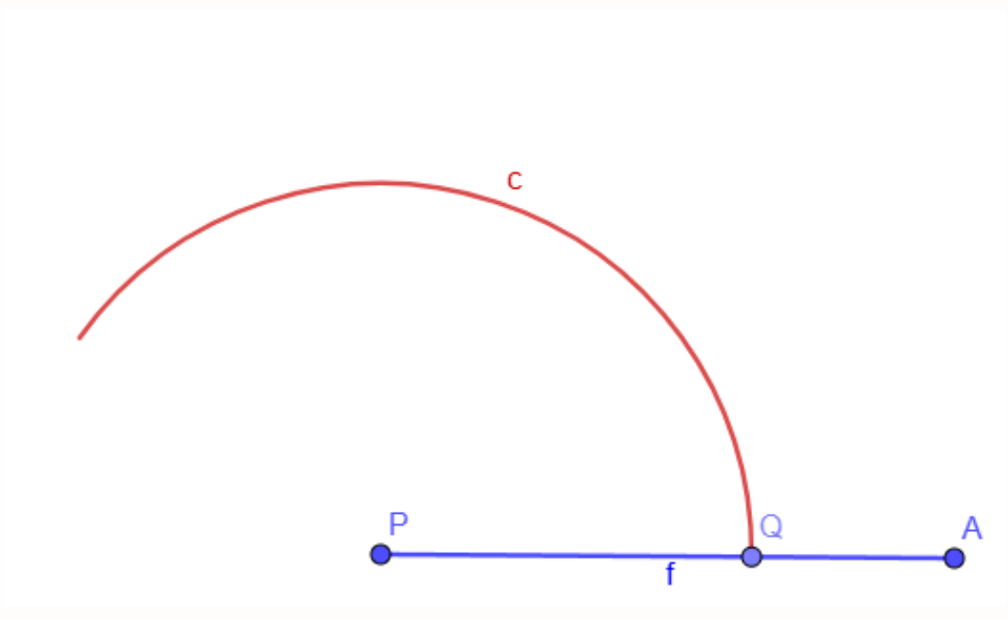


1. Trace um segmento de reta qualquer e nomeie seus extremos com A e B. Posicione a ponta seca do compasso em A e ajuste a abertura para um pouco mais do ponto médio do segmento. Trace um arco acima e outro abaixo do segmento.



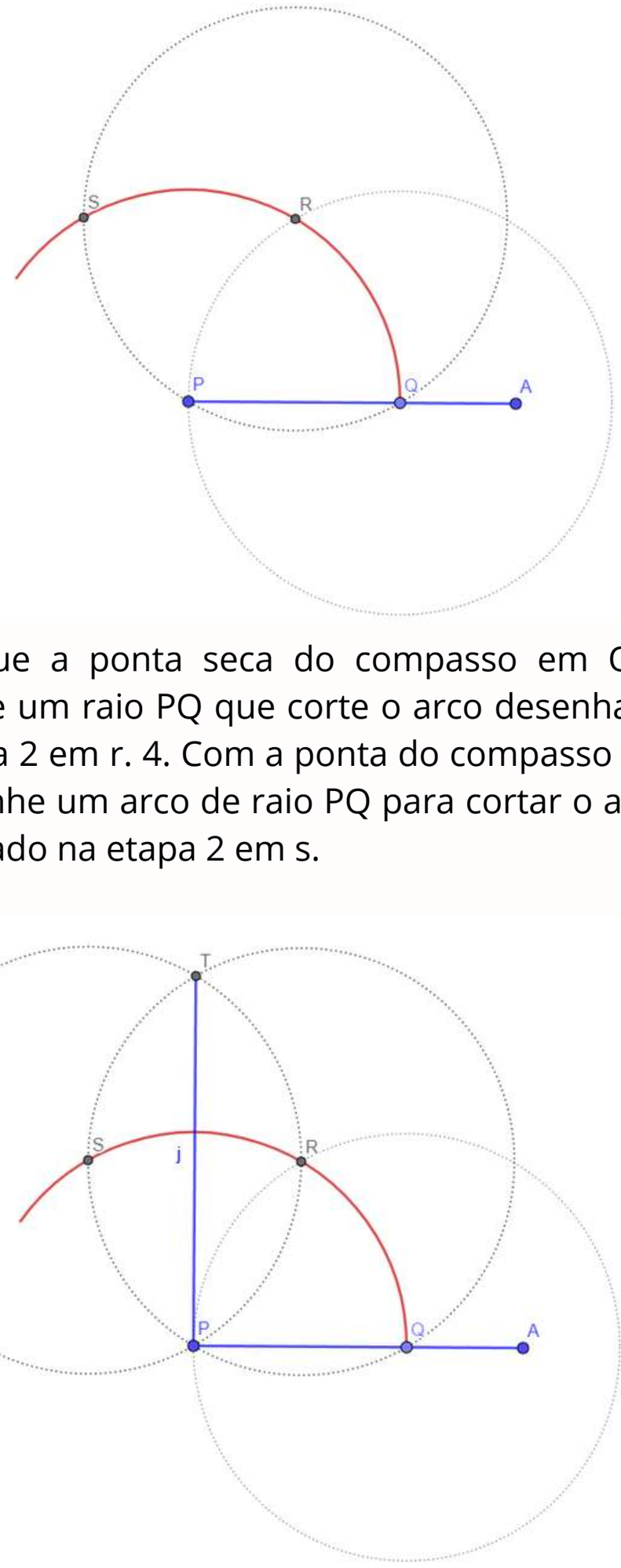
Sem alterar a abertura do compasso, repita o processo a partir do ponto B, criando dois novos arcos que cruzam os anteriores. Ligue os pontos e trace a mediatriz.

CONSTRUÇÃO DO ÂNGULO DE 90º



1. Desenhe o segmento PA. 2. Coloque a ponta seca do compasso em P e abra até que a ponta ultrapasse o ponto médio do segmento. Desenhe um arco que corte o segmento em Q.

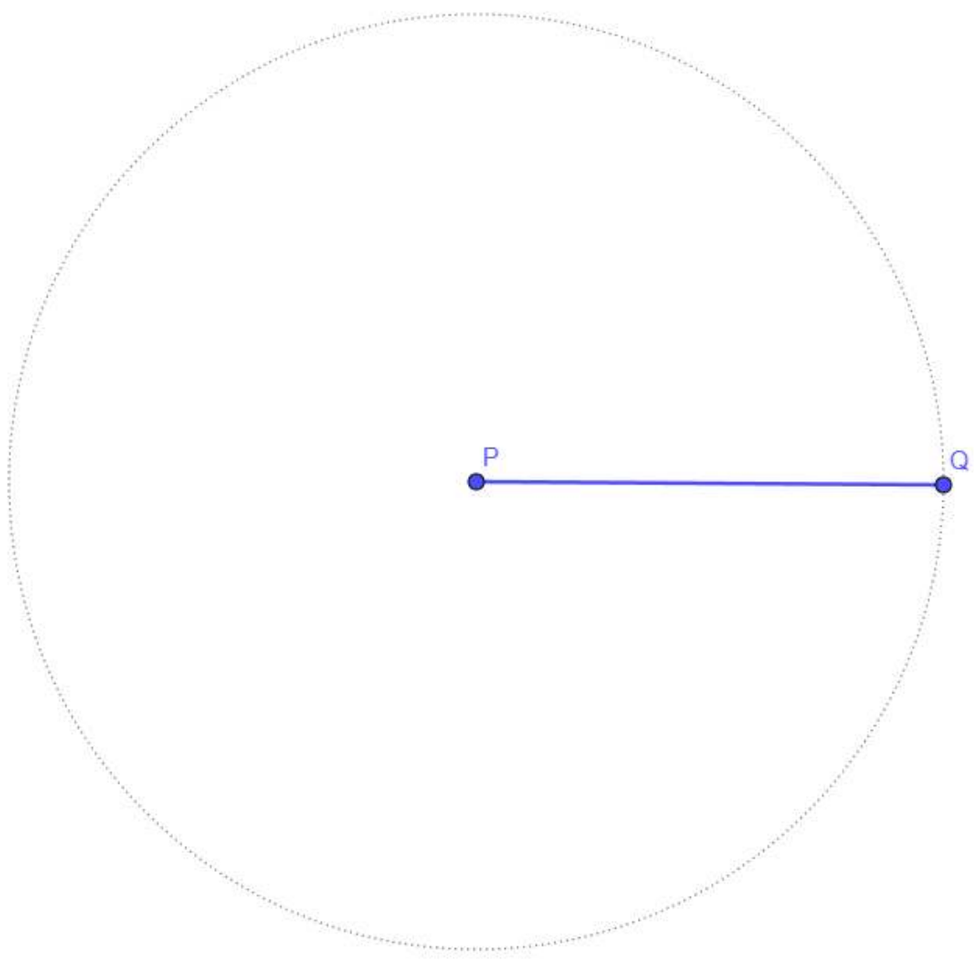
Com a ponta do compasso ainda em R, desenhe outra circunferência de raio pq próximo a T, conforme mostrado. 6. Com a ponta do compasso em s, desenhe um arco de raio PO para cortar o arco desenhado na etapa 5 em T.



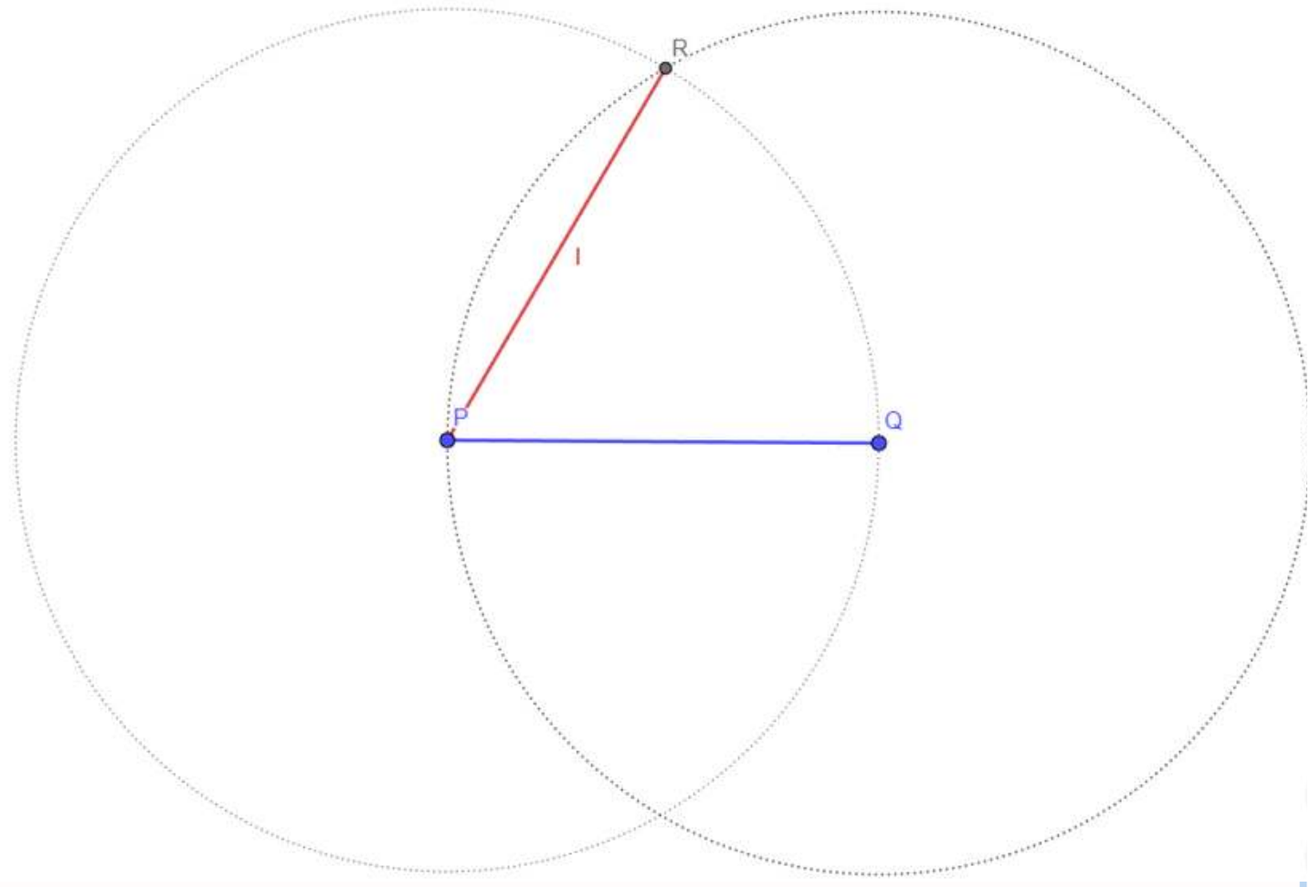
3.Coloque a ponta seca do compasso em Q e desenhe um raio PQ que corte o arco desenhado na etapa 2 em r. 4. Com a ponta do compasso em R, desenhe um arco de raio PQ para cortar o arco desenhado na etapa 2 em s.

7. Una o oponto T ao ponto P. O ângulo APT é de 90º.

CONSTRUÇÃO DO ÂNGULO DE 60º

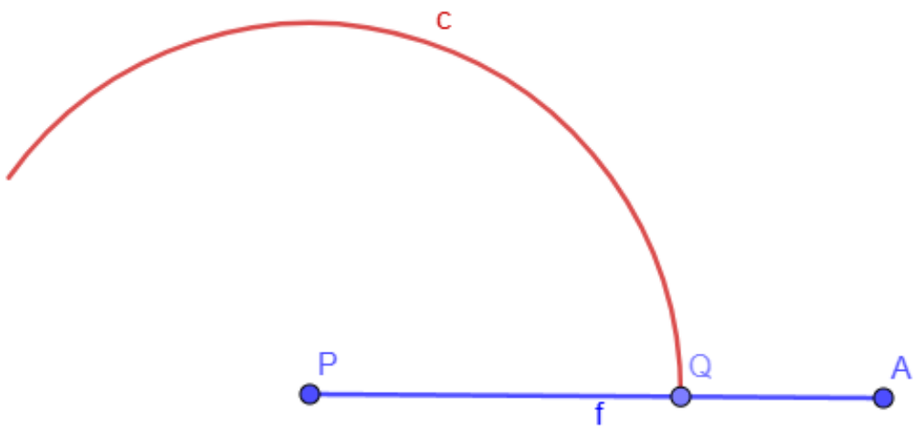


1. Desenhe o segmento PQ. Sem alterar a abertura, coloque a ponta do compasso em P e desenhe um arco que passe por Q.

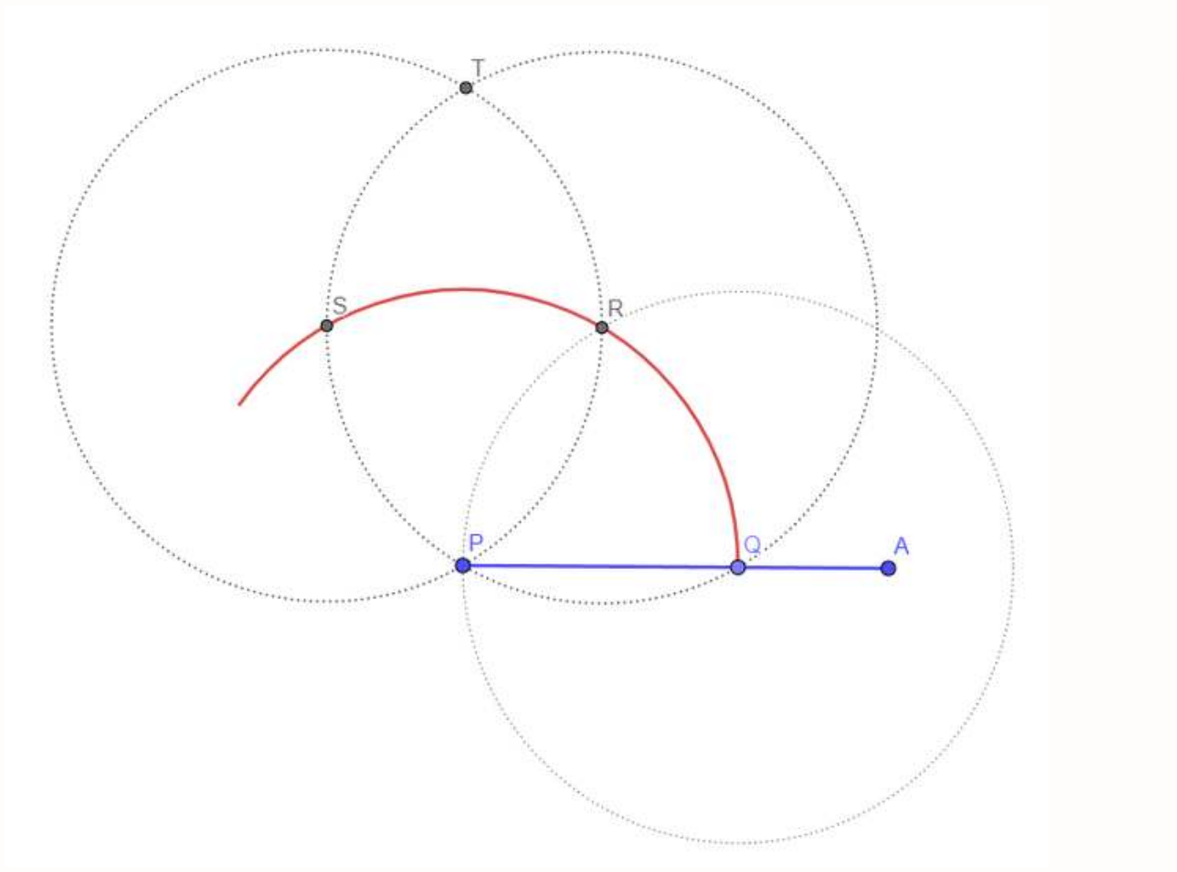


2. Sem alterar a abertura, coloque a ponta do compasso em Q e desenhe um arco que passe por P. Deixe esse arco, cortar o arco desenhado na etapa 2, em R. Una o ponto P ao ponto R, o ângulo QPR é de 60º e o triângulo PQR é um triângulo equilátero.

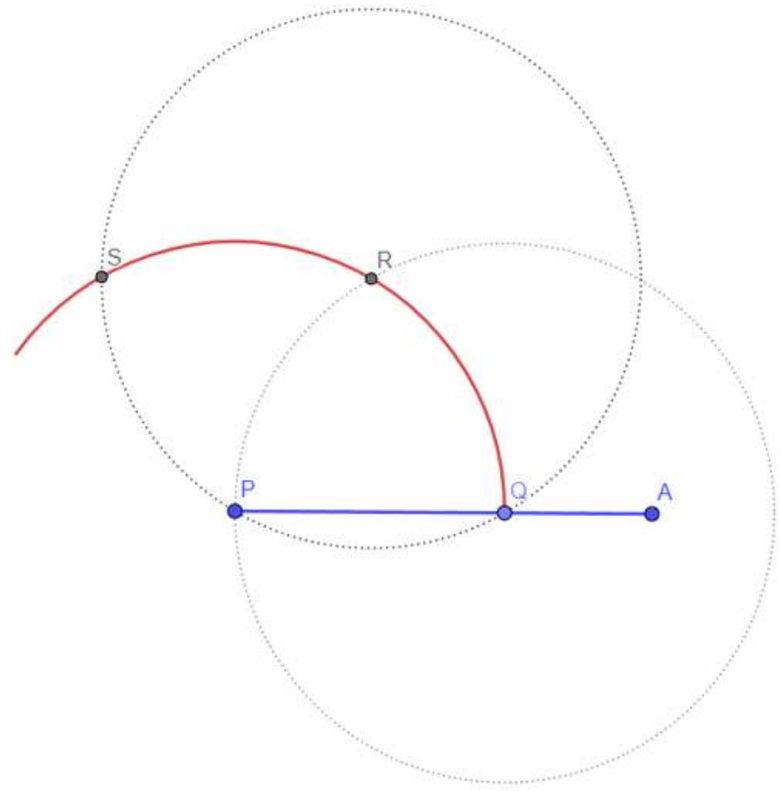
CONSTRUÇÃO DO ÂNGULO DE 45º



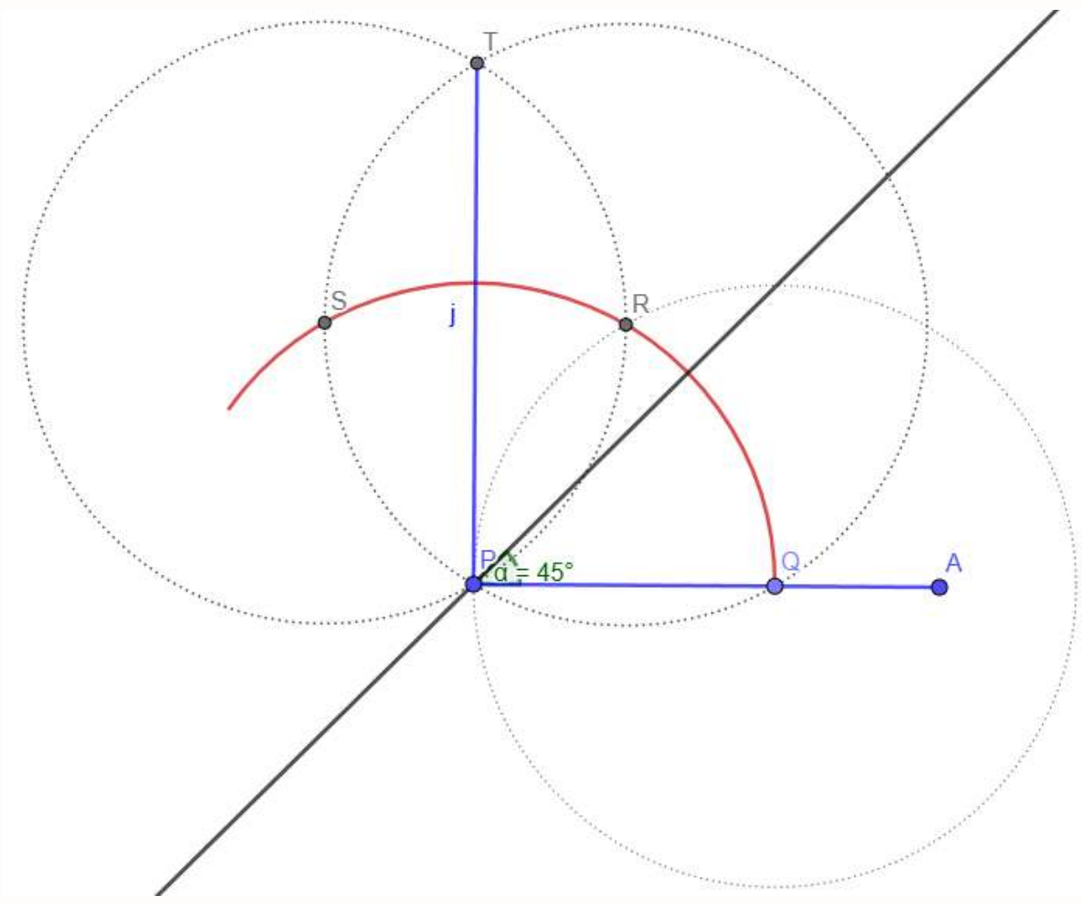
1. Desenhe o segmento PA. 2. Coloque a ponta seca do compasso em P e abra até que a ponta ultrapasse o ponto médio do segmento. Desenhe um arco que corte o segmento em Q.



Com a ponta do compasso ainda em R, desenhe outra circunferência de raio pq próximo a T, conforme mostrado. 6. Com a ponta do compasso em s, desenhe um arco de raio PO para cortar o arco desenhado na etapa 5 em T.

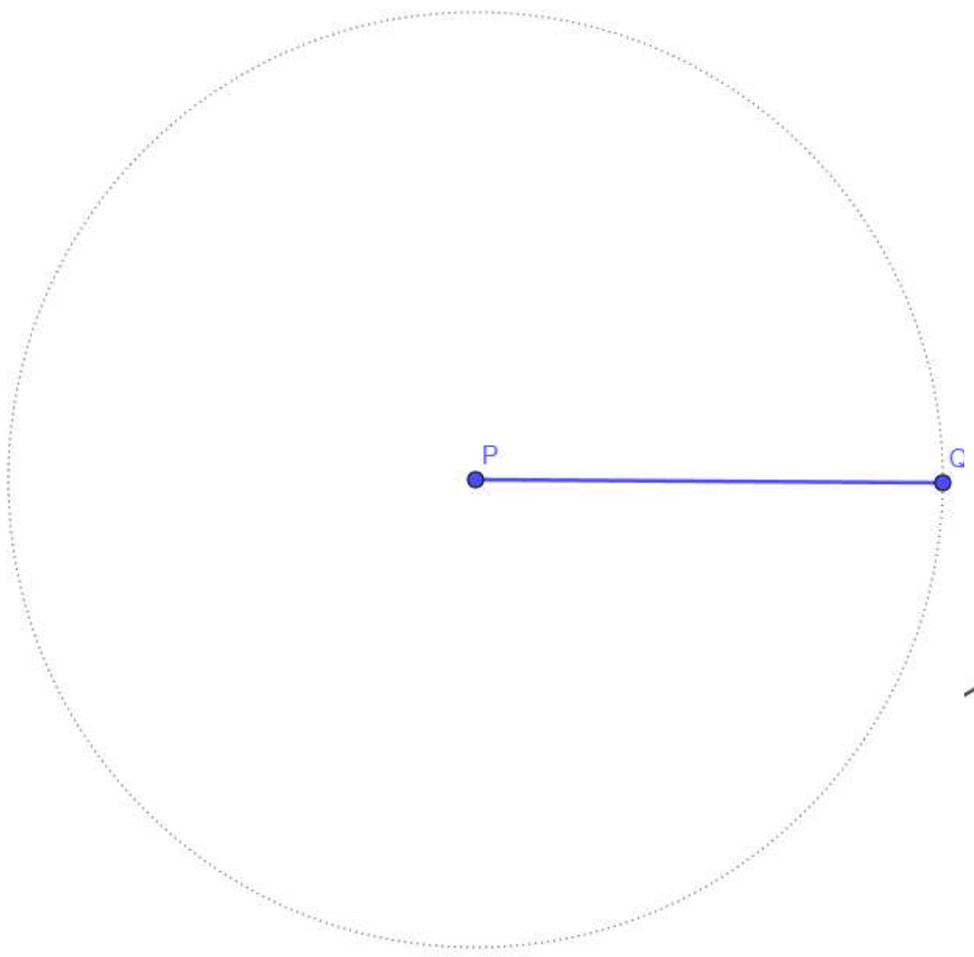


3.Coloque a ponta seca do compasso em Q e desenhe um raio PQ que corte o arco desenhado na etapa 2 em r. 4. Com a ponta do compasso em R, desenhe um arco de raio PQ para cortar o arco desenhado na etapa 2 em s.

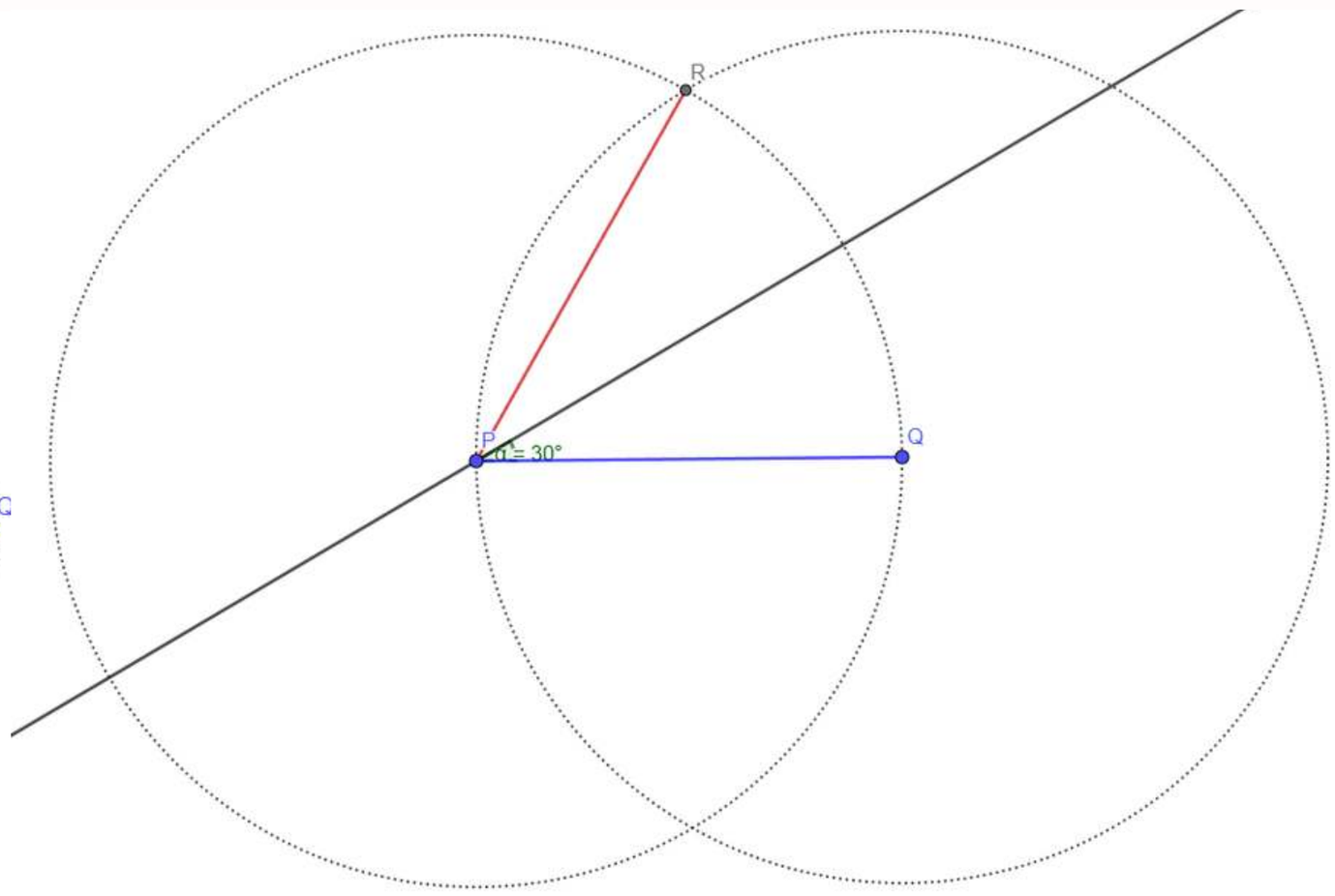


7. Una o oponto T ao ponto P. O ângulo APT é de 90º. A bissetriz desse ângulo forma um ângulo de 45º.

CONSTRUÇÃO DO ÂNGULO DE 30º

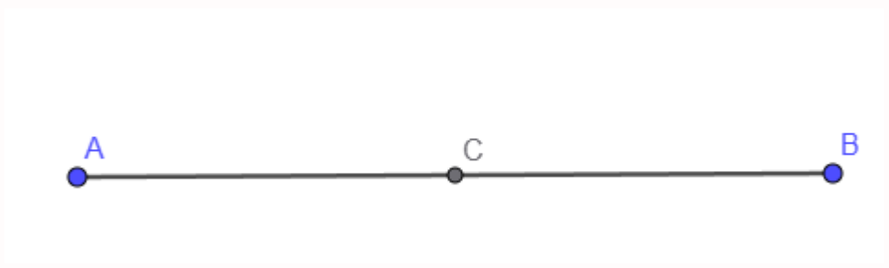


1. Desenhe o segmento PQ. Sem alterar a abertura, coloque a ponta do compasso em P e desenhe um arco que passe por Q.

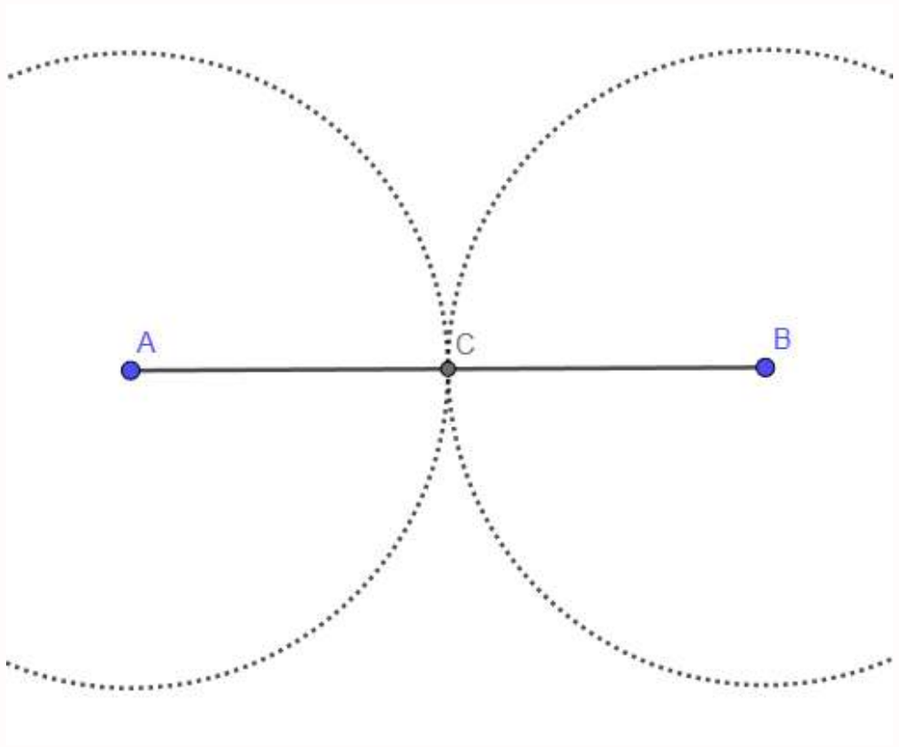


2. Sem alterar a abertura, coloque a ponta do compasso em Q e desenhe um arco que passe por P. Deixe esse arco cortar o arco desenhado na etapa 2, em R. Una o ponto P ao ponto R. O ângulo QPR é de 60º e o triângulo PQR é um triângulo equilátero. Construir a bissetriz de QPR.

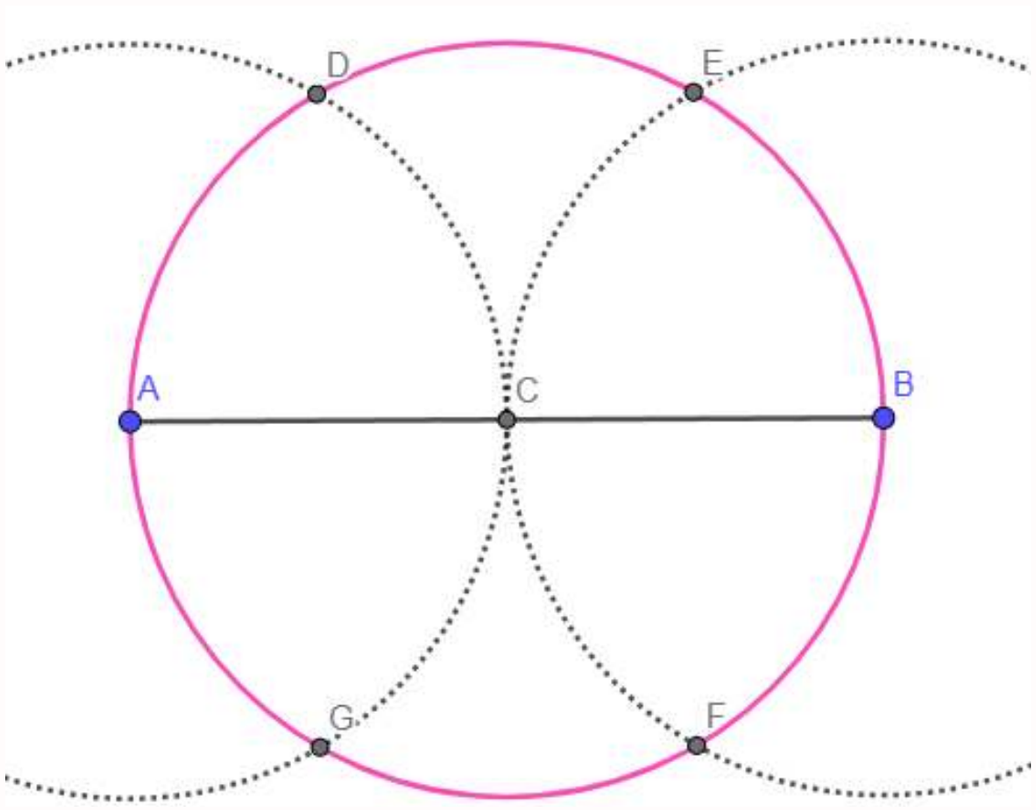
CONSTRUÇÃO DO HEXÁGONO



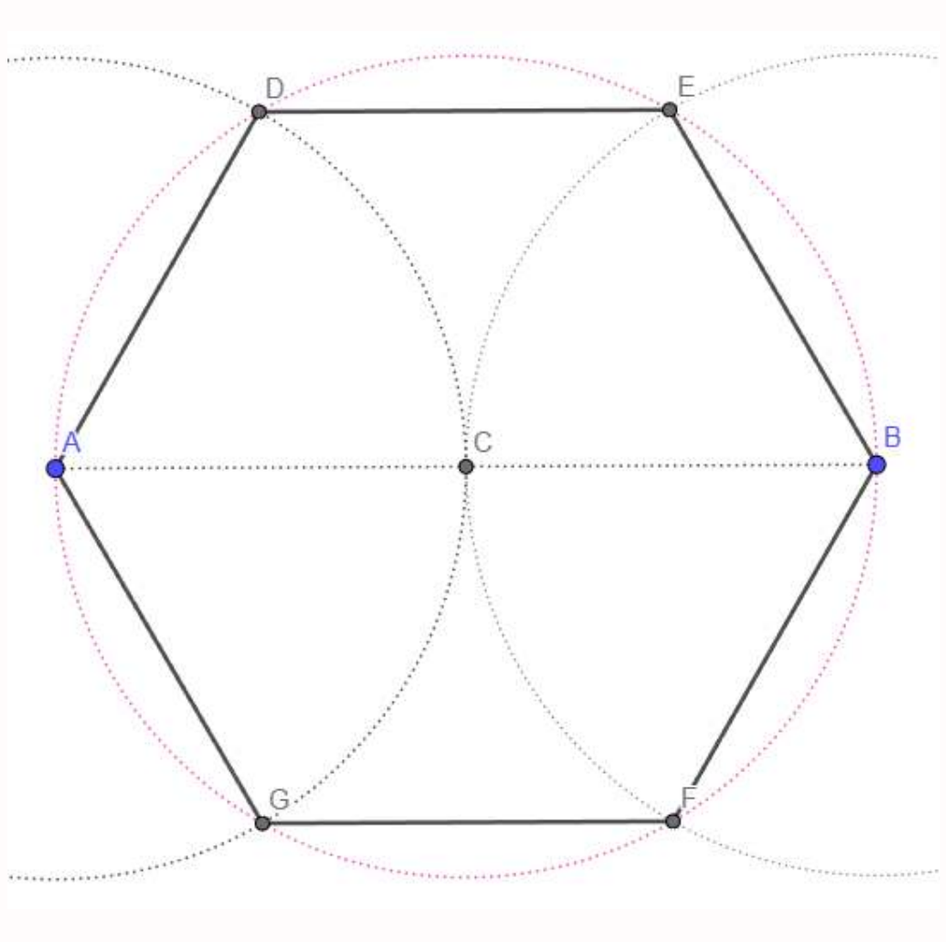
1. Trace um segmento de reta qualquer e marque seu ponto médio.



2.Trace uma circunferência com centro em A e abertura no ponto médio. Agora, com o centro em B, faça o mesmo processo.



3.Construa uma circunferência com centro em C (ponto médio) e abertura até o pontos de extremidade (A, B). Marque os pontos de interseção entre as circunferências (D, E, F, G)

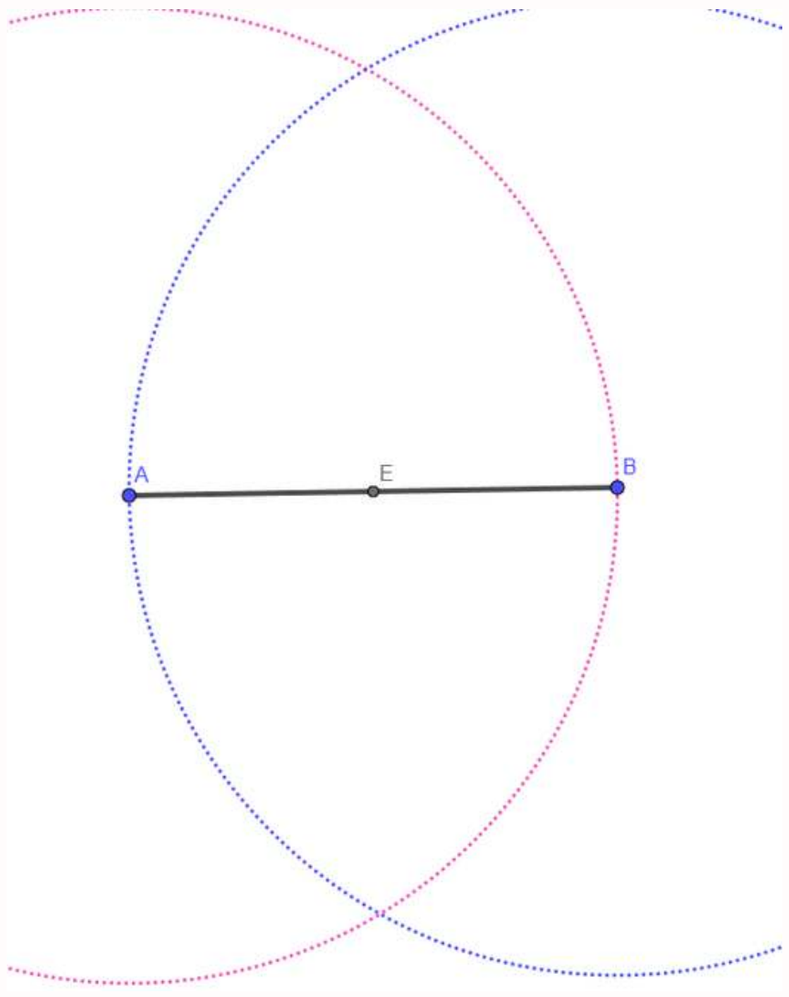


4. O hexágono é construído a partir da ligação dos pontos.

CONSTRUÇÃO DO QUADRADO

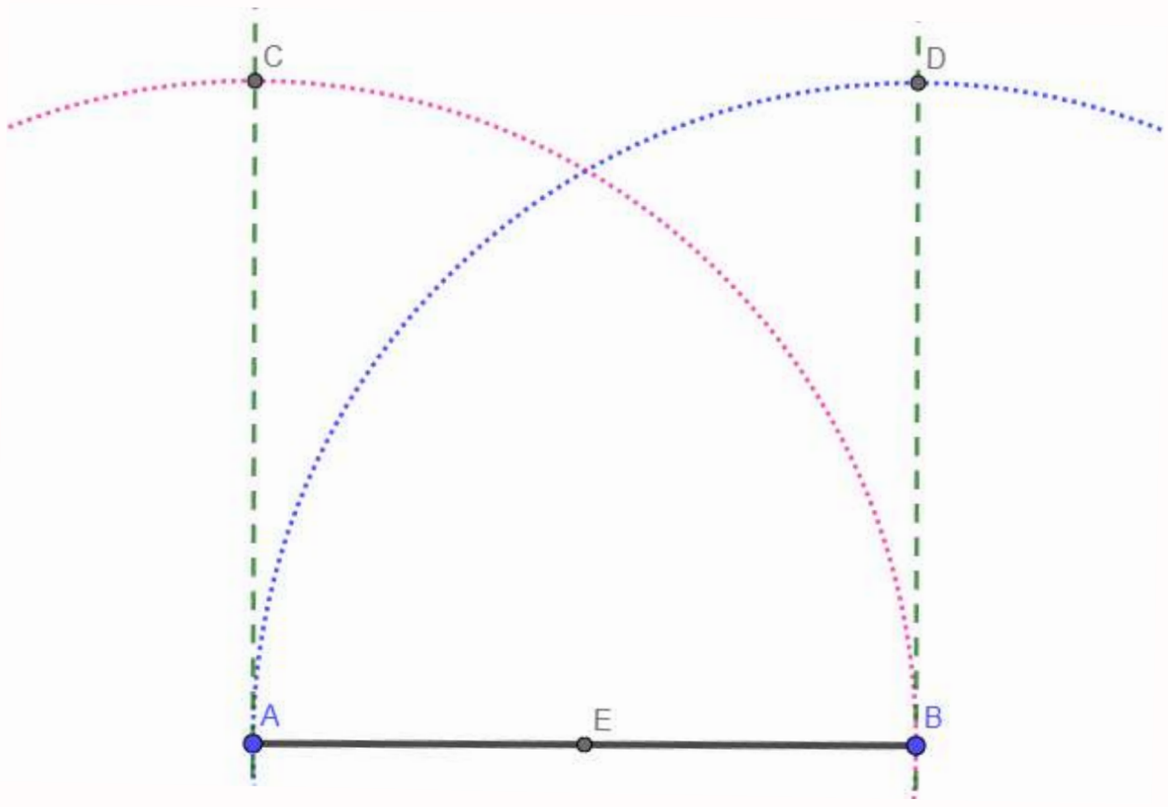


1. Construa um segmento de reta AB com uma medida qualquer.

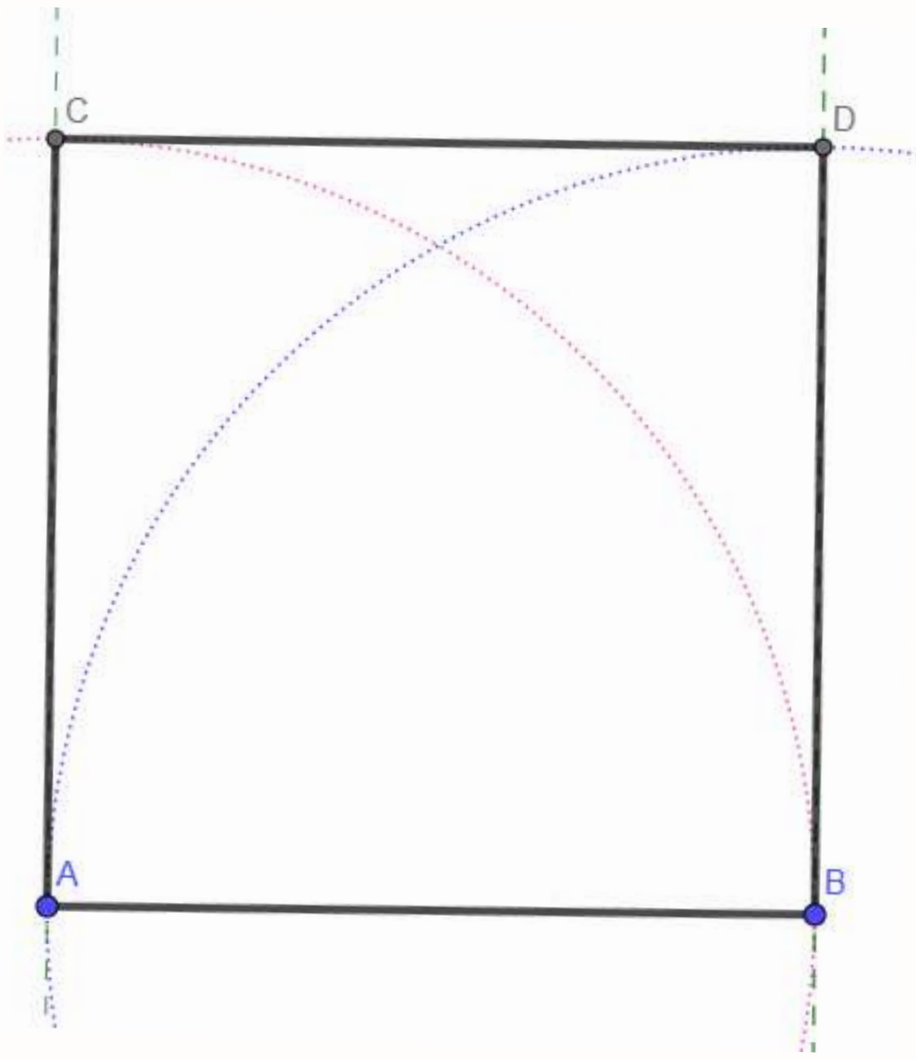


2. Construa uma circunferência com centro em A e raio AB. Faça outra circunferência com

CONSTRUÇÃO DO QUADRADO

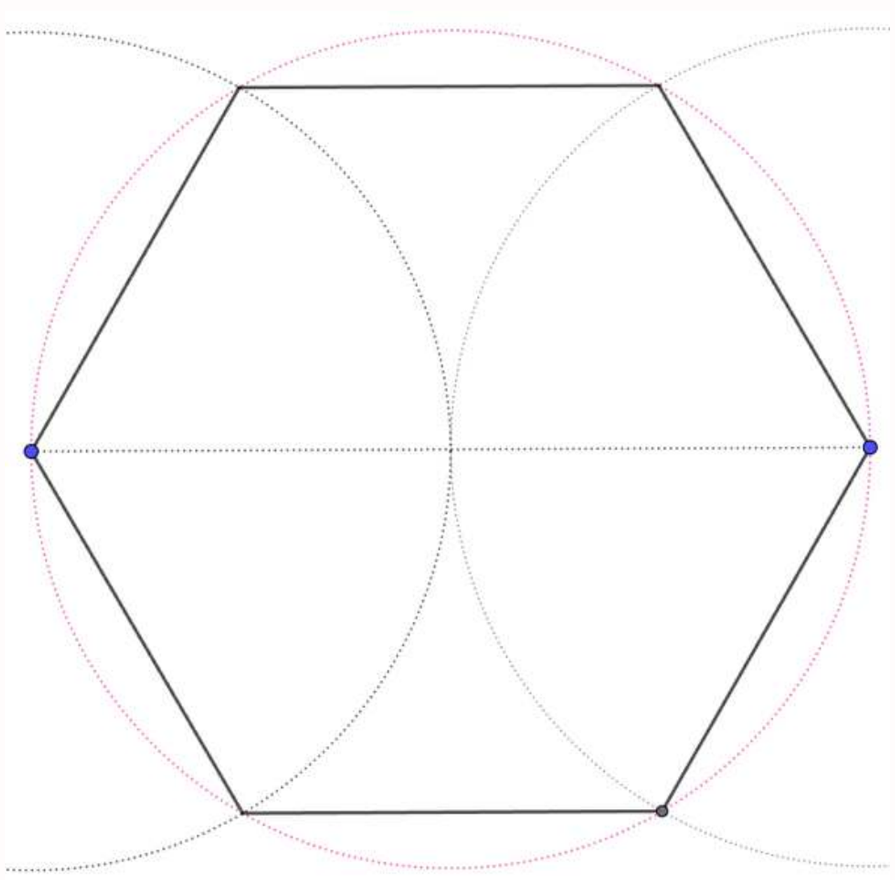


3.Trace uma perpendicular nos pontos A e B. Marque pontos de interseção entre as circunferências e as perpendiculares traçadas.

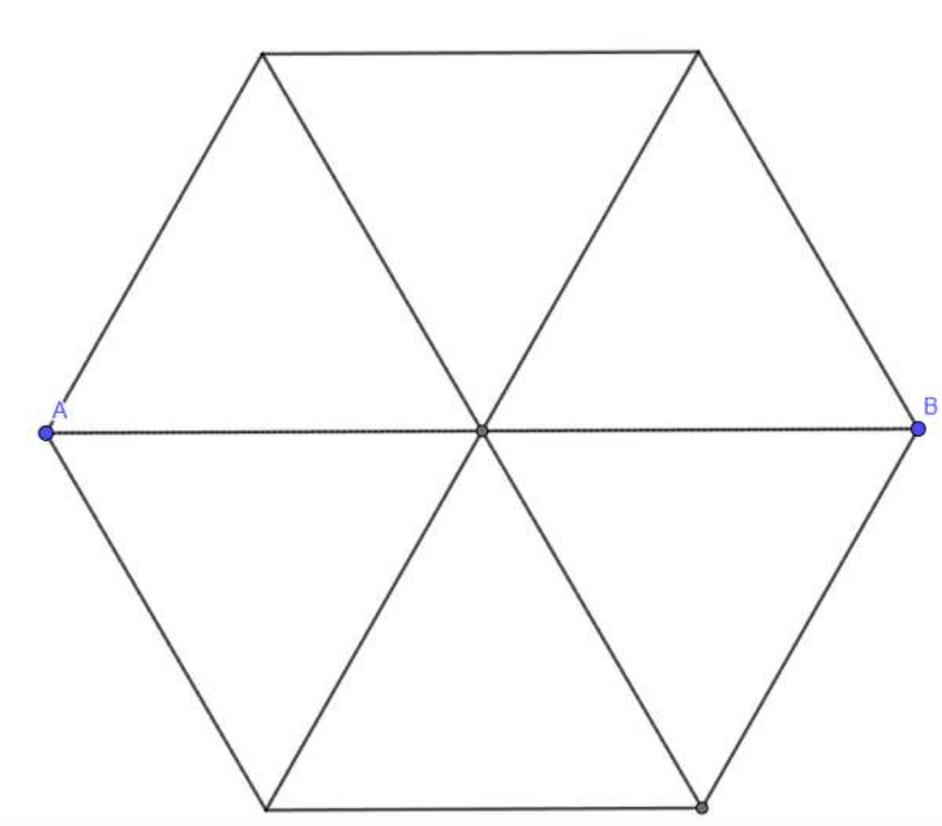


4. Ligue os pontos de interseção e desenhe o quadrado.

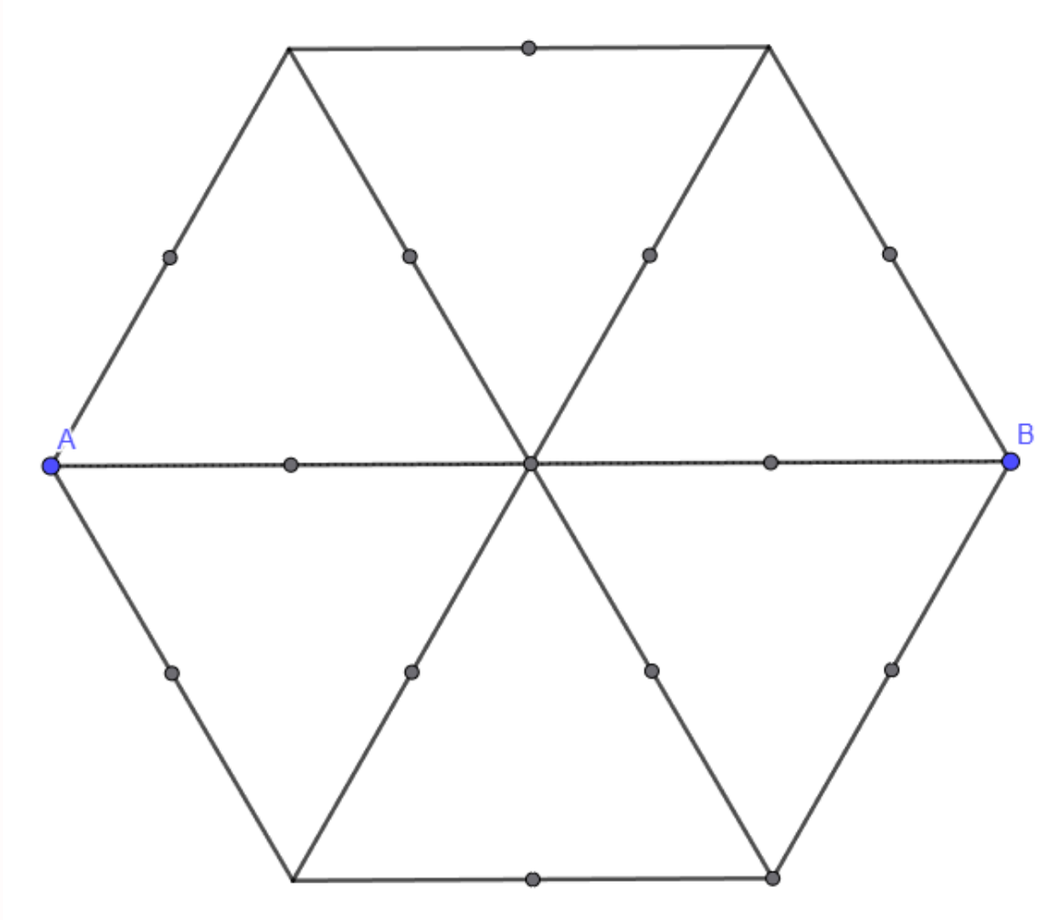
CONSTRUÇÃO DA MANDALA



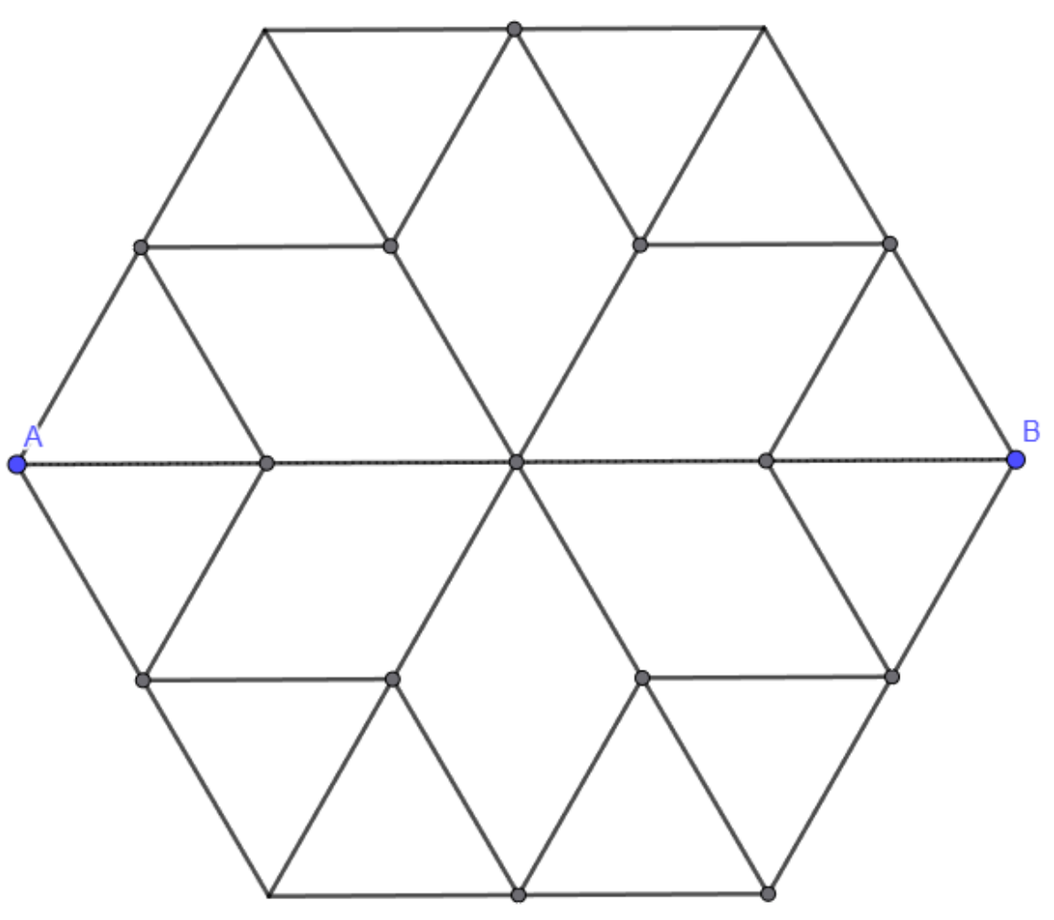
1. Construa o hexágono. Ele será a base para a mandala.



2. Trace segmento de retas ligando o centro aos vértices do hexagono.



3. Marque o ponto médio de todos os segmentos



4.Trace segmentos que liguem os pontos encontrados finalizando a mandala.



DESENVOLVIMENTO

Para encerrar a prática, é interessante propor perguntas que levem os(as) estudantes a retomar os conceitos, refletir sobre os procedimentos realizados e perceber a utilidade da geometria. Para isso, deixamos as seguintes sugestões:

Como podemos verificar que um polígono construído é realmente regular?

Qual construção foi mais fácil de realizar? E qual foi a mais desafiadora? Por quê?

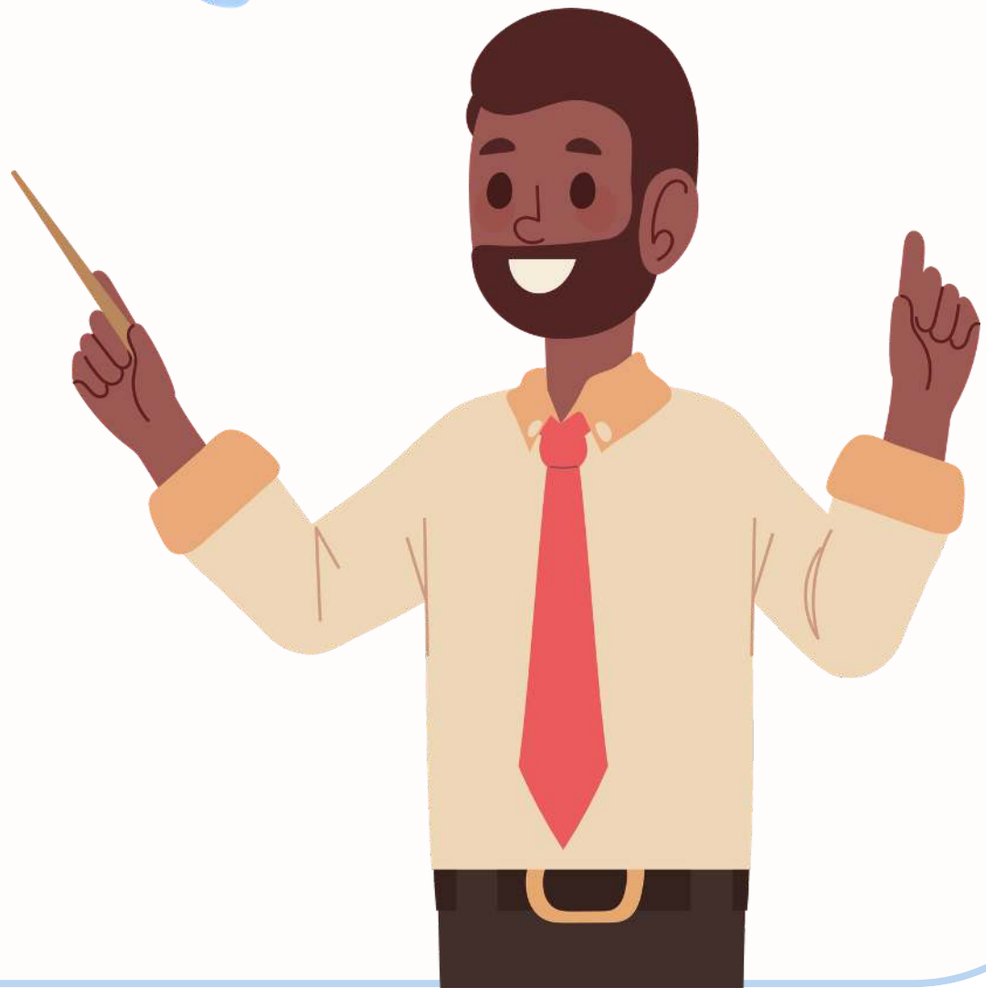
Qual relação existe entre os polígonos regulares e os ângulos estudados?

Por que a mediatriz e a bissetriz são consideradas construções fundamentais da geometria?

Em que situações você acredita que essas construções geométricas são utilizadas fora da escola?

Se você tivesse que explicar para outra pessoa a importância das construções geométricas, o que diria?

Você pode fazer uma exposição com os trabalhos desenvolvidos em sala de aula, apresentando para toda a escola as construções geométricas.





CONSIDERAÇÕES FINAIS E AVALIAÇÃO

Professor(a), reitere a importância da precisão em construções geométricas. Relacione também os conceitos com aplicações reais, como mediatriz e bissetriz na construção de pipas e em dobraduras precisas, por exemplo. Você pode avaliar os(as) estudantes a partir da participação ativa nas atividades da precisão das construções realizadas.



JOGOS MATEMÁTICOS

Indicamos a utilização do quebra-cabeças *Euclidea*, que se relaciona às construções geométricas. Com ele, o(a) estudante tem mais uma oportunidade de aprender de maneira divertida. Disponível em: https://www.euclidea.xyz/en/game/packs.



REFERÊNCIAS

https://vocepergunta.com/library/artigo/read/366767-como-fazer-um-quadrado-com-um-compasso#question-0

https://www.euclidea.xyz/en/game/packs. Acesso em: 24 jul. 2026.

Oliveira, M. R. de, & Pinheiro, M. R. da R. (2016). Elementos da Matemática – Volume 2: Geometria Plana (3ª ed.). [Editora].

SILVA, Alex Gomes da. Construções geométricas com régua e compasso. 2013. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013. Disponível em: https://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/2432. Acesso em: 07/03/2025.

A Matemática pura é, à sua maneira,
a poesia das ideias lógicas.

Albert Einstein

